О. Л. Крицкий, Е. С. Лисок

Асимптотическое оценивание коэффициентов модели стохастической волатильности

В статье рассматривается метод оценивания коэффициентов модели стохастической волатильности без ограничения временного диапазона. Найденные зависимости позволяют свести задачу нахождения решения системы стохастических дифференциальных уравнений к отысканию аналитического решения асимптотического уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Разработанный алгоритм применяется к анализу средневзвешенных дневных котировок акций Газпрома на ММВБ и индексного опциона SPX.

1. Введение

В последнее десятилетие отмечается значительный рост числа исследований, связанных с изучением поведения сложных экономических систем и флуктуаций финансовых рынков [Hull (2003)], [Benth (2002)]. Одним из способов такого изучения является непосредственный анализ высокочастотных эмпирических данных с использованием теории случайных процессов, примененной к ценовым приращениям:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — исходный стохастический процесс, Δt — временной лаг.

Определение статистических свойств приращений в (1) и имитационное моделирование их будущего поведения является центральной задачей в динамике финансовых рынков. Для ее решения предложена теоретическая модель стохастической волатильности (SV) [Ser-Huang Poon (2005)], включая частные случаи: модель Хестона [Heston (1993)], Хала-Уайта [Hull, White (1987)], диффузии со скачками [Merton (1976)], а также их вариации. В общем виде модель стохастической волатильности можно представить следующим образом:

$$dx = \mu(x,t)\,xdt + \sigma(x,\sigma,t)xdW_1,\; d\sigma = g(x,\sigma,t)dt + q(x,\sigma,t)dW_2, \tag{2}$$

где $x = x(t)$ — исходный стохастический процесс,

μ — коэффициент дрейфа,

σ — коэффициент диффузии, или волатильность,

g, q — некоторые непрерывные функции,

dW_i — приращения винеровских процессов (нормальные случайные величины с нулевым средним, дисперсией $\overline{[dW_i]^2} = dt$)[1], $i = 1, 2$, с корреляцией $\rho dt = \overline{dW_1 dW_2}$, $t \in [t_0, T]$.

Тем не менее, детерминация и нахождение функциональной зависимости коэффициентов, формирующих каждый из вышеперечисленных методов, является задачей актуальной,

[1] Здесь и далее чертой сверху будем обозначать математическое ожидание.

так как ни одна из известных моделей не описывает действительного поведения рынка, а учитывает только конечный набор его характеристик.

Среди немногочисленных исследований в области оценивания параметров эконометрических моделей выделим работу Томети и Вортмана [Tomety, Worthmann (2004)], в которой коэффициенты модели стохастической волатильности определяются эвристически.

Стоит отметить, что определенные перебором коэффициенты модели, во-первых, могут привести к быстрому возрастанию погрешности модели [Холопова, Крицкий (2006)] при дальнейшем использовании, например, при численной реализации, во-вторых, они постоянны, что является допущением математической модели и не соответствует действительности.

Наряду с эвристическими развивались и алгоритмы статистического оценивания параметров, с помощью метода максимального правдоподобия и его модификаций (квазимаксимальное правдоподобие [Shepherd, Harvey (1996)], псевдо-максимальное правдоподобие [Fiorentini et al. (2002)]). Основной идеей такого подхода является фиксирование функции распределения цен S и волатильностей σ в SV-модели с дальнейшей максимизацией функции правдоподобия и решением нелинейной системы относительно искомых параметров. В то же время выбор такой функции распределения является сложной задачей, не имеющей единственного решения. Кроме того, при использовании метода максимального правдоподобия, предположение о независимости котировок цен акций является существенным, что не справедливо для финансовых рынков [McNeil et al. (2005)]. Поэтому совместную многомерную функцию распределения следует рассматривать относительно всех выборочных данных, что, очевидно, является препятствием для применения алгоритма в случае обработки тиковых данных, эффективная размерность массивов которых превосходит десятки и сотни тысяч значений.

