№ 3(11) 2008

В. А. Колемаев

Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики[1]

С помощью принципа максимума Понтрягина найдено оптимальное динамическое правило распределения трудовых, инвестиционных и материальных ресурсов между секторами открытой трехсекторной экономики по критерию максимума дисконтированного удельного непроизводственного потребления.

Трехсекторная модель экономики [Колемаев (1997)], [Колемаев (1998, 2002, 2005)] является обобщением замкнутой односекторной модели Солоу [Solow (1956)] в части учета макроэкономической структуры и внешних связей. Согласно этой модели *материальный* (нулевой) сектор производит предметы труда (сырье, энергоресурсы, полуфабрикаты и другие расходуемые материалы), *фондосоздающий* (первый) — средства труда (здания, сооружения, машины, оборудование, силовые устройства и другие инвестиционные товары производственного назначения), *потребительский* (второй) — предметы потребления.

Технологический уклад считается неизменным и заданным с помощью линейно-однородных неоклассических производственных функций секторов

$$X_i = F_i(K_i, L_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

где X_i, K_i, L_i — выпуск в сопоставимых ценах, физический капитал и число занятых в i-м секторе.

Аналогично модели Солоу предполагается, что время меняется непрерывно, лаг капиталовложений равен нулю, коэффициенты износа физического капитала секторов и темпа прироста числа занятых постоянны. Кроме того, предполагается, что коэффициенты износа одинаковы, а коэффициент квотирования импорта инвестиционных товаров и соотношение мировых цен на материалы и инвестиционные товары постоянны.

После создания односекторной модели экономического роста [Solow (1956)] Фелпс в работе [Phelps (1966)] нашел оптимальное правило экономического роста для этой модели, а Удзава в работе [Uzawa (1964)] установил такое правило для двухсекторной модели.

В настоящей статье найдено *оптимальное правило динамического распределения трудовых и инвестиционных ресурсов в открытой трехсекторной модели*. Ранее такое правило было найдено в 2002 году для замкнутой трехсекторной модели (см. Приложение 4 в [Колемаев (1998, 2002, 2005)]) в предположении равенства долей распределения трудовых и инвестиционных ресурсов, а в 2005 году и без такого предположения (см. Приложение 3 в [Колемаев (2005)]).

[1] Исследование выполнено при поддержке грантов: РГНФ 08-02-00057а, РФФИ 07-06-12023 ОФИ.

1. Используемое в исследовании подмножество открытой трехсекторной модели

Приведем применяемое для исследования подмножество открытой трехсекторной модели экономики (полностью модель приведена в [Колемаев (2005)]). Это подмножество представлено в относительных показателях, и в нем используются следующие обозначения:

ν — темп роста числа занятых (из предположения его постоянства следует, как и в модели Солоу, что $L = L(t) = L(0)e^{\nu t}$);

$\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — доля i-го сектора в распределении трудовых ресурсов;

s_i — доля i-го сектора в распределении инвестиционных ресурсов;

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — фондовооруженность i-го сектора;

$\dfrac{X_i}{L_i} = F_i(k_i, 1) = f_i(k_i)$ — отраслевая производительность труда i-го сектора;

$y_1 = \dfrac{Y_1}{L}$ — удельный импорт инвестиционных товаров;

$y_2 = \dfrac{Y_2}{L}$ — удельный импорт потребительских товаров;

γ_1 — коэффициент квотирования импорта инвестиционных товаров;

z_0 — удельный экспорт материалов;

q_0 — мировая цена экспортируемых материалов;

q_1^+, q_2^+ — мировые цены импортируемых инвестиционных и потребительских товаров;

a_i — прямые затраты материалов на единицу выпуска i-го сектора;

μ — коэффициент износа физического капитала (одинаков для всех секторов);

$\lambda = \mu + \nu$ — коэффициент уменьшения фондовооруженности за счет износа физического капитала и роста числа занятых.

Удельный выпуск секторов

$$x_i = \frac{X_i}{L} = \theta_i f_i(k_i), \quad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

где x_i — народнохозяйственная производительность труда i-го сектора.

