*И. А. Корнилов, Е. А. Мельниченко*

# Статистическое исследование риска в автотранспортном страховании

*В статье содержатся рекомендации по выполнению статистических и актуарных исследований в автотранспортном страховании, которые применимы и к большинству рисковых видов страхования, а также результаты исследования страхования автотранспорта, осуществленного на основе реальных данных одной из московских страховых компаний.*

*Предполагается, что читатель знаком с основными принципами выполнения статистических [Айвазян, Мхитарян (2001)] и актуарных [Корнилов (2004)] исследований. Предложенный материал иллюстрирует роль статистических методов в решении актуарных задач, поэтому может использоваться при проведении исследований студентами, магистрантами и аспирантами, специализирующимися по актуарной проблематике.*

## Статистические проблемы

Исследуем портфель, имеющийся у страховщика. Прежде всего, необходимо убедиться в его качественной однородности. Если это условие не соблюдено, то весь неоднородный портфель надо разбить на несколько однородных субпортфелей. В многомерном статистическом анализе для решения этой проблемы применяется кластер-анализ. В страховании, из-за наличия большого количества признаков нечисловой природы и трудностей при их оцифровке, в первом приближении приходится ограничиться обычной группировкой. Например, разбить все автомобили на группы по маркам и на подгруппы по возрасту (или пробегу). Разумеется, те же проблемы возникают и при классификации водителей. Кроме возраста и стажа безаварийной езды, надо учитывать их здоровье, особенности эксплуатации ими этого автомобиля и т. д.

Учет перечисленных (и других) факторов приводит к необходимости построения большого числа кластеров, часть которых могут быть весьма малочисленными. А это не позволит применить к ним строго обоснованные вероятностно-статистические методы.

Указанное обстоятельство актуально и для страховщиков, работающих на цивилизованном страховом рынке (Западная Европа, Северная Америка, Япония и т. д.). Они давно поняли необходимость объединения информации. И там, на государственном уровне, созданы Актуарные центры, в которые вся информация поступает в обязательном порядке.

Возникает (пусть виртуальный) большой однородный портфель, позволяющий корректно решать поставленные задачи. Результаты в виде рекомендаций высылаются всем страховым компаниям (СК), работающим на страховом рынке страны. Если компания обладает портфелем, существенно отличающимся по характеристикам от общего, то эта СК может заказать научное исследование своего портфеля (разумеется, конфиденциально). А при наличии в штате квалифицированных актуариев — сама выполняет эти исследования.

Но даже в таких (исключительно благоприятных, по российским меркам) условиях иногда возникает ситуация, когда малочисленность и недостаточная однородность портфеля не позволяют применить строго обоснованные методы. Тогда приходится применять *эвристические* подходы. Они не имеют строгого обоснования, но иногда на практике дают неплохие результаты. Проблема в том, что заранее нельзя сказать, окажется ли конкретный эвристический прием эффективным (для имеющегося портфеля). То есть здесь мы имеем дело с методом проб и ошибок. В противоположность этому, преимуществом строгих методов является возможность заранее проверить допустимость и корректность их применения, а затем оценить точность и надежность полученных результатов. Условно можно считать, что эвристические подходы соответствуют полному перебору вариантов, а строго обоснованные методы — целенаправленному перебору.

Исходя из того, что в современных российских условиях страховые портфели весьма малочисленны, строгие методы применяются значительно реже эвристических. А при учете столь короткой истории отечественного страхования, это существенно затрудняет прогнозирование исследуемого процесса. Приходится работать при неявном предположении о стабильности исследуемого риска. Хотя очевидно, что риск меняется во времени. Для иллюстрации этого тезиса достаточно указать на наличие всевозможных поправочных коэффициентов, никак не обоснованных (например, числа *1,2* в формуле нетто-ставки практически во всех книгах по содержательным вопросам страхования, не только актуарных).

Даже в наиболее технически развитой отрасли — страховании жизни (и, возможно, дополнительной пенсии) риск практически не классифицируется. (Например, по специальности застрахованного). Дело не в отсутствии формул (или, в более общем виде, знаний), а в отсутствии (или недостаточности) объективной информации большого объема, чтобы стало возможным применить эти знания. Поэтому и здесь страховщик реагирует на отсутствие информации поправочными коэффициентами, т. е. повышением тарифа.

В настоящее время в Российской Федерации наиболее массовыми видами страховых полисов стали — *автотранспортные* и *медицинские*. Например, Обязательное медицинское страхование (ОМС), Добровольное медицинское страхование (ДМС); Обязательное страхование автогражданской ответственности (ОСАГО), потянувшее за собой другие договоры автострахования, и, в частности, КАСКО — «страхование собственно транспортных средств». Именно здесь возникли достаточно большие по объему портфели, которые в первом приближении считаются однородными. И это позволяет при исследовании таких портфелей применять строгие методы.

Предположим, что нам удалось выделить достаточно многочисленный и качественно однородный портфель, например, в автотранспортном страховании. При этом ОСАГО и КАСКО можно анализировать, в принципе, почти одинаково, хотя результаты будут, конечно, различными. Дело в том, что в указанных договорах риск генерируется водителем и автомобилем, а также внешней средой, воздействие которой случайно. А в страховании от угона, например, появляются «злоумышленники». Следовательно в этом портфеле характер риска может быть несколько иным. Но если имел место угон, то СК выплачивает возмещение, после чего договор прекращает существование. Таким образом, в каждом договоре возможно не более одного страхового случая.

Исследователь обязан учесть, что договоры заключаются на определенный срок, в течение которого может произойти несколько страховых случаев. То есть количество страховых случаев и число пострадавших объектов — не равны. Поэтому вероятность страхового случая не может быть оценена как отношение числа исков к количеству договоров в портфеле при условии, что все риски обоснованы и должны быть удовлетворены полностью. В результате можно получить значение дроби (как оценки искомой вероятности) больше единицы. Эта проблема решается в актуарном разделе применением коллективных моделей, учитывающих указанную особенность.

Сначала проанализируем распределение величины ущерба при наступлении страхового случая. Здесь интерес представляет число страховых случаев и значения ущерба в каждом из них. Следует найти нужное число начальных (а если потребуется, и центральных) моментов. Затем выдвигается предположение (рабочая гипотеза) о виде закона распределения величины ущерба при наступлении страхового случая. Основным вероятностным распределениям свойственно выражение нескольких первых моментов через параметры теоретического закона. Это и используется в методе моментов.

Предполагается, что эмпирические моменты приблизительно равны теоретическим. То есть теоретическое распределение хорошо аппроксимирует эмпирические данные. Далее выражения моментов через параметры используются как уравнения относительно неизвестных значений параметров. Полученная система уравнений может быть весьма сложной и не иметь аналитического решения, а значит, потребует применения численных методов. Решив эту задачу, можно получить оценки искомых параметров. Затем построить теоретические вероятности, а по ним — теоретические частоты, и применить один из критериев согласия для проверки гипотезы о возможности применения построенной модели.