Следующим шагом в исследованиях, помимо оценки параметров модели SV, стала попытка нахождения аналитического решения для плотности вероятностей приращений цен финансовых активов. Так, в работе Драгулеску и Яковенко [Dragulescu, Yakovenko (2002)], на основе эвристически детерминированной модели Хестона было получено замкнутое аналитическое выражение для плотности вероятности логарифмических приращений стоимости активов. Алгоритм был применен к индексам Dow-Jones, Nasdaq, S&P 500 и нескольким акциям. На основе этого метода в работе Бухбиндера и Чистилина [Бухбиндер, Чистилин (2005, № 10)] исследована возможность применения модели Хестона к российскому фондовому рынку. Во всех случаях параметры моделей определялись путем подгонки теоретических кривых под эмпирические распределения и задавались постоянными величинами. Аналогичным образом проведены и иные исследования [Vicente at al. (2004)], где находится аналитический вид плотности вероятности логарифмических доходностей. При этом вопрос оценки параметров не рассматривается.

Усложнению алгоритмов оценивания параметров модели мешает трудоемкость нахождения численного или аналитического решения системы уравнений в частных производных второго порядка, к которой сводится исходная система.

Все это обусловило необходимость развития асимптотических методов оценивания, позволяющих не только определить параметры стохастических дифференциальных уравнений SV-модели, но и найти их аналитическое решение. Кроме того, подобные методы позволяют получить выражение для плотности вероятностей приращений стоимости рисковых активов.

В одной из первых публикаций по теме [Бухбиндер, Чистилин (2005, № 2)] ценовые приращения (1) для котировок акций РАО ЕЭС рассматриваются как марковский случайный процесс. Из эмпирических данных определяются коэффициенты дрейфа и диффузии уравнения Фоккера-Планка, аппроксимированные линейной и квадратичной зависимостью относительно соответствующего вероятностного распределения, которое подчиняется либо степенному, либо нормальному закону распределения.

В то же время стоит отметить, что найденная аппроксимация параметров модели, во-первых, является всего лишь частным случаем полиномиальной зависимости, и, во-вторых, приводит к первому уравнению в (2), где коэффициенты дрейфа и диффузии, вычисленные относительно логарифмических приращений, являются константами.

В настоящей работе вместо подгонки теоретической модели к эмпирическим данным проводится асимптотическое оценивание и нахождение функциональной зависимости коэффициентов μ, σ, p, q модели стохастической волатильности вида:

$$d(\Delta x) = \mu(\Delta x, t)\,dt + \Delta\sigma(\Delta x, \Delta\sigma, t)dW_1,\ d(\Delta\sigma) = g(\Delta x, \Delta\sigma, t)dt + q(\Delta x, \Delta\sigma, t)dW_2, \tag{3}$$

где Δx — ценовые приращения, удовлетворяющие (1),

μ — коэффициент дрейфа,

$\Delta\sigma = \sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)$— приращения волатильности,

g, q — некоторые непрерывные функции,

dW_i — приращения винеровских процессов, $i = 1, 2$, с корреляцией $\rho dt = \overline{dW_1 dW_2}$, $t \in [t_0, T]$.

Определенные таким образом параметры используются для нахождения асимптотического аналитического решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК).

Разработанный алгоритм применяется к анализу средневзвешенных дневных котировок акций Газпрома на ММВБ и опциона SPX на американский индекс Standard&Poor's 500.

2. Общие положения

Пусть h_i, $i = 0, 1, \ldots$ — временной ряд, являющийся дискретной реализацией некоторого непрерывного случайного процесса $x(t)$, вычисленного в моменты времени t_i:

$$x(t_i) = h_i.$$

Кроме того, пусть имеются ценовые приращения $\Delta x(t_i) = \Delta x_i$, заданные с лагами Δt_i и удовлетворяющие (3).

Как известно [Бухбиндер, Чистилин (2005)], стохастический процесс $x(t)$ полностью определяется бесконечным набором совместных плотностей $p_N(\Delta x_0, \Delta t_0; \ldots; \Delta x_N, \Delta t_N)$, зависящих от N переменных, $N \to \infty$. В случае марковских процессов или процессов без памяти p_N распадается в произведение условных плотностей $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i)$ реализации Δx_{i+1} за время Δt_{i+1}, если Δx_i произошло за время Δt_i:

$$p_N(\Delta x_0, \Delta t_0; \ldots; \Delta x_N, \Delta t_N) = p(\Delta x_0, \Delta t_0) \cdot \prod_{i=0}^{N-1} p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i). \tag{4}$$

Заметим, что выражение (4) справедливо лишь в случае, когда все Δx_i независимы друг от друга. Однако статистический анализ эмпирических данных показывает наличие ненулевой автокорреляции временного ряда h_i [Benth (2002)], т. е. Δx_i, как правило, зависимы. В то же время, если $\Delta x(t)$ — марковский случайный процесс, то безусловная плотность $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1}, \Delta x_i, \Delta t_i)$ легко определяется через условную:

$$p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1}, \Delta x_i, \Delta t_i) = p(\Delta x_i, \Delta t_i)\, p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} \mid \Delta x_i, \Delta t_i), \qquad (5)$$

где $p(\Delta x_i, \Delta t_i)$ — одномерная функция плотности распределения случайной величины Δx_i, $i = 1, \ldots, N$, определенной (1) при фиксированном лаге Δt_i.