Дифференциальные уравнения для фондовооруженности секторов

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda k_i + \frac{s_i}{\theta_i}(x_1 + y_1), \quad k_i(0) = k_i^0, \quad i = 0, 1, 2. \tag{2}$$

Натуральные балансы

- трудовой

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad 0 \le \theta_i < 1; \tag{3}$$

- инвестиционный

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad 0 \le s_i < 1; \tag{4}$$

- материальный

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + z_0. \tag{5}$$

Внешнеторговый баланс

$$q_0 z_0 = q_1^+ y_1 + q_2^+ y_2. \tag{6}$$

Индустриальная безопасность

$$y_1 \le \gamma_1 x_1. \tag{7}$$

Таким образом, приведенное подмножество открытой трехсекторной модели отличается от полной модели в следующих аспектах:

1) из трех внешнеторговых балансов секторов выбран самый важный баланс (6) материального сектора;
2) опущены внутренние стоимостные балансы секторов;
3) удельный импорт потребительских товаров считается фиксированным, поэтому условие потребительской безопасности опущено.

Упрощение модели обусловлено трудностями решения полной задачи оптимального сбалансированного роста открытой трехсекторной экономики. По мере преодоления этих трудностей, можно надеяться, будет решена и полная задача. В связи с пренебрежением частью стоимостных балансов в названии статьи использован термин «оптимальный сбалансированный рост» вместо «оптимальный экономический рост».

Под *оптимальным сбалансированным ростом* понимается рост фондовооруженности всех секторов, сбалансированный по трудовым, инвестиционным и материальным ресурсам и оптимальный по критерию «максимум дисконтированного удельного потребления».

2. Постановка задачи

Аналогично работе Фелпса [Phelps (1966)] примем в качестве *критерия динамической задачи* максимум дисконтированного удельного потребления:

$$\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} c(t)dt \to \max, \tag{8}$$

но поскольку $c(t) = x_2(t) + y_2$, то при $y_2 = \text{const}$ задача сводится к максимизации дисконтированного удельного выпуска потребительского сектора:

$$\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} x_2(t)dt \to \max. \tag{9}$$

Задача будет решаться с помощью *принципа максимума Понтрягина* [Понтрягин и др. (1969)] в той форме, как это представлено в [Интриллигатор (1975)]. *Фазовые переменные* — фондовооруженность секторов k_0, k_1, k_2, *уравнения движения* — это уравнения (2) для фондовооруженности секторов.

Управляющие параметры — это доли распределения трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами θ_0, θ_1, θ_2, s_0, s_1, s_2. Поскольку эти доли связаны тремя соотношениями

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \tag{3'}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \tag{4'}$$

$$(1-a_0)\theta_0 f_0(k_0)=a_1\theta_1 f_1(k_1)+a_2\theta_2 f_2(k_2)+\frac{q_1^+}{q_0}y_1+\frac{q_2^+}{q_0}y_2, \qquad (5')$$

то свободных управляющих параметров только три. Выберем в таком качестве параметры s_1, s_2, θ_2.

В уравнении материального баланса (5′) вместо z_0 подставлено его значение, найденное из внешнеторгового баланса (6). Будем считать, что условие индустриальной безопасности выполняется как равенство:

$$y_1=\gamma_1 x_1, \qquad (7')$$

тогда уравнение материального баланса примет следующий вид:

$$(1-a_0)\theta_0 f_0(k_0)=(a_1+b_1)\theta_1 f_1(k_1)+a_2\theta_2 f_2(k_2)+z_{02}^0, \qquad (5'')$$

где $b_1=\gamma_1\dfrac{q_1^+}{q_0}=\text{const}$, $z_{02}^0=\dfrac{q_2^+}{q_0}y_2=\text{const}$.

Используя (3′), разрешим (5″) относительно θ_1:

$$\theta_1=\frac{(1-\theta_2)(1-a_0)f_0(k_0)-\theta_2 a_2 f_2(k_2)-z_{02}^0}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}. \qquad (10)$$

Таким образом, задав управляющее правило в момент t по параметрам s_1, s_2, θ_2, по соотношениям (3′), (4′), (10) однозначно определяем значения других параметров распределения ресурсов, т. е. s_0, θ_0, θ_1.