Особого обсуждения требуют вопросы: какой из критериев согласия применять, насколько достоверные результаты он обеспечит; что делать, если два критерия согласия дадут различные результаты и т. д.

Однако трудности у исследователя могут возникнуть значительно раньше, уже при составлении системы уравнений. Число уравнений может быть больше числа искомых параметров. Получается, что система переопределена. В таком случае однозначного решения, как правило, не существует. Следовательно, если из всего набора возможных уравнений мы выберем одно подмножество, то получим один набор значений параметров. Если выберем другое подмножество уравнений, получим другой набор значений параметров. Чем существенней расхождения теоретического закона и эмпирических данных, тем сильнее будут различаться полученные результаты.

Возникает проблема, достаточно известная (и типичная) в статистике. Наиболее ярким примером может служить мультиколлинеарность и ее последствия в регрессионном или дискриминантном анализе.

На практике используют минимально необходимый набор условий (уравнений) и не задумываются о перечисленных нюансах.

Альтернативный подход базируется на идеях, используемых при численном решении систем уравнений. Он получил название «метода минимизации *невязок*». Такой подход основан на поиске решения системы, при котором минимизируются противоречия между всеми уравнениями. Это своего рода аналог метода наименьших квадратов.

Разумеется, этот подход требует значительно более высокой квалификации пользователя и большего объема вычислений, поэтому очень редко используется на практике. И с прагматической точки зрения действия исследователя вполне ясны. Точные расчеты имеет смысл делать при наличии достоверной и представительной информации, которая на практике часто отсутствует.

В этом разделе мы указали на возникающие осложнения, чтобы предостеречь от излишнего упрощения проблемы. По нашему мнению, при оценке искомых параметров несколько предпочтительнее использовать более простое и удобное распределение. Например, не искать оценки параметров логнормального распределения непосредственно, а перейти к логарифмам исходной случайной величины, и с новой (нормально распределенной) величиной работать по классической методике. Во-первых, ничего не придется изобретать, а во-вторых, на исследователя будут работать все преимущества нормального закона, в частности, устойчивость результатов. К сожалению, далеко не все законы распределения так легко преобразуются в нормальный.

Но даже и в этой (удобной) ситуации есть ряд подводных камней, которые надо обойти. Во-первых, логарифмирование не является линейным преобразованием, поэтому нельзя строить равномерную сетку для исходной величины ущерба и считать частоты попадания в интервал. Для логарифмов равномерность шага нарушится, а требование равномерности является необходимым. То есть надо строить равномерную сетку, но в шкале логарифмов.

Во-вторых, даже с учетом этого обстоятельства, лучше рассчитывать оценки параметров исследуемого нормального закона по *несгруппированным* данным. Результаты будут точнее. Следовательно, при антилогарифмировании (возврате к исходным данным) искажения будут меньше. Следует отметить, что в какую бы сторону ни ошибся исследователь при нахождении оценки математического ожидания, оценка дисперсии все равно увеличится, так как дисперсия равна минимуму математического ожидания квадрата отклонения случайной величины от константы. Этот минимум достигается при значении константы, равной математическому ожиданию самой случайной величины.

После нахождения оценок математического ожидания и дисперсии нормально распределенной случайной величины (логарифма ущерба) надо строить равномерную шкалу для логарифмов ущерба, чтобы рассчитать вероятности попадания теоретической нормальной величины в этот интервал, а по ним — теоретические частоты.

С теоретическими частотами возникают свои трудности. С одной стороны, частота (число попаданий в интервал) должна быть целым числом. С другой стороны, если задача округления достаточно просто решается для одномерной величины, то уже в двумерном случае подгонка может стать весьма трудоемкой. Поэтому в большинстве учебников (и в значительной части научных публикаций) этот вопрос обходят молчанием и работают с дробными теоретическими частотами.

В страховании не все так гладко. Число страховых случаев не может быть дробным. Причем надо ориентироваться на худший результат, т. е. округлять в большую сторону. Чтобы суммы теоретических и эмпирических частот совпали, придется исходить из того, что число неблагоприятных ситуаций следует увеличивать, а число благоприятных — уменьшать.

Следующий вопрос — хвосты нормального закона. Он определен на всей числовой оси. Однако ущерб не может быть отрицательным или бесконечно большим положительным числом. Возникает проблема «урезанного распределения» — когда можно этим пренебречь, а когда следует искать оценки параметров «урезанного распределения», исследовать расхождения скорректированных оценок с классическими и оценивать последствия этих расхождений.

Предположим, что логарифмы ущерба распределены практически нормально. Тогда можно построить процентные точки этого нормального распределения, а далее по ним (антилогарифмированием) построить соответствующие процентные точки самой величины ущерба. Кроме того, можно, по известным формулам, получить математическое ожидание и дисперсию величины ущерба при одном страховом случае.

**Замечание.** Важно отметить, что переходить от *условного* распределения к *безусловному* надо после возвращения от логарифмов ущерба к самому ущербу. Поскольку вероятность возникновения страхового случая (и, следовательно, ущерба) не имеет никакого отношения к вспомогательной случайной величине — логарифму ущерба, именно на этом этапе и надо рассчитывать вероятность.

Так как в договоре допускается более одного страхового случая, то надо исследовать распределение числа страховых случаев в одном договоре (концепция *индивидуальной* модели). А затем на основе полученных результатов, учитывая характеристики ущерба при страховом случае, рассчитать характеристики для одного договора. Здесь используется независимость двух величин: ущерба при одном случае и числа случаев в одном договоре. Зная число договоров и исходя из их взаимной независимости, находим характеристики ущерба во всем портфеле.

Альтернативный подход опирается на идеи *коллективных* моделей. Здесь нет этапа нахождения характеристик в одном договоре, а от одного страхового случая переходят сразу ко всему портфелю. Значит, зная число страховых случаев в портфеле, можно найти (с учетом независимости величин ущерба в разных случаях) характеристики ущерба для всего портфеля, опираясь на центральную предельную теорему, гарантирующую сходимость к нормальному закону суммы ущербов в отдельных договорах.

Оба подхода приводят к приблизительно одинаковым результатам. Математические ожидания ущерба по всему портфелю должны совпасть с точностью до вычислительных погрешностей. А дисперсия в коллективной модели будет несколько выше. Поскольку дисперсии различаются тем существеннее, чем больше вероятность страхового случая.

Естественно, могут возникнуть вопросы о допустимости построения нового ряда распределения ущербов по договорам (просуммировав все страховые случаи в каждом договоре) и исследования этой случайной величины. То есть требуется найти среднее арифметическое ущерба и выборочную дисперсию для договоров, чтобы использовать эти оценки в качестве оценок искомых характеристик всего портфеля. Ведь распределение ущерба во всем портфеле предполагается нормальным. Проблема в том, что оценка математического ожидания сохранится, а оценка дисперсии изменится.

С позиции учебного процесса, действительно представляет интерес сравнение результатов, полученных по двум алгоритмам (чтобы убедиться в наличии весьма существенных различий). А в реальных исследованиях, разумеется, надо сразу использовать «правильную» методику.