Например, для двух ценовых приращений Δx_1 и Δx_2, вычисленных с лагами Δt_1, Δt_2, $\Delta t_1 < \Delta t_2$, в одинаковые моменты времени t, выражение (5) будет иметь вид:

$$p(\Delta x_2, \Delta t_2; \Delta x_1, \Delta t_1) = p(\Delta x_1, \Delta t_1) p(\Delta x_2, \Delta t_2 \mid \Delta x_1, \Delta t_1).$$

Зная $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} \mid \Delta x_i, \Delta t_i)$ и $p(\Delta x_i, \Delta t_i)$, $i = 1, \ldots, N$ при $\Delta t_i, \Delta t_{i+1} \to \infty$, первое уравнение в (3) можно записать в виде уравнения ФПК [Hull, White (1987)]:

$$\frac{d}{d\tau} p(\Delta x, \tau) = \left[-\frac{\partial}{\partial(\Delta x)} D_1(\Delta x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial(\Delta x)^2} D_2(\Delta x, \tau) \right] p(\Delta x, \tau), \qquad (6)$$

где $\tau = T / \Delta t, t \in [t_0, T]$, $D_1(\Delta x, \tau)$ и $D_2(\Delta x, \tau)$ — коэффициенты дрейфа и волатильности приращений цен модели (3), определяемые как моменты условного распределения $p(\Delta s, \tau + \Delta\tau \mid \Delta x, \tau)$:

$$D_k(\Delta x, \tau) = \frac{1}{k!} \lim_{\Delta\tau \to 0} M^{(k)}, \qquad (7)$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Omega} (\Delta s - \Delta x)^k p(\Delta s, \tau + \Delta\tau \mid \Delta x, \tau) d(\Delta s), \qquad (8)$$

где $k = 1, 2$,

Ω — область изменения $\Delta x(t)$.

Численное интегрирование в уравнении (8) может проводиться любой квадратурной формулой повышенного порядка точности, например, методом Симпсона [Демидович, Марон (1960)]. Кроме того, следует отметить, что с переходом к пределу (7) при $\Delta\tau \to 0$ уменьшается количество исходных данных, выбираемых для анализа, и рассчитываемые коэффициенты $D_1(\Delta x, \tau)$ и $D_2(\Delta x, \tau)$ флуктуируют. Поэтому требуется выбирать такие $\Delta\tau$, чтобы они были малы относительно времени T, но, тем не менее, сравнимы с минимальным временем между сделками. Например, в данной работе использовались значения $\Delta\tau = 2, 4, 8, 16$ мин.

Второе уравнение из (3) аналогичным образом приводится к виду (6) при замене Δx на $\Delta\sigma$ и коэффициентами дрейфа $D_3(\Delta\sigma, \tau)$ и волатильности $D_4(\Delta\sigma, \tau)$ для приращений волатильности:

$$D_k(\Delta\sigma, \tau) = \frac{1}{k!} \lim_{\Delta\sigma \to 0} M^{(k-2)}, \qquad (7')$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{\tau} \int_{\Theta} (\Delta z - \Delta\sigma)^{k-2} J(\Delta z, \tau + \Delta\tau \mid \Delta\sigma, \tau) d(\Delta z), \qquad (8')$$

где $J(\Delta z, \tau + \Delta\tau \mid \Delta\sigma, \tau)$ — соответствующее условное распределение,

$k = 3, 4$,

Θ — область изменения $\Delta\sigma(\tau)$.