Уравнения для фазовых переменных при выполнении (7′) примут следующий вид:

$$\frac{dk_0}{dt}=-\lambda k_0+\frac{s_0}{\theta_0}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1), \quad k_0(0)=k_0^0; \qquad (11)$$

$$\frac{dk_1}{dt}=-\lambda k_1+s_1(1+\gamma_1)f_1(k_1), \qquad k_1(0)=k_1^0; \qquad (12)$$

$$\frac{dk_2}{dt}=-\lambda k_2+\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1), \quad k_2(0)=k_2^0. \qquad (13)$$

Решение задачи на максимум функционала (9) при выполнении дифференциальных уравнений (11)–(13) для фазовых переменных и соотношений (3′), (4′), (10) начинается с построения Гамильтониана

$$H=\delta e^{-\delta t}\theta_2 f_2(k_2)+\psi_0\left(-\lambda k_0+\frac{s_0}{\theta_0}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1)\right)+\psi_1\left(-\lambda k_1+s_1(1+\gamma_1)f_1(k_1)\right)+$$
$$+\psi_2\left(-\lambda k_2+\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1)\right) \qquad (14)$$

и дифференциальных уравнений для сопряженных переменных

$$\frac{d\psi_0}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial k_0}, \quad \frac{d\psi_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial k_1}, \quad \frac{d\psi_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial k_2}.$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial k_0} &= \psi_0\left[-\lambda+\frac{s_0}{\theta_0}\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)(1+\gamma_1)f_1(k_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}\right]+\psi_2\left[\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}\right],\\
\frac{\partial H}{\partial k_1} &= \psi_0\left[\frac{s_0}{\theta_0}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\left(\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}+\theta_1\frac{f_1'(k_1)}{f_1(k_1)}\right)\right]+\psi_1[-\lambda+s_1(1+\gamma_1)f_1'(k_1)]+\\
&+\psi_2\left[\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\left(\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_1}+\theta_1\frac{f_1'(k_1)}{f_1(k_1)}\right)\right],\\
\frac{\partial H}{\partial k_2} &= \delta e^{-\delta t}\theta_2 f_2'(k_2)+\psi_0\left[\frac{s_0}{\theta_2}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_2}\right]+\psi_2\left[-\lambda+\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial k_2}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Найдем производные $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_1}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_2}$, используя выражение (10):

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}=\frac{(1-a_0)f_0'(k_0)[(1-\theta_2)(a_1+b_1)f_1(k_1)+\theta_2 a_2 f_2(k_2)-z_{02}]}{[(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)]^2}=\frac{(1-a_0)\theta_0 f_0'(k_0)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)};$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial k_1}=-\frac{(a_1+b_1)f_1'(k_1)[(1-\theta_2)(1-a_0)f_0(k_0)-\theta_2 a_2 f_2(k_2)-z_{02}]}{[(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)]^2}=-\frac{(a_1+b_1)\theta_1 f_1'(k_1)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)};$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial k_2}=-\frac{a_2\theta_2 f_2'(k_2)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}.$$

Подставим полученные выражения для производных $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_0}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_1}$, $\frac{\partial\theta_1}{\partial k_2}$ в уравнения (15) для сопряженных переменных

$$\frac{d\psi_0}{dt}=\left(\lambda-s_0\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)(1-a_0)f_0'(k_0)D\right)\psi_0-\left(\frac{s_2}{\theta_2}\theta_0(1-a_0)f_0'(k_0)D\right)\psi_2, \quad (16)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}=-\left(\frac{s_0}{\theta_0}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1'(k_1)\frac{(1-a_0)f_0(k_0)-\frac{\theta_1}{\theta_0}(a_1+b_1)f_1(k_1)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}\right)\psi_0+(\lambda-s_1(1+\gamma_1)f_1'(k_1))\psi_1-$$

$$-\left(\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)\theta_1 f_1'(k_1)\frac{(1-a_0)f_0(k_0)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}\right)\psi_2, \quad (17)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt}=\left(\frac{s_0}{\theta_0}\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\theta_0 a_2 f_2'(k_2)D\right)\psi_0+(\lambda+s_2 a_2 f_2'(k_2)D)\psi_2-\delta e^{-\delta t}\theta_2 f_2'(k_2), \quad (18)$$