Зная характеристики суммарного ущерба в портфеле, можно переходить к решению актуарных проблем.

**Замечание.** Выбор теоретического закона распределения как дискретного (числа страховых случаев в одном договоре), так и непрерывного (величины ущерба при одном страховом случае) не всегда приводит к однозначному решению. Например, многие авторы пишут, что в автотранспортном страховании величина ущерба при одном страховом случае в договоре КАСКО или ОСАГО подчиняется логарифмически нормальному закону распределения. Но никто не объясняет причин, не указывает, как содержательно интерпретировать параметры этого закона. Нет рекомендаций, что делать, если теоретические и эмпирические частоты сильно различаются. Поэтому возникает неоднозначность.

Например, для нормального распределения математическое ожидание и дисперсия являются одновременно характеристиками и параметрами. Для других же законов распределения значения основных характеристик (математического ожидания и дисперсии) могут быть близки (или сопоставимы), но так как эти характеристики не для всех законов являются в вышеуказанном смысле *естественными параметрами*, они не будут полностью определять функцию распределения $F(x)$. То есть для одной и той же точки $x$ значения функции распределения $F_k(x)$ и $F_j(x)$ могут различаться весьма существенно (для разных теоретических законов распределения).

Некоторые исследователи для нахождения теоретического закона используют компьютеры. Программа (*Statistica, SPSS и др.*) выбирает распределение с наименьшим уровнем значимости, при котором наблюдаемое значение критерия равно табличному. При этом о содержательной интерпретации, разумеется, нет и речи. Конечно, подобный формализм нельзя признать удачным решением.

Другие — следуют по проторенной дорожке. Например, стараются подогнать распределение ущерба под логарифмически нормальное. Тогда они сталкиваются с другой проблемой. Выбранное распределение категорически не подходит. Одной из возможных причин этого может быть недостаточная однородность исследуемого портфеля, но, если его разбить на несколько однородных субпортфелей, то в каждом из них будет свое логнормальное распределение (со своими значениями параметров). Возникает идея «смеси распределений». После получения оценок параметров каждого субпортфеля, исследователю придется проверить возможность объединения отдельных субпортфелей в один.

Тогда возникнет вопрос, как сравнивать два (или более) логнормальных распределения. Для нормальных случайных величин процедура известна. Сначала сравниваются дисперсии; если их можно считать равными, то сравнивают математические ожидания; если и они приблизительно равны, то можно считать, что выборки взяты из одной совокупности. Допустимо ли переносить результат для логарифмов ущерба на сам ущерб?

Здесь в вероятностно-статистическую задачу вмешивается актуарная трактовка. Для нормальных случайных величин выборочные дисперсии могут различаться в несколько раз, а генеральные дисперсии будут признаны практически равными (или, точнее, сопоставимыми). Особенно, при малых объемах выборок. Но тогда при антилогарифмировании дисперсии самого ущерба могут различаться несколькими порядками. И с точки зрения *актуарных* задач не могут считаться одинаковыми.

Конечно, если объемы субпортфелей достаточно велики, то доверительные интервалы для параметров существенно сужаются, и, чтобы они считались равными, их оценки не должны сильно разниться. Это может внушить некоторый оптимизм. Но не дает никаких гарантий. А если после объединения двух (или нескольких) субпортфелей расхождение между теоретическими и эмпирическими частотами сильно увеличилось, то допустимо ли это объединение?

Другая проблема — поведение правого хвоста распределения. Здесь, при проведении статистического исследования надо учитывать актуарные реалии. Поскольку ущерб не может быть неограниченным (если страховщик заподозрит возможность возникновения слишком большого ущерба, он включит в договор ограничение ответственности по *правилу первого риска*), то это надо учитывать при точных расчетах. Значительно сложнее решить проблемы толщины хвоста. То есть, как часто может возникнуть большой ущерб. В принципе, разные модели, при практически одинаковых значениях оценок математического ожидания и дисперсии, на основе которых и определяются оценки параметров в методе моментов, могут иметь различные по толщине хвосты. И тогда неверный выбор модели приведет либо к неоправданному оптимизму, т. е. к повышению вероятности разорения; либо к неоправданному пессимизму — потере конкурентоспособности.

Перечисленные вопросы, хотя бы косвенно, в первом приближении, характеризуют важность этапа статистического исследования риска, являющегося *базовым* для собственно актуарных исследований.

### Актуарные проблемы

Предположим, что наиболее трудоемкая статистическая часть исследования успешно выполнена. Построен достаточно многочисленный и качественно однородный портфель. Распределение суммарного ущерба в нем можно считать практически нормальным. Найдены оценки математического ожидания и дисперсии этой случайной величины. Значения параметров принимаются равными полученным оценкам. Для расчета вероятностей можно применить интегральную теорему Лапласа.

Отметим, что оценка математического ожидания полного ущерба в одном договоре указывает *рисковую* премию. Но с практической точки зрения значительно больший интерес представляет *нетто-премия*, сама рисковая премия — интересна лишь теоретически.

По интегральной теореме находим правую границу доверительного интервала, в который ущерб во всем портфеле попадает с заданной вероятностью. Определяем вероятность нарушения правой границы — *вероятность разорения*. Ее дополнение до единицы (значение функции распределения в правой границе) — указывает на вероятность выживания (неразорения), обеспеченное суммарной нетто-премией, собранной со всего портфеля. Разделив это значение на число договоров в портфеле, получаем нетто-премию в одном договоре. Далее находим брутто-премию.

Именно на этом этапе могут пригодиться найденные ранее *процентные точки ущерба*. Сравнение полученной нетто-премии с этими точками позволит охарактеризовать вероятность того, что в одном договоре ущерб не превысит уплаченной страхователем нетто-премии. Полезно сравнить полученную оценку вероятности с вероятностью неразорения во всем портфеле. Разумеется, они будут различаться. С точки зрения учебного процесса, это сравнение весьма полезно и поучительно, так как иллюстрирует преимущества страхования как процесса распределения риска, а кроме того, показывает различия в поведении случайных величин, распределенных по разным законам. Тем самым подчеркивает необходимость проведения серьезных вероятностно-статистических исследований риска перед выполнением собственно актуарных расчетов.

Как правило, портфель конкретной СК состоит из нескольких субпортфелей. Предположим, что мы проанализировали их отдельно, все, что можно, объединили. Дальнейшее объединение уже невозможно, поскольку риски в каждом субпортфеле существенно *различаются*. Но здесь надо иметь в виду, что СК интересует положение дел во всем портфеле, поэтому можно сложить математические ожидания и дисперсии, чтобы получить характеристики всего портфеля и найти правую границу для всего портфеля. Выясняется, что суммарная нетто-премия для всего портфеля несколько меньше, чем сумма нетто-премий, собранных с каждого субпортфеля в отдельности для обеспечения той же вероятности выживания. То есть субпортфели, объединившись, все вместе — выиграли.