Полученные массивы значений коэффициентов $D_1(\Delta x,\tau)$, $D_2(\Delta x,\tau)$, $D_3(\Delta\sigma,\tau)$ и $D_4(\Delta\sigma,\tau)$ при фиксированных $\Delta x_i,\tau_i$ используются для нахождения аппроксимации и выявления функциональной зависимости относительно Δx и τ. При этом может быть осуществлено полиномиальное приближение по Δx, взятое в форме нелинейной полиномиальной регрессии:

$$D_k = \sum_{i=0}^{n} a_i(\Delta x)^i,\ k = 1,2,$$

$$D_k = \sum_{i=0}^{n} b_i(\Delta\sigma)^i,\ k = 3,4,$$

где a_i, b_i — коэффициенты регрессионных моделей, оценка которых осуществляется с помощью метода наименьших квадратов [Айвазян, Мхитарян (2001)], для чего должна быть сделана предварительная трансформация нелинейного уравнения в линейное путем замены переменного вида $(\Delta x)^n = \Delta X_n$ и $(\Delta\sigma)^n = \Delta\tilde{\sigma}_n$.

Пусть найдены оценки $D_1(\Delta x,\tau)$ и $D_2(\Delta x,\tau)$, которые в общем случае являются полиномами $P_1(\Delta x)$ и $P_2(\Delta x)$ степеней m и n соответственно. Подставляем их в уравнение ФПК (6). Тогда, если

$$m \geq n, \tag{9}$$

то решение уравнения ФПК при $t \to \infty$ выходит на стационарное решение обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta x}\left(P_1(\Delta x)p(\Delta x,\tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Delta x}P_2(\Delta x)p(\Delta x,\tau)\right) = 0,$$

которое имеет вид:

$$p(\Delta x,\tau) = \frac{C}{P_2(\Delta x)}\exp\left\{-\int\frac{P_1(\Delta x)}{P_2(\Delta x)}d\Delta x\right\}, \tag{10}$$

где C — константа, определяемая из эталонного условия:

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta x,\tau)d\Delta x = 1.$$

Уравнение (10) описывает асимптотическое поведение плотности распределения случайного процесса Δx, или поведение хвостов плотности распределения.

Следует отметить, что при решении системы уравнений (3) можно оценить только три параметра: $D_1(\Delta x,\tau)$, $D_3(\Delta\sigma,\tau)$ и $D_4(\Delta\sigma,\tau)$. В качестве $D_2(\Delta x,\tau)$ тогда может быть использовано решение второго уравнения из (3) $\sigma(D_3(\Delta\sigma,\tau), D_4(\Delta\sigma,\tau))$.

Аналогичную процедуру асимптотического оценивания коэффициентов модели и нахождения решения уравнения ФПК для соответствующей плотности вероятностей можно проводить и для самих цен $x(t) = x$ и их волатильности σ, описываемых классической моделью стохастической волатильности (2).

Следует отметить, что предложенный алгоритм оценки параметров модели в виде полиномиальной зависимости, дает единственное решение уравнения ФПК [Тихонов, Самарский (1977)] и не ограничивает выбор вероятностного закона распределения.

3. Анализ эмпирических данных

Предложенный метод оценивания параметров был применен для нахождения функциональной зависимости коэффициентов моделей (2) и (3) для следующего набора данных. Были использованы тиковые ежеминутные данные: 4632 значений рублевых цен акций ОАО Газпром на ММВБ за период с 23 января по 13 июня 2006 года (данные предоставлены компанией РБК, http://export.rbc.ru), а также ежедневные котировки — 6368 значений индексного опциона SPX на американский индекс Standard&Poor's 500 с 1 января 1980 года по 31 мая 2004-го (данные предоставлены компанией Chicago Board of Option Exchange, CBOE; http://www.cboe.com). Оценивание осуществлялось как для цен и волатильностей, так и для их приращений при временных лагах $\Delta\tau = 2,4,8,16$ мин. (дней) и лагом при расчете волатильности $\Delta t = 5$. Динамика этих финансовых временных рядов представлена на рис. 1 и 2.

Отметим, что котировки акций Газпрома на ММВБ обладают следующими параметрами: среднее — 254,77 руб., стандартное отклонение — 36,5 руб., коэффициент асимметрии — 0,79, куртосис (эксцесс) — 2,44. Соответственно для индексного опциона SPX: среднее — 527,28 долл., стандартное отклонение — 397,06 долл., коэффициент асимметрии — 0,82, куртосис (эксцесс) — (–0,68).