где

$$D=\frac{(1+\gamma_1)f_1(k_1)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}. \quad (19)$$

Конкретное решение уравнений для сопряженных переменных определяется с помощью условия трансверсальности в момент времени t_1. Этот момент устанавливается как момент перехода из заданного начального состояния системы (в нашем случае k_0^0, k_1^0, k_2^0) в заданное конечное состояние (в нашем случае k_0^*, k_1^*, k_2^*). Последнее, согласно Приложению 4 в [Колемаев (2005)], является фондовооруженностью секторов при решении следующей стационарной задачи:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_2 f_2(k_2) \to \max,\\
&k_i = \frac{s_i(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1)}{\lambda\theta_i}, \quad i = 0, 1, 2,\\
&s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad 0 < s_i < 1,\\
&\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad 0 < \theta_i < 1,\\
&(1-a_0)\theta_0 f_0(k_0) = (a_1 + b_1)\theta_1 f_1(k_1) + a_2\theta_2 f_2(k_2) + z_{02}^0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Непосредственно момент времени t_1 определяется как момент, когда оптимальное (по критерию динамической задачи) решение уравнения для фондовооруженности фондосоздающего сектора

$$\frac{dk_1^*}{dt} = -\lambda k_1^* + s_1^*(t)(1+\gamma_1)f_1(k_1^*), \quad k_1^*(0) = k_1^0,$$

достигает оптимального стационарного значения

$$k_1^*(t_1) = k_1^*.$$

Представим критериальный функционал (9) динамической задачи в виде двух слагаемых:

$$\delta\int_0^\infty e^{-\delta t}x_2(t)dt = \delta\int_0^{t_1} e^{-\delta t}x_2(t)dt + \delta\int_{t_1}^\infty e^{-\delta t}x_2(t)dt = \delta\int_0^{t_1} e^{-\delta t}x_2(t)dt + e^{-\delta t_1}x_2^*,$$

где $x_2^* = \theta_2^* f_2(k_2^*)$. Тогда критериальная функция динамической задачи примет вид

$$\delta\int_0^{t_1} e^{-\delta t}x_2(t)dt + e^{-\delta t_1}\theta_2^* f_2(k_2^*), \tag{21}$$

поэтому условия трансверсальности, согласно принципу максимума, сведутся к следующим краевым условиям для сопряженных переменных:

$$\psi_0(t_1) = \frac{\partial}{\partial k_0^*}\left(e^{-\delta t_1}\theta_2^* f_2(k_2^*)\right) = 0, \tag{22}$$

$$\psi_1(t_1) = \frac{\partial}{\partial k_1^*}\left(e^{-\delta t_1}\theta_2^* f_2(k_2^*)\right) = 0, \tag{23}$$

$$\psi_2(t_1) = \frac{\partial}{\partial k_2^*}\left(e^{-\delta t_1}\theta_2^* f_2(k_2^*)\right) = e^{-\delta t_1}\theta_2^* f_2'(k_2^*). \tag{24}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Согласно принципу максимума Понтрягина в каждый момент времени t, $0 \le t \le t_1$, управляющие параметры должны принимать значения, доставляющие максимум Гамильтониану (14) при фиксированных (заданных) значениях фазовых переменных (в нашем случае k_0, k_1, k_2)

и других управляющих параметров. Свободными управляющими параметрами, как уже отмечалось, служат s_1, s_2, θ_2, остальные параметры, задающие распределение трудовых и инвестиционных ресурсов (s_0, θ_0, θ_1), определяются по первым трем с помощью трудового, инвестиционного и материального балансов (последний в нашем случае представлен в форме (10)).

Необходимое условие оптимальности по параметру s_1

Параметр s_1 линейным образом входит в Гамильтониан через коэффициенты при ψ_0 (вместо s_0 подставляем $s_0 = 1 - s_1 - s_2$) и при ψ_1:

$$(1+\gamma_1)x_1\left(-\frac{\psi_0}{\theta_0}+\frac{\psi_1}{\theta_1}\right)s_1,$$

поэтому оптимальное управляющее правило по параметру s_1 состоит в следующем:

$$s_1^*(t)=\begin{cases}\bar{s}_1(t), & \theta_0\psi_1>\theta_1\psi_0,\\ \underline{s}_1(t), & \theta_0\psi_1<\theta_1\psi_0,\end{cases} \tag{25}$$

где $\underline{s}_1(t)$, $\bar{s}_1(t)$ — минимальное и максимальное допустимые значения параметра s_1 в момент времени t.