Как поделить этот выигрыш? Возникает задача *справедливого распределения* суммарной рисковой надбавки между однородными субпортфелями. Принципы могут несколько различаться, поэтому и результаты будут различными. Интересы отдельных субпортфелей войдут в противоречие, и придется искать компромисс. Процесс поиска этого компромисса может стать итерационным. Но в конце концов надбавка будет распределена. Здесь важно подчеркнуть, что рисковая премия определена раньше и не пересматривается. Перераспределять можно лишь надбавку. Внутри однородного субпортфеля нетто-премии одинаковы.

После нахождения нетто-премии необходимо рассмотреть несколько сценариев. Прежде всего, надо попробовать различные варианты нетто-премии (и, соответственно, брутто-премии), чтобы соотнести условия, предлагаемые компанией, с ситуацией, сложившейся на рынке, и оценить собственную конкурентоспособность. Разумеется, если изменилась суммарная рисковая надбавка, которую надо собрать со всего портфеля, то опять придется решать задачу ее распределения между субпортфелями и находить нетто-премии.

После определения рациональной ценовой политики надо оценить потребность в резервах и перестраховании. Разумеется, здесь возможно большое количество приемлемых альтернативных вариантов повышения надежности — до уровня, требуемого Федеральной службой страхового надзора (ФССН). Целесообразно их сравнить, чтобы предложить руководству компании наиболее рациональные варианты политики формирования и использования резервов, а также рекомендации по выбору перестраховочной программы. Конечно, надо предусмотреть несколько возможных сценариев развития ситуации на рынке, просчитать вероятности возникновения этих ситуаций, оценить возможные последствия принятия правлением СК предлагаемых различных решений.

Современная отечественная практика перестрахования автотранспортного риска весьма далека от идеала. Очевидно, что с содержательных позиций наиболее целесообразен договор *эксцедента убытка*. Однако часто заключается договор *квотного* перестрахования, который в реальности является платой *цедента* (основного страховщика) «перестраховщику» за сотрудничество (например, по привлечению клиентов).

Можно проанализировать различные модификации условий договора. Например, включение в договор *франшизы* (пропорциональной защиты или правила первого риска и т. д.). Из содержательных соображений *условная* франшиза представляется весьма рациональной. Стороны не спорят по пустякам, взнос несколько снижается. Вопрос в выборе значения франшизы. Наверное и здесь надо заранее рассчитать различные варианты, отобрать заведомо приемлемые для СК и уже из них предлагать на выбор страхователю с расчетами: сколько он заплатит и сколько получит в разных ситуациях (в зависимости от условий договора).

Вопрос о *безусловной* франшизе изначально является дискуссионным. С точки зрения страховщика ситуация более понятна: он пытается «дисциплинировать» своего клиента. Тот должен знать, что ущерб не будет полностью возмещен и потому постарается минимизировать возможность возникновения страхового случая. А что выигрывает клиент, кроме снижения взноса? Ясно, что снижение взноса здесь не играет определяющей роли, так как его размер значительно меньше, чем уменьшение выплаты при страховом случае. Если иск о возмещении ущерба все равно предъявляется, то какой смысл его уменьшать?! Возможно, имеет место демонстрация лояльности клиента своей СК. Не исключено, что это может отразиться на их сотрудничестве в других договорах. Однако такое обсуждение несколько выходит за рамки нашего исследования.

Интерес представляет предложение некоторых СК, работающих на московском рынке автострахования, существенно увеличить предел своей ответственности без увеличения взносов. Дело в том, что собираемых ими взносов с лихвой хватит для оплаты очень редко встречающихся больших ущербов. То есть их надежность не пострадает, финансовые показатели не ухудшатся. Практически, они ничем не рискуют. А выглядят в глазах своих клиентов весьма привлекательно. Более того, этим шагом в будущем создаются предпосылки для дальнейшего повышения тарифов, которое уже сегодня усиленно лоббируется. Для нас важно отметить, что этот шаг актуарно просчитан. Здесь и использована идея работы с урезанными распределениями.

**Замечание.** Классическая актуарная теория исходит из постоянства страхового портфеля. На практике СК к началу нового (финансового) года декларирует свои тарифы, рассчитанные на основе анализа портфеля предыдущего года. Однако изменение объема портфеля, даже при сохранении риска в каждом отдельном договоре, отражается на рисковой надбавке и следовательно, на тарифе в целом. Разумеется, может измениться и риск в одном договоре. Например, автомобиль несколько износился, но при этом водитель стал более опытным, общее количество автомобилей на дороге возросло, возможно, криминогенная обстановка изменилась и т. д. Возникает проблема прогнозирования риска и объема портфеля. Классическая (детерминированная) теория уступает место стохастической теории риска.

## Статистическое моделирование условного распределения ущерба при наступлении страхового случая

Чтобы избавиться от случайных потерь, страхователь передает свой риск страховой компании. В то время как для страхователя цена передачи такого риска детерминирована, риск компании случаен. Поэтому назначение премии за принимаемый риск является крайне сложным и учитывает большое число различных факторов: вероятность предъявления иска, его ожидаемую величину и отклонения, а также ситуацию, сложившуюся на рынке аналогичных страховых услуг и т. д. [Архипов, Гомелля (2002)], [Основы страховой деятельности (2002)], [Сплетухов, Дюжиков (2002)].

Элементарной составляющей риска страховщика является индивидуальный риск, порожденный одним договором страхования. Владея информацией об одном договоре, нельзя исследовать распределение риска. Но если страховая компания имеет дело с большой однородной группой договоров, можно рассматривать риск как случайную величину, используя предельные теоремы.

Основой исследования портфеля договоров для расчета тарифа является построение условного распределения ущерба в одном договоре при условии наступления страхового случая. Распределение строится на основании тех договоров, где ущерб уже произошел.

Для моделирования величины ущерба с учетом страховой практики и актуарных исследований в страховании [Салин, Абламская, Ковалев (1997)], [Дементьев (1999)], [Томилин (2000)] обычно используются следующие виды непрерывных распределений:

- равномерное,
- экспоненциальное,
- распределение Парето,
- гамма-распределение,
- нормальное,
- логарифмически нормальное (логнормальное).

Равномерное распределение редко применимо на практике, поскольку вероятности наступления ущербов разного размера различны. Нормальное распределение также малоприменимо для моделирования величины ущерба в одном договоре автотранспортного страхования, поскольку больше всего аварий приводят к мелкому ущербу, т. е. распределение ущерба в страховании автотранспорта не является симметричным.

В актуарной практике обычно применяются следующие асимметричные законы распределения для моделирования ущерба в одном договоре: экспоненциальное, распределение Парето, гамма-распределение и логнормальное. Поэтому в выполненном исследовании проанализирована аппроксимация с помощью именно этих законов распределения. Применение каждого из этих распределений имеет некоторые ограничения, например, для экспоненциального распределения должно выполняться равенство математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Все вышеперечисленные асимметричные распределения предполагают большое число небольших исков и возможность редких, но очень больших ущербов. Различие наблюдается в хвосте распределения: экспоненциальное распределение убывает быстрее всего, т. е. имеет самый «легкий» хвост. Это означает, что вероятность наступления крупного ущерба для экспоненциального распределения меньше, чем, например, для логнормального. Исследования в области автотранспортного страхования [Погорелова, Позняк, Тулинов (1995)], [Дементьев (1999)], [Томилин (2000)], [Лемер (2003 а, б)] показали, что наиболее адекватным для моделирования ущерба в этом виде страхования является логарифмически нормальное распределение.