Для того чтобы оценить коэффициенты в моделях стохастической волатильности (2) и (3) по статистическим данным были рассчитаны эмпирические одномерные и двумерные безусловные и условные функции распределения для приращений стоимостей финансовых активов. Затем с помощью формул (7)–(8) и (7′)–(8′) были получены массивы значений коэффициентов дрейфа и диффузии $D_1(\Delta x,\tau)$, $D_2(\Delta x,\tau)$, $D_3(\Delta\sigma,\tau)$ и $D_4(\Delta\sigma,\tau)$. Далее при условии выполнения соотношения (9) для этих оценок были найдены функциональные зависимости в виде полиномиальной регрессии. Степень полинома выбиралась из минимума относительной погрешности, но искусственно ограничивалась, если принимала слишком высокие значения. Полиномиальная регрессия трансформировалась в линейную, причем коэффициенты последней определялись с помощью МНК.

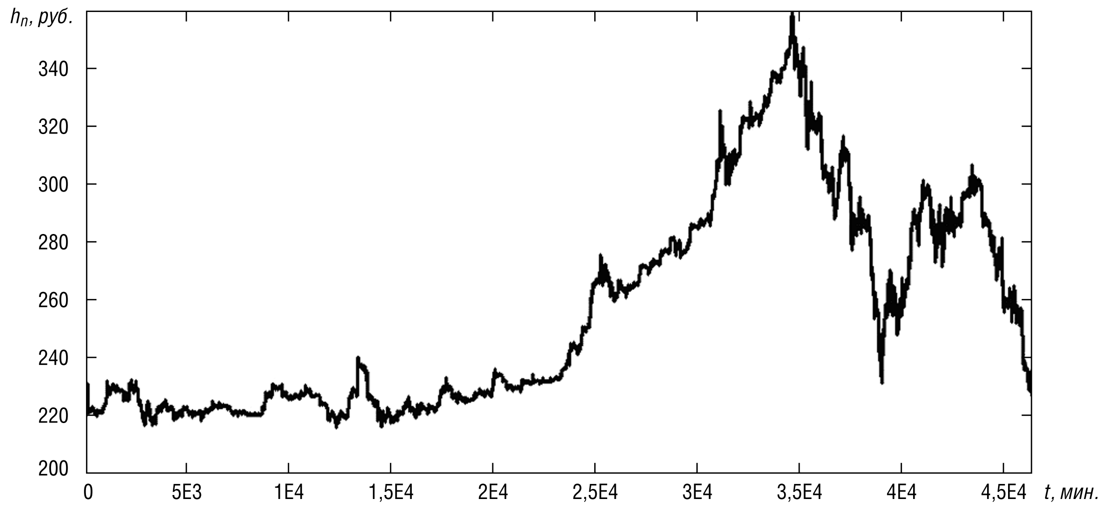

Рис. 1. Динамика рублевых цен акций ОАО Газпром на ММВБ

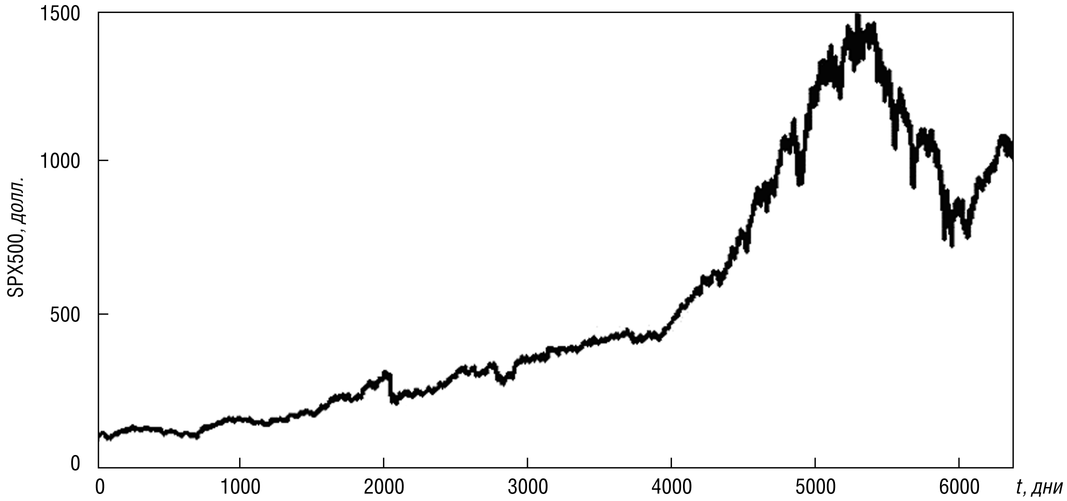

Рис. 2. Динамика индексного опциона SPX на американский индекс Standard&Poor's 500

Проведенные в соответствии с предлагаемым методом вычисления показали, что функциональные зависимости наиболее точно задаются полиномами 6–9 степени. Коэффициенты множественной регрессии для полученных приближений приняли значения в диапазоне 0,85–0,99. Их графический вид представлен на рис. 3–6.