Необходимое условие оптимальности по параметру s_2

Аналогично определяется правило по параметру s_2:

$$s_2^*(t)=\begin{cases}\bar{s}_2(t), & \theta_0\psi_2>\theta_2\psi_0,\\ \underline{s}_2(t), & \theta_0\psi_2<\theta_2\psi_0.\end{cases} \tag{26}$$

Необходимое условие оптимальности по параметру θ_2

Зависимость Гамильтониана от параметра θ_2 нелинейная, поэтому надо исследовать производную

$$\frac{\partial H}{\partial\theta_2}=\delta e^{-\delta t}f_2(k_2)+\left(\frac{s_0}{\theta_0}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}+\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2}\right)\right)\psi_0+\left(\frac{s_2}{\theta_2}(1+\gamma_1)f_1(k_1)\left(-\frac{\theta_1}{\theta_2}+\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2}\right)\right)\psi_2.$$

Найдем теперь

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_2}=-\frac{(1-a_0)f_0(k_0)+a_2f_2(k_2)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}$$

и, подставив это значение в предыдущее выражение, окончательно получим

$$\frac{\partial H}{\partial\theta_2}=\delta e^{-\delta t}f_2(k_2)-D\left[\frac{s_0}{\theta_0}((1-a_0)f_0(k_0)+a_2f_2(k_2))\psi_0+\frac{s_2}{\theta_2^2}((1-a_0)f_0(k_0)-z_{02}^0)\psi_2\right]. \tag{27}$$

Оптимальное правило по θ_2 состоит в следующем:

$$\theta_2^*(t)=\begin{cases}\underline{\theta}_2(t), & \dfrac{\partial H}{\partial\theta_2}<0,\\[2ex] \bar{\theta}_2(t), & \dfrac{\partial H}{\partial\theta_2}>0.\end{cases} \tag{28}$$

4. Исследование поведения сопряженных переменных

Решение уравнений для сопряженных переменных зависит от выбора управляющего правила. Поскольку в коэффициенты при переменных ψ_0, ψ_1, ψ_2 непосредственно входят управляющие параметры, оптимальное управляющее правило зависит от найденного решения ψ_0, ψ_1, ψ_2. Поэтому построение и правила, и решения должно происходить одновременно. Однако для удобства изложения эти части исследования описываются в разных разделах статьи.

Далее используется общий вид найденного оптимального правила. Оно состоит из этапов ускоренного и замедленного роста. На первом этапе ускоренным образом растет *фондовооруженность фондосоздающего сектора*, в то время как фондовооруженность материального и потребительского секторов остается на первоначальном уровне. На втором этапе, напротив, ускоренным образом растет *фондовооруженность материального и потребительского секторов*, в то время как фондовооруженность фондосоздающего сектора замедленным образом «подтягивается» к оптимальному стационарному значению.

Поведение переменных ψ_0, ψ_2

Сопряженные переменные ψ_0 и ψ_2 удовлетворяют автономной подсистеме дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= a_{00}\psi_0 + a_{02}\psi_2, & \psi_0(t_1) &= 0,\\ \frac{d\psi_2}{dt} &= a_{20}\psi_0 + a_{22}\psi_2 - \delta g(t), & \psi_2(t_1) &= g(t_1), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

коэффициенты которой, согласно (16), (18), задаются выражениями

$$\left.\begin{aligned} a_{00} &= \lambda - s_0\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)(1-a_0)f_0'(k_0)D, & a_{02} &= -\frac{s_2}{\theta_2}\theta_0(1-a_0)f_0'(k_0)D,\\ a_{20} &= \frac{s_0}{\theta_0}\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\theta_2 a_2 f_2'(k_2)D, & a_{22} &= \lambda + s_2 a_2 f_2'(k_2)D, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где

$$g(t) = e^{-\delta t}\theta_2 f_2'(k_2);\;\; D = \frac{(1+\gamma_1)f_1(k_1)}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)}.$$

Изменение коэффициентов системы (29) в интервалы времени между переключениями в значительной мере определяется поведением функций времени g, D, $f_0'(k_0)$, $f_2'(k_2)$.