Попытаемся аппроксимировать имеющиеся данные одной из московских страховых компаний об ущербах в договорах «автокаско» теоретическим законом распределения. Обозначим через $X_i$ размер ущерба в одном договоре при условии, что страховой случай $A$ произошел, т. е. $X_i|A$, и подберем модель, адекватно отражающую распределение $X|A$.

Результаты аппроксимации с помощью гамма-распределения, экспоненциального распределения и распределения Парето показали, что использование данных распределений для моделирования ущерба в портфеле «автокаско» является нецелесообразным, поскольку их применение обеспечивает уровень надежности ниже 9%. Наиболее адекватным оказалось логарифмически нормальное распределение, что не противоречит исследованиям, проводимым в области автотранспортного страхования (табл. 1).

*Таблица 1*

**Аппроксимация значений фактического условного ущерба по портфелю «автокаско» с помощью логарифмически нормального распределения**

| Верхняя граница интервала значений ущерба, тыс. руб. | $O_i$ | Cum $O_i$ | $O_i$ % | Cum $O_i$ % | $E_i$ | Cum $E_i$ | $E_i$ % | Cum $E_i$ % | $O_i - E_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ≤28,89 | 417 | 417 | 46,96 | 46,96 | 412,65 | 412,65 | 46,47 | 46,47 | 4,35 |
| 57,78 | 186 | 603 | 20,95 | 67,91 | 195,21 | 607,86 | 21,98 | 68,45 | –9,21 |
| 86,87 | 90 | 693 | 10,14 | 78,04 | 95,40 | 703,26 | 10,74 | 79,20 | –5,40 |
| 115,56 | 59 | 752 | 6,64 | 84,68 | 54,21 | 757,47 | 6,10 | 85,30 | 4,79 |
| 144,44 | 32 | 784 | 3,60 | 88,29 | 33,86 | 791,33 | 3,81 | 89,11 | –1,86 |
| 173,33 | 25 | 809 | 2,82 | 91,10 | 22,57 | 813,90 | 2,54 | 91,66 | 2,43 |
| 202,22 | 15 | 824 | 1,69 | 92,79 | 15,78 | 829,68 | 1,78 | 93,43 | –0,78 |
| 231,11 | 16 | 840 | 1,80 | 94,59 | 11,45 | 841,12 | 1,29 | 94,72 | 4,55 |
| 260,00 | 12 | 852 | 1,35 | 95,95 | 8,55 | 849,67 | 0,96 | 95,68 | 3,45 |
| 288,89 | 7 | 859 | 0,79 | 96,73 | 6,53 | 856,20 | 0,74 | 96,42 | 0,47 |
| 317,78 | 5 | 864 | 0,56 | 97,30 | 5,10 | 861,30 | 0,57 | 96,99 | –0,10 |
| 346,67 | 3 | 867 | 0,34 | 97,64 | 4,04 | 865,34 | 0,46 | 97,45 | –1,04 |
| 375,56 | 5 | 872 | 0,56 | 98,20 | 3,25 | 868,60 | 0,37 | 97,81 | 1,75 |
| 404,44 | 3 | 875 | 0,34 | 98,54 | 2,65 | 871,25 | 0,30 | 98,11 | 0,35 |
| 433,33 | 1 | 876 | 0,11 | 98,65 | 2,18 | 873,43 | 0,25 | 98,36 | –1,18 |
| 462,22 | 3 | 879 | 0,34 | 98,99 | 1,82 | 875,25 | 0,20 | 98,56 | 1,18 |
| 491,11 | 2 | 881 | 0,23 | 99,21 | 1,53 | 876,78 | 0,17 | 98,74 | 0,47 |
| 520,00 | 0 | 881 | 0,00 | 99,21 | 1,29 | 878,07 | 0,15 | 98,88 | –1,29 |
| 548,89 | 1 | 882 | 0,11 | 99,32 | 1,10 | 879,17 | 0,12 | 99,01 | –0,10 |
| 577,78 | 1 | 883 | 0,11 | 99,44 | 0,94 | 880,11 | | 99,11 | 0,06 |
| 606,87 | 1 | 884 | 0,11 | 99,55 | 0,81 | 880,93 | 0,09 | 99,20 | 0,19 |
| 635,56 | 2 | 886 | 0,23 | 99,77 | 0,71 | 881,63 | 0,08 | 99,28 | 1,29 |
| 664,44 | 1 | 887 | 0,11 | 99,89 | 0,62 | 882,25 | 0,07 | 99,35 | 0,38 |
| 693,33 | 0 | 887 | 0,00 | 99,89 | 0,54 | 882,79 | 0,06 | 99,41 | –0,54 |
| 722,22 | 1 | 888 | 0,11 | 100,00 | 0,48 | 883,27 | 0,05 | 99,47 | 0,52 |
| 751,11 | 0 | 888 | 0,00 | 100,00 | 0,42 | 883,69 | 0,05 | 99,51 | -0,42 |
| >751,11 | 0 | 888 | 0,00 | 100,00 | 4,31 | 888,00 | 0,49 | 100,00 | –4,31 |

В данной таблице приняты следующие обозначения, которые будут использоваться и в дальнейшем:

$O_i$ — эмпирические частоты,
*Cum* $O_i$ — накопленные эмпирические частоты,
$O_i$ % — процент эмпирических частот (частости),
*Cum* $O_i$ % — накопленные частости эмпирических частот,
$E_i$ — теоретические частоты,
*Cum* $E_i$ — накопленные теоретические частоты,
$E_i$ % — теоретические частости,
*Cum* $E_i$ % — накопленные частости теоретических частот.

Отобразим полученные результаты графически (рис. 1).