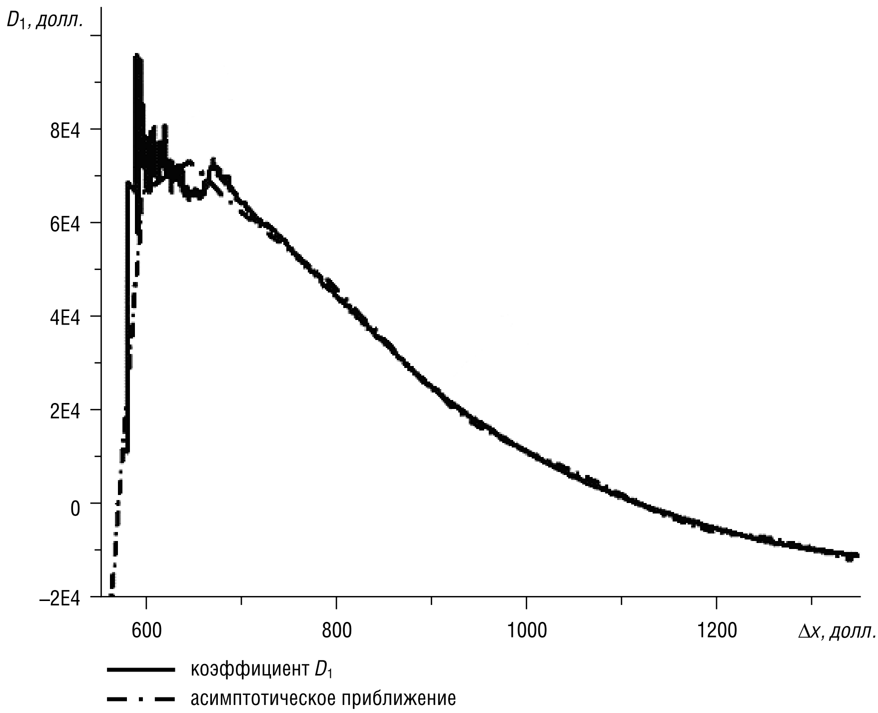

Рис. 3. Зависимость коэффициента D_1 от Δx для приращений индексного опциона SPX

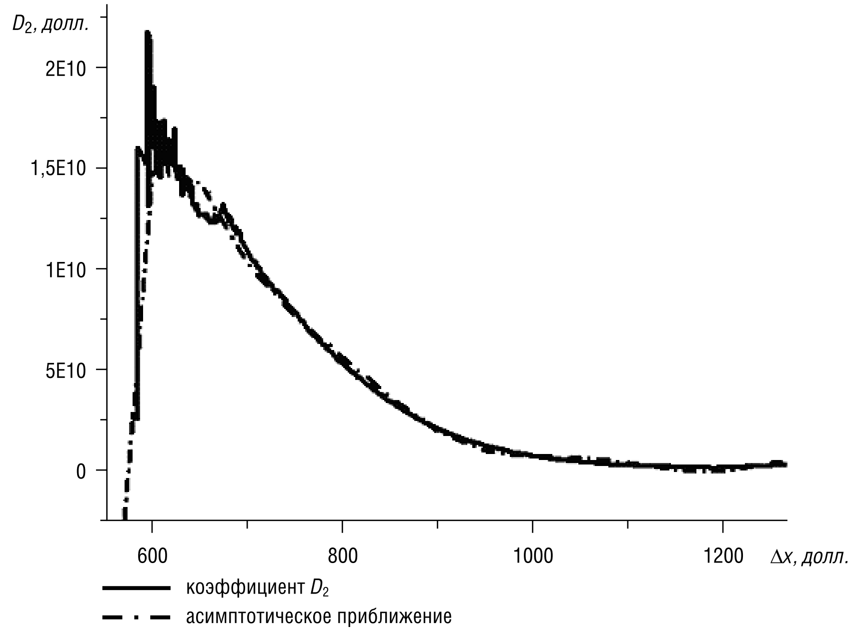

Рис. 4. Зависимость коэффициента D_2 от Δx для приращений SPX

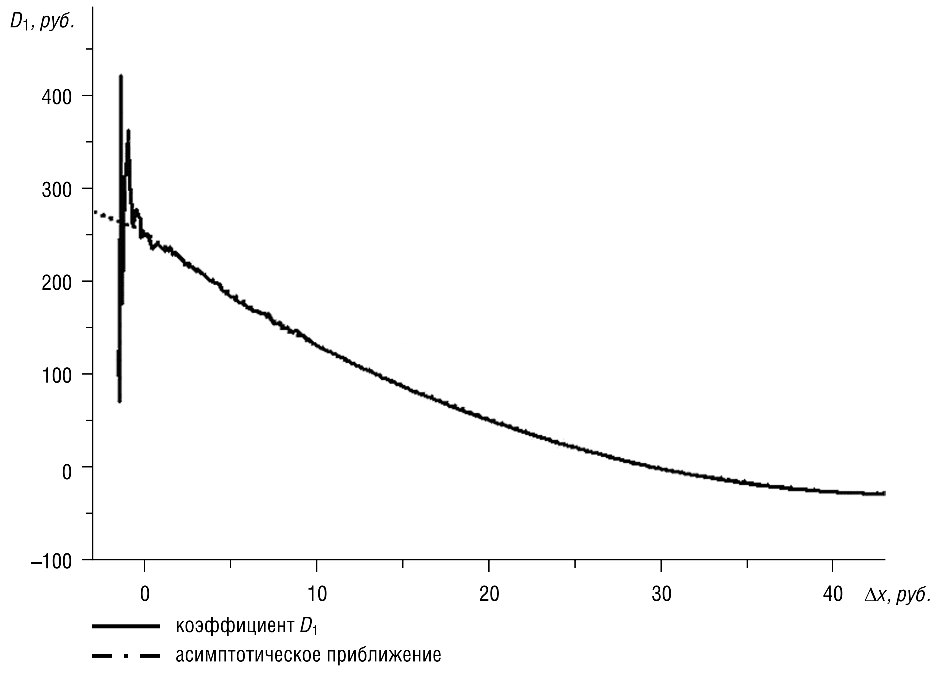

Рис. 5. Зависимость коэффициента D_1 от Δx
для приращений акций ОАО Газпром на ММВБ

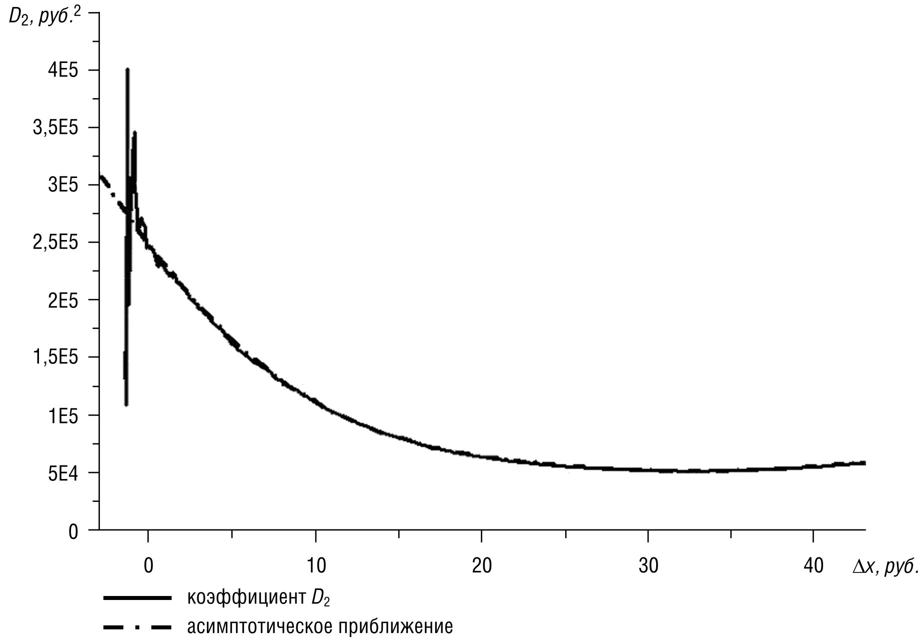

Рис. 6. Зависимость коэффициента D_2 от Δx для приращений акций Газпрома

Отметим также, что коэффициенты и дрейфа, и волатильности стремятся к некоторому постоянному значению при $t \to \infty$, свидетельствуя о том, что волатильность и дрейф со временем стремятся к постоянному уровню, а вероятность экстремально больших скачков их значений стремится к нулю.