Функция $g(t) = e^{-\delta t}\theta_2(t) f_2'(k_2(t))$ убывает: на первом этапе пропорционально $e^{-\delta t}$ $\big(\theta_2(t) = \underline{\theta}_2, f_2'(k_2(t)) = f_2'(k_2^0)\big)$; на втором — убывание ускоряется, поскольку $k_2(t)$ растет.

Функция $D(t) = D(k_0(t), k_1(t))$ на первом этапе растет ($k_0(t) = k_0^0$, $k_1(t)$ растет), на втором — рост замедляется ($k_0(t)$ растет быстрее, чем $k_1(t)$).

Функции $f_0'(k_0(t)), f_2'(k_2(t))$ на первом этапе постоянны ($k_0(t) = k_0^0$, $k_2(t) = k_2^0$), на втором — убывают, поскольку $k_0(t), k_2(t)$ растут.

Отсюда следует, что коэффициенты a_{00}, a_{02} на первом этапе убывают, на втором — растут, а коэффициенты a_{20}, a_{22}, наоборот, растут на первом этапе и убывают на втором.

Решение системы может быть найдено методом последовательных приближений, начиная с $\psi_0^0(t)=0$.

Если $\psi_0(t)$ известно (например, для нулевого приближения $\psi_0^0(t)=0$), то $\psi_2(t)$ определяется по формуле

$$\psi_2(t)=e^{\int_0^t a_{22}(\tau)d\tau}\int_t^{t_1}(\delta g(\tau)-a_{20}(\tau)\psi_0(\tau))e^{-\int_0^\tau a_{22}(u)du}d\tau+g(t_1). \quad (31)$$

Напротив, если $\psi_2(t)$ известно, то $\psi_0(t)$ определяется по формуле

$$\psi_0(t)=e^{\int_0^t a_{00}(\tau)d\tau}\int_t^{t_1}(-a_{02}(\tau))\psi_2(\tau)e^{-\int_0^\tau a_{00}(u)du}d\tau. \quad (32)$$

Из (31) и (32) видно, что $\psi_0(t)>0,\ \psi_2(t)>0$ для $t\in[0,t_1)$.

Докажем теперь, что $\psi_2(t)\le g(t)$. В самом деле, $\psi_2(t_1)=g(t_1)$, и пусть теперь в некоторой точке $t\in[0,t_1)$ $\psi_2(t)\le g(t)$, тогда

$$g(t-\Delta t)-\psi_2(t-\Delta t)=g(t)-\psi_2(t)+(\psi_2'(t)-g'(t))\Delta t+o(\Delta t).$$

Имеем

$$\psi_2'(t)-g'(t)=a_{20}\psi_0(t)+a_{22}\psi_2(t)-\delta g(t)+\delta g(t)-\frac{\theta_2'}{\theta_2}g(t)-\frac{f_2''(k_2)}{f_2'(k_2)}g(t).$$

Поскольку $a_{20}>0$, $a_{22}>0$, $\theta_2'\le 0$ (согласно рис. 3), $f_2''(k_2)<0$ (ведь $F_2(K_2,L_2)$ — неоклассическая производственная функция), то $\psi_2'(t)-g'(t)>0$, поэтому $g(t-\Delta t)-\psi_2(t-\Delta t)<0$ для любых $t\in[0,t_1)$.■

Применим этот же прием для доказательства $\psi_0(t)<g(t)$. Действительно, $\psi_0(t_1)=0<g(t_1)$. Пусть в некоторой точке $t\in[0,t_1]$ $g(t)>\psi_0(t)$, тогда при $a_{00}<0$

$$g(t-\Delta t)-\psi_0(t-\Delta t)=g(t)-\psi_0(t)+(\psi_0'(t)-g'(t))\Delta t+o(\Delta t),$$

$$\psi_0'(t)-g'(t)=a_{00}\psi_0(t)+a_{02}\psi_2(t)+\delta g(t)-\frac{\theta_2'}{\theta_2}g(t)-\frac{f_2''(k_2)}{f_2'(k_2)}g(t)>\left(a_{00}+a_{02}+\delta-\frac{\theta_2'}{\theta_2}-\frac{f_2''(k_2)}{f_2'(k_2)}\right)g(t).$$