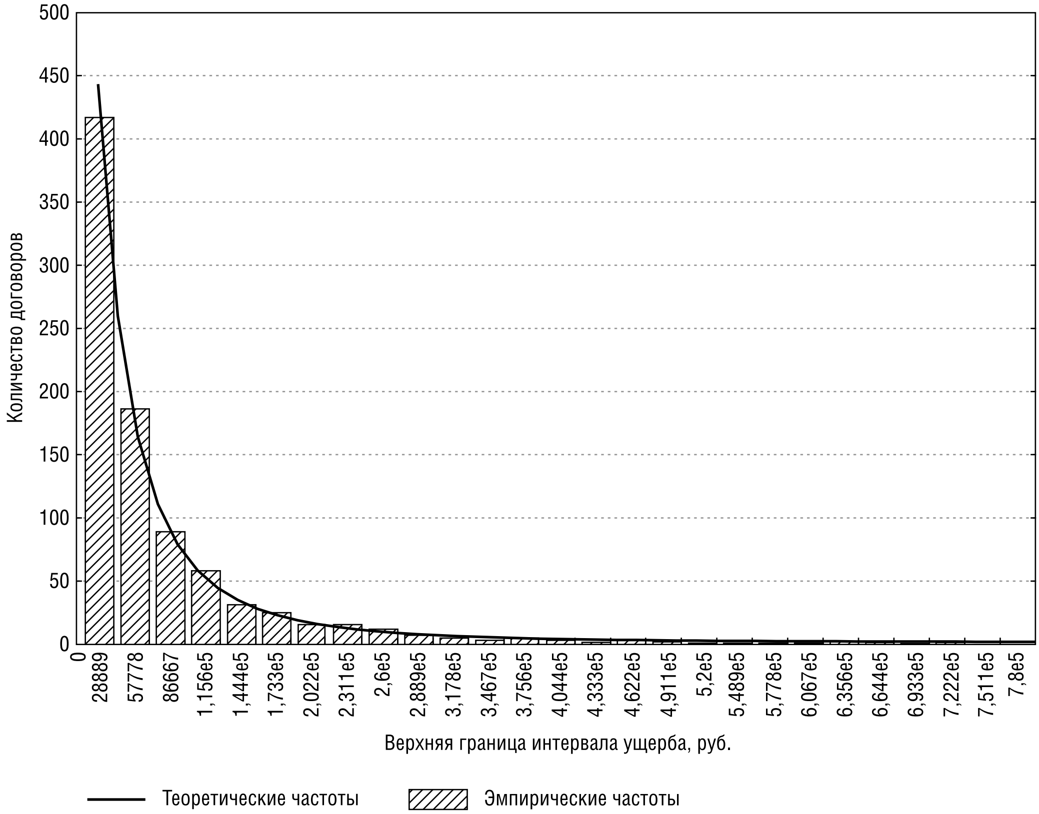


**Рис. 1**. Эмпирические и теоретические частоты логарифмически нормального распределения значений фактического ущерба

Приведенные таблица и рисунок иллюстрируют высокую степень надежности аппроксимации значений ущерба логнормальным законом распределения. Представление результатов аппроксимации условного ущерба в виде графиков имеет интерес для аналитических исследований, а в виде таблиц с числовыми значениями полезно для страховщиков-практиков.

На высокую степень надежности аппроксимации указывает и критерий согласия Пирсона, который принимает значение $\chi^2 = 6{,}3583$ с вероятностью (надежностью) $p = 1 - \alpha \approx 0{,}9$. Критерий Колмогорова-Смирнова $d = 0{,}0116$ также свидетельствует о высокой степени соответствия эмпирических данных теоретическому логнормальному распределению, поскольку его критическое значение $d(0{,}005; 888) \approx 0{,}07$ [Большев, Смирнов (1983)]; [Ликеш, Ляга (1985)].

Функция плотности полученного распределения имеет вид:

$$f(X_i|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1{,}22 \cdot (X_i|A)} e^{-\frac{[(\ln(X_i|A) - 10{,}38]^2}{2 \cdot 1{,}48}}. \qquad (1)$$

Так как логнормальное распределение является асимметричным, а дисперсия не является его непосредственным параметром, то чтобы найти вероятность того, что значение ущерба в одном договоре не превысит заданного значения, необходимо определить процентные точки распределения. Для этого перейдем к нормальному закону распределения значений логарифмов ущерба. Проанализируем график функции распределения логарифмов ущерба (рис. 2).

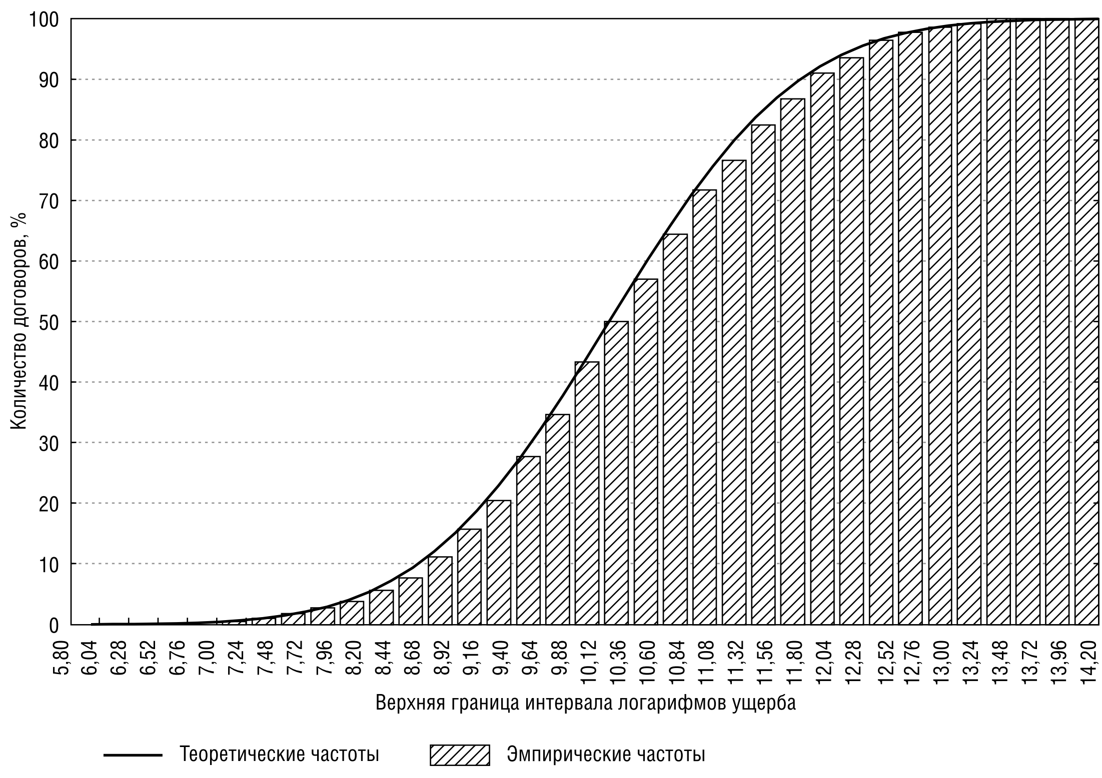


**Рис. 2.** Функция распределения значений логарифмов ущерба

График иллюстрирует высокое соответствие эмпирических и теоретических данных. Используя найденную функцию распределения, можно сказать, с какой вероятностью условный ущерб не превысит заданную величину. 50%-ая точка распределения (медиана) характеризует математическое ожидание ущерба. Рассчитаем процентные точки функции нормального распределения логарифмов ущерба для оценки вероятности, с которой ущерб $X_i|A$ в одном договоре не превысит заданную величину при условии, что страховой случай произошел (табл. 2).