Таким образом, данные торгового дня и ежедневных котировок имеют схожее асимптотическое поведение, что свидетельствует о возможности применения метода к различным типам данных и различным рисковым активам как на российском, так и на мировом фондовых рынках. Кроме того, адекватность предложенного метода оценивания параметров моделей (2) и (3) следует из однозначности решения уравнения ФПК.

4. Заключение

Проведено асимптотическое оценивание коэффициентов модели стохастической волатильности, для чего аналитически решается уравнение ФПК (6) с численно определенными коэффициентами (7)–(8) относительно приращений цен и волатильностей, а в дальнейшем и самих цен. Для нахождения функциональной зависимости параметров модели к ним применяется нелинейная полиномиальная регрессия, и находится их полиномиальная аппроксимация.

Как известно, наибольшим ценовым колебаниям на финансовом рынке подвержены внутридневные (intraday) котировки рисковых активов, что связано с постоянно меняющимся информационным полем и большим числом участвующих в торгах покупателей и продавцов, действующих согласно разработанным ими стратегиям. Построенный алгоритм позволяет описать поведение ценовых приращений и их волатильностей для тиковых данных, зафиксированных в течение торговых сессий.

Предложенный метод оценивания параметров и нахождения функциональной зависимости коэффициентов модели стохастической волатильности для решения асимптотического уравнения ФПК был применен к анализу котировок акций Газпрома на ММВБ и опциона SPX на американский индекс Standard&Poor's 500. Показана высокая точность вычислений, позволяющая адекватно прогнозировать поведение рисковых активов при долгосрочном инвестировании.

Список литературы

Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. М.: Юнити–Дана. 2001. Т. 2.

Бухбиндер Г. Л., Чистилин К. М. Стохастическая динамика котировок акций РАО ЕЭС // *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17. № 2. С. 119–125.

Бухбиндер Г. Л., Чистилин К. М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17. № 10. С. 31–38.

Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Гос. изд-во физ.- мат. литературы, 1960.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

Холопова Е. С., Крицкий О. Л. Имитационное моделирование цены индексного опциона методом стохастической волатильности // *Труды III Международной конференции студентов и молодых ученых «Перспективы развития фундаментальных наук»*. Томск, 2006. 16–19 мая. С. 194–197.

Benth F. E. Option Theory with Stochastic Analysis // *An Introduction to Mathematical Finance*. Springer Verlag, 2002.

Dragulescu A. A., Yakovenko V. M. Probability distribution of returns in the Heston model with Stochastic volatility // *Quantitative Fina*nce. 2002. V. 2. P. 443–453.

Fiorentini G., Leon A., Rubio G. Estimation and empirical performance of Heston's stochastic volatility model: the case of a thinly traded market // *Journal of Empirical Finance*. 2002. V. 9. P. 225–255.

Heston S. L. A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency option // *Rev. Financial Studies*. 1993. V. 6. P. 327–343.

Hull J. Options, Futures, and Other Derivatives / Prentice-Hall, Saddle River. New Jersey, 2003.

Hull J., White A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility Models // *Journal of Finance*. 1987. V. 42. P. 281–300.

McNeil A. J., Frey R., Embrechts P., Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools / Princeton: Princeton University Press, 2005. № 6.

Merton R. C. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous // *Journal of Financial Economics*. 1976. V. 3. P. 125–144.

Ser-Huang Poon. A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility / John Wiley & Sons. Chichester, England. 2005.

Shepherd N., Harvey A. An assessing of stochastic volatility model coefficients // *Journal of Business and Econ stat*. 1996. V. 14. P. 429–434.

Tomety F. E., Worthmann K. Monte-Carlo Method und stochastic Differentialgleichungen / Preprint, 2004. 16 Juny.

Vicente R. et al. Common Underlying Dynamics in an Emerging Market: From Minutes to Months. arXiv:cond-mat/0402185. V. 1. 2004. 6 Feb. P. 11.