Как видим, достаточным условием положительности разности производных является выполнение при $a_{00}<0$ неравенства

$$\delta\ge-(a_{00}+a_{02})=\left(s_0\left(1+\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)+\frac{s_2}{\theta_2}\theta_0\right)(1-a_0)f_0'(k_0)D-\lambda. \quad (33)$$

Таким образом, при выполнении (33) $\psi_0(t)<g(t),\ t\in[0,t_1]$.■

Поскольку $a_{20}>0$, $a_{22}>0$, то $a_{20}\psi_0+a_{22}\psi_2<(a_{20}+a_{22})g$, поэтому при выполнении условия

$$\delta>a_{20}+a_{22},\ t\in[0,t_1] \quad (34)$$

сопряженная переменная ψ_2 убывает на всем отрезке $[0, t_1]$. Убывание функции $\psi_2(t)$ не используется при построении оптимального правила, поэтому выполнение условия (34) не является обязательным.

Поведение $\psi_0(t)$ можно установить лишь при точном знании функции $\psi_2(t)$.

Поведение переменной ψ_1

Переменная ψ_1 удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению первого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d\psi_1}{dt} = a_{10}\psi_0 + a_{11}\psi_1 + a_{12}\psi_2,\ \psi_1(t_1) = 0,$$

где коэффициенты a_{10}, a_{11}, a_{12} находятся непосредственно из (17), при этом $a_{10} < 0,\ \ a_{12} < 0$.

Это уравнение при известном управлении и известных функциях $\psi_0(t)$ и $\psi_2(t)$ имеет следующее решение:

$$\psi_1(t) = e^{\int_0^t a_{11}(\tau)d\tau} \int_t^{t_1} (-a_{10}(\tau)\psi_0(\tau) - a_{12}(\tau)\psi_2(\tau))e^{-\int_0^\tau a_{11}(u)du} d\tau. \tag{35}$$

Отсюда следует, что $\psi_1(t) > 0$ при $\psi_0(t) > 0,\ \psi_2(t) > 0,\ t \in [0, t_1)$.

Поскольку в соответствии с оптимальным правилом $k_1(t)$ непрерывно растет от начального значения k_1^0 до конечного значения k_1^*, то $f_1'(k_1)$ убывает (ведь $F_1(K_1, L_1)$ — неоклассическая производственная функция), а $s_1^*(t)$ растет на этапе ускоренного роста от $\bar{s}_1(0)$ до $\bar{s}_1(\hat{t})$ и на этапе замедленного роста от $\underline{s}_1(\hat{t})$ до s_1^*, то коэффициент $a_{11}(t) = \lambda - s_1^*(1+\gamma_1)f_1'(k_1)$ изменяется следующим образом: при $0 \le t \le \hat{t}_1$ является отрицательным; при $t = \hat{t}_1$, $\hat{t}_1 < \hat{t}$ равен нулю, т. е. $a_{11}(\hat{t}_1) = 0$; при $t > \hat{t}_1$ становится положительным.

Из сказанного вытекает, что $\psi_1(t)$ убывает при $t \in [0, \hat{t}_1]$. Кроме того, $\psi_1(t) < \psi_0(t)$, $\psi_1(t) < \psi_2(t)$ в левой окрестности точки t_1, поскольку $\psi_1(t_1) < \psi_0(t_1)$, $\psi_1(t_1) < \psi_2(t_1)$.

Таким образом, *на заключительной фазе переходного процесса* между сопряженными переменными выполняются следующие соотношения:

$$\psi_1(t) < \psi_0(t) < \psi_2(t) < g(t).$$

На *этапе ускоренного роста* и *начальной фазе этапа замедленного роста* соотношения между сопряженными переменными могут меняться на противоположные, но $g(t)$ остается мажорантой сопряженных переменных ψ_0, ψ_2 на протяжении всего переходного процесса:

$$\psi_0(t) < g(t),\ \ \psi_2(t) < g(t),\ \ t \in (0, t_1). \tag{36}$$

5. Синтез оптимального управляющего правила

Недостаточно индустриально развитые экономики характеризуются следующими особенностями в распределении трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами:

- недостаточное ресурсное обеспечение фондосоздающего сектора, что частично компенсируется равенством долей трудовых и инвестиционных ресурсов;
- переизбыток трудовых ресурсов в потребительском секторе вследствие более благоприятных условий труда по сравнению с секторами, выпускающими средства производства;

• недостаток трудовых ресурсов в материальном секторе, что компенсируется большей капиталоемкостью (соответственно, требуются бо́льшие капиталовложения).