*Таблица 2*

**Фрагмент таблицы процентных точек нормального распределения логарифмов ущерба и соответствующих им значений ущерба**

| Процентная точка | Логарифмы ущерба | Ущерб, тыс. руб. |
|---|---|---|
| 0,85 | 11,64 | 113,74 |
| 0,86 | 11,70 | 120,00 |
| 0,87 | 11,75 | 126,92 |
| 0,88 | 11,81 | 134,66 |
| 0,89 | 11,87 | 143,38 |
| 0,90 | 11,94 | 153,32 |
| 0,91 | 12,01 | 164,79 |
| 0,92 | 12,09 | 178,22 |
| 0,93 | 12,18 | 194,25 |
| 0,94 | 12,27 | 213,87 |
| 0,95 | 12,38 | 238,68 |
| 0,96 | 12,51 | 271,52 |
| 0,97 | 12,67 | 318,15 |
| 0,98 | 12,88 | 392,77 |
| 0,99 | 13,21 | 547,46 |

Из таблицы видно, что с вероятностью 90% значение логарифма ущерба не превысит 11,94, а с вероятностью 99% — не превысит 13,21. От логарифмов ущерба перейдем к значению самого ущерба путем обратного логарифмирования. Таким образом, значение самого ущерба в одном договоре не превысит 213,87 тыс. руб. с вероятностью 94%, а с вероятностью 99% значение ущерба не превысит 547,46 тыс. руб. Этот фрагмент представляет интерес при решении задач оценки потребности в резерве и целесообразности перестрахования.

Как было показано в первом разделе, ущерб в автотранспортном страховании зависит от множества факторов. Анализируемый портфель включает в себя различные автомобили по стоимости, новизне, техническим характеристикам, качествам водителя. Для адекватного назначения тарифа портфель исследуемых договоров должен быть качественно однороден. Конечно, даже двух совершенно одинаковых автомобилей (одинаковой стоимости, технических параметров и характеристик водителя) существовать не может. Поэтому разбиение большого портфеля договоров на более мелкие однородные субпортфели [Корнилов (2004)] не предполагает построения портфелей полностью одинаковых автомобилей.

Кроме того, необходимо учесть, что для получения адекватных результатов анализируемый портфель должен быть достаточно многочисленным, чтобы применение предельных теорем было возможным и обеспечивало приемлемо точные результаты. Страховщик, рассчитывая тариф, вынужден решать задачу — получить как можно более однородные субпортфели, которые были бы достаточно многочисленны.

Основной характеристикой анализируемого портфеля, которая делает его неоднородным и которую легко можно учесть, является наличие российских и иностранных автомобилей. Стоимость автомобиля является самой значимой характеристикой для разбиения портфеля на однородные субпортфели, а стоимость российских и иностранных автомобилей сильно различается [Дементьев (1999)], [Томилин (2001)]. Разобьем портфель «автокаско» на 2 субпортфеля, которые будем считать однородными, проанализировав величину ущерба в одном договоре для каждого субпортфеля; сравним результаты по отдельным субпортфелям с результатами, полученными для всего портфеля. В действительности, надо разбить весь портфель на большее число групп, например, по маркам автомобилей, а если возможно, по году выпуска, или по оценке износа; а также исходя из характеристик водителя. Но из-за ограниченности информации у нас построены только два субпортфеля.

Функции плотности для субпортфелей имеют вид:

- для иностранных автомобилей

$$f(X_i|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}24\cdot(X_i|A)}e^{-\frac{[(\ln(X_i|A)-10{,}51]^2}{2\cdot 1{,}52}}; \qquad (2)$$

- для российских автомобилей

$$f(X_i|A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}18\cdot(X_i|A)}e^{-\frac{[(\ln(X_i|A)-10{,}21]^2}{2\cdot 1{,}39}}. \qquad (3)$$

На графике (рис. 3) видно, что линия плотности распределения условного ущерба в одном договоре для иностранных автомобилей находится выше, чем для российских. Для иностранных автомобилей величина ущерба начинается с большей суммы. Мелкая авария для иностранного дорогого автомобиля приведет к более высокой величине ущерба из-за высокой стоимости запасных частей и ремонта. Для иностранных автомобилей плотность распределения ущерба задана на более длинном интервале, так как стоимость их выше и существует возможность возникновения ущерба сверх 500 тыс. руб., в то время как для российских автомобилей размер ущерба ограничен 470 тыс. руб.

Как и для всего портфеля, исследуем логарифм ущерба и найдем процентные точки распределения (рис. 4).

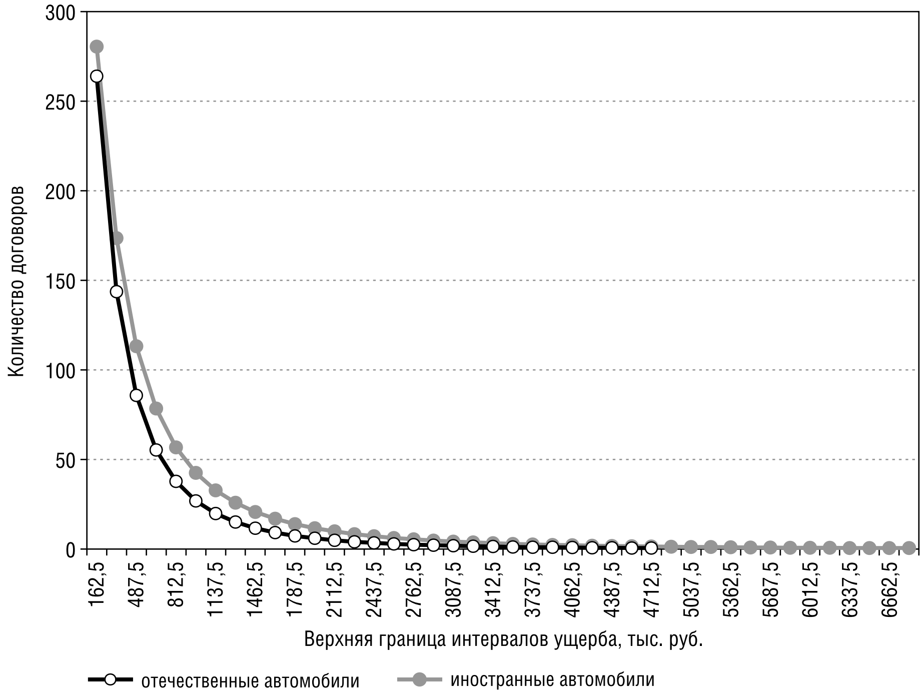


**Рис. 3.** Функция плотности логарифмически нормального распределения ущерба в одном договоре для субпортфелей российских и иностранных автомобилей

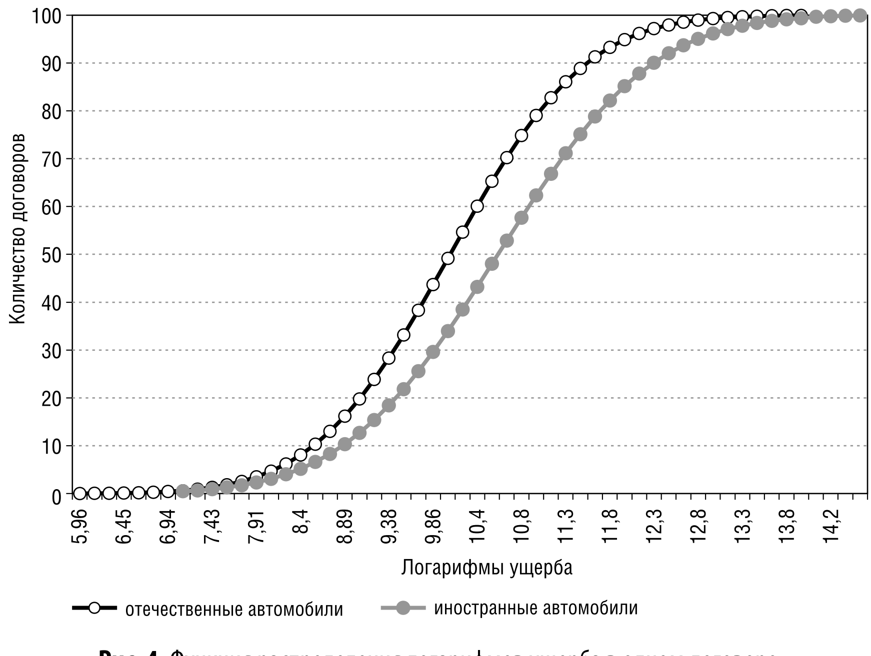


**Рис. 4.** Функция распределения логарифмов ущерба в одном договоре для субпортфелей отечественных и иностранных автомобилей

График распределения логарифмов ущерба в одном договоре для двух субпортфелей показывает, что величина ущерба для российских автомобилей начинается с меньшей суммы, нежели для иностранных, и заканчивается на меньшем значении. Также можно отметить, что значение, которое не превысит ущерб в одном договоре (при условии наступления страхового случая), ниже для отечественных автомобилей, чем для иностранных (с одинаковой вероятностью). Более подробно процентные точки распределения приведены в табл. 3.

*Таблица 3*

**Сравнение процентных точек распределения ущерба для всего портфеля и субпортфелей**

| Процентная точка | Ущерб, тыс. руб. | Ущерб для иностранных автомобилей, тыс. руб. | Ущерб для отечественных автомобилей, тыс. руб. |
|---|---|---|---|
| 0,85 | 113,74 | 132,14 | 92,26 |
| 0,86 | 120,00 | 139,50 | 97,15 |
| 0,87 | 126,92 | 147,66 | 102,57 |
| 0,88 | 134,66 | 156,80 | 108,61 |
| 0,89 | 143,38 | 167,11 | 115,40 |
| 0,90 | 153,32 | 178,86 | 123,12 |
| 0,91 | 164,79 | 192,42 | 132,00 |
| 0,92 | 178,22 | 208,33 | 142,39 |
| 0,93 | 194,25 | 227,35 | 154,74 |
| 0,94 | 213,87 | 250,64 | 169,82 |
| 0,95 | 238,68 | 280,14 | 188,82 |
| 0,96 | 271,52 | 319,26 | 213,86 |
| 0,97 | 318,15 | 374,92 | 249,26 |
| 0,98 | 392,77 | 464,20 | 305,53 |
| 0,99 | 547,46 | 650,02 | 421,12 |

По табл. видно, что ущерб, соответствующий одной и той же процентной точке условного распределения ущерба в одном договоре, для иностранных автомобилей — выше, а для отечественных автомобилей, наоборот, ниже, чем для всего портфеля. Например, с вероятностью 97% можно утверждать, что условный ущерб для субпортфеля иностранных автомобилей не превысит 374,92 тыс. руб., а для отечественных автомобилей 249,26 тыс. руб. Во всем портфеле этой процентной точке соответствует 318,15 тыс. руб. Таким образом, подтверждается целесообразность разбиения всего портфеля на 2 субпортфеля. Резонно предположить, что дальнейшее разбиение на однородные группы будет способствовать повышению адекватности полученных результатов.

Поскольку построенные распределения характеризуют распределение ущерба в одном страховом случае, но не учитывают число исков, предъявленных в каждом договоре, необходимо отдельно исследовать распределение количества страховых случаев в договоре. Причем с разбивкой на однородные субпортфели.

## Выводы

Выполненное статистическое исследование распределения величины ущерба при наступлении одного страхового случая опирается на предположение о логарифмически нормальном законе распределения исследуемой случайной величины. Вместе с тем, отмечена возможность аппроксимации эмпирических данных другими теоретическими законами распределения. Изложению особенностей выполнения исследования такой ситуации с иллюстрациями на реальных данных будет посвящена наша следующая статья. Еще одной проблемой является анализ распределения числа страховых случаев в одном договоре автотранспортного страхования. После решения этой задачи необходимо исследовать распределение величины ущерба в одном договоре. Заключительным этапом выполненного исследования является решение собственно актуарных задач — оценка распределения величины ущерба во всем портфеле, нахождение рисковой премии и рисковой надбавки, нетто-премии и брутто-премии, определение потребности в резерве и перестраховании. Все перечисленные задачи успешно решены. Соответствующие результаты будут опубликованы.

## Литература

*Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. Изд. 2. Т. 1. М.: Юнити, 2001.

*Архипов А. П., Гомелля В. Б.* Основы страхового дела. Учеб. пособие. М.: «Маркет ДС», 2002.

*Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

*Голубин А. Ю.* Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация. М.: «Анкил», 2003.

*Дементьев В.* Анализ современного рынка автострахования в России // *Страховое дело*, сентябрь 1999.

*Корнилов И. А.* Основы страховой математики. Учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

*Лемер Ж.* Автомобильное страхование. Актуарные модели. М.: Янус-К, 2003.

*Лемер Ж.* Системы бонус-малус в автомобильном страховании. М.: Янус-К, 2003.

*Ликеш И., Ляга Й.* Основные таблицы математической статистики. М.: Финансы и статистика, 1985.

*Мак Т.* Математика рискового страхования. М.: Олимп-Бизнес, 2005.

Основы страховой деятельности. Учебник / Отв. ред. профессор Т.А. Федорова. М.: БЕК, 2002.

*Салин В. Н., Абламская Л. В., Ковалев О. Н.* Математико-экономическая методология анализа рисковых видов страхования. М.: «Анкил», 1997.

*Сплетухов Ю. А., Дюжиков Е.Ф.* Страхование: Учебное пособие. М.: Инфра-М, 2002.

*Погорелова Е. В., Позняк А. Г., Тулинов В. В. и др.* Страхование автотранспортных рисков. Учебное пособие. М.: Финансы, 1995.

*Томилин В. Н.* Транспортное страхование в России и странах Балтии. М.: «Анкил», 2000.

*Фалин Г. И.* Математический анализ рисков в страховании. М.: Российский юридический издательский дом, 1994.

*Штрауб Э.* Актуарная математика имущественного страхования. М.: КРОКУС, 1995.