Формально эти особенности отражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & s_1^0 < s_0^0, \quad s_1^0 < s_2^0, \quad s_0^0 > s_2^0, \\ & \theta_1^0 < \theta_0^0, \; \theta_1^0 < \theta_2^0, \; \theta_0^0 < \theta_2^0, \\ & s_1^0 \approx \theta_1^0, \end{aligned} \tag{37}$$

причем большинство неравенств имеют тип $>>$ или $<<$.

Такое первоначальное распределение ресурсов существенно отличается от стационарного оптимального и будет смещаться в его сторону в результате реализации оптимального правила динамической задачи.

Рассмотрим формирование оптимального управляющего правила, проверяя в каждый момент времени t выполнение необходимых условий оптимальности (25), (26), (28).

Начальный момент времени $(t = 0)$

Поскольку, согласно (37), $\theta_0^0 >> \theta_1^0$, а различие между $\psi_1(0)$ и $\psi_0(0)$ не такое существенное, то

$$\theta_0^0 \psi_1(0) > \theta_1^0 \psi_0(0),$$

и, следовательно, согласно (25)

$$s_1^*(0) = \bar{s}_1(0). \tag{38}$$

Поскольку, согласно (37), $\theta_2^0 >> \theta_0^0$, а различие между $\psi_0(0)$ и $\psi_2(0)$ не столь существенное, то

$$\theta_0^0 \psi_2(0) < \theta_2^0 \psi_0(0) \tag{39}$$

и, следовательно, согласно (26)

$$s_2^*(0) = \underline{s}_2(0). \tag{40}$$

Если заменить в выражении (27) сопряженные переменные $\psi_0(t)$ и $\psi_2(t)$ на их мажоранту $g(t) = e^{-\delta t}\theta_2 f_2'(k_2)$, то получим следующее неравенство:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_2} < e^{-\delta t} f_2(k_2)\left[\delta - D\frac{f_2'(k_2)}{f_2(k_2)}\left(\frac{s_0}{\theta_0}\theta_2((1-a_0)f_0(k_0) + a_2 f_2(k_2)) + \frac{s_2}{\theta_2}((1-a_0)f_0(k_0) - z_{02}^0)\right)\right]. \tag{41}$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ содержимое квадратной скобки отрицательно, то $\left.\frac{\partial H}{\partial \theta_2}\right|_{t=0} < 0$, и согласно оптимальному правилу

$$\theta_2^*(0) = \underline{\theta}_2, \tag{42}$$

где $\underline{\theta}_2$ — минимально допустимое значение доли потребительского сектора в распределении труда, при котором удельное непроизводственное потребление за счет собственного производства устанавливается на минимально допустимом уровне

$$\underline{c} = \underline{\theta}_2 f_2(k_2^0). \tag{43}$$

Итак, *оптимальное правило по* θ_2 *в начальный момент* имеет вид (42), если

$$\delta < D^0 \frac{f_2'(k_2^0)}{f_2(k_2^0)}\left[\frac{s_0^0}{\theta_0^0}\theta_2^0((1-a_0)f_0(k_0^0)+a_2f_2(k_2^0))+\frac{s_2^0}{\theta_2^0}((1-a_0)f_0(k_0^0)-z_{02}^0)\right]. \quad (44)$$

Поскольку в начальный момент времени закупались за рубежом не только машины и оборудование, но и предметы потребления в объеме (далее этот объем считается фиксированным)

$$y_2^0 = \frac{q_0}{q_2^+} z_{02}^0,$$

то общий размер удельного непроизводственного потребления составит

$$\underline{c} + y_2^0. \quad (45)$$

Высвободившиеся трудовые ресурсы в относительном объеме $\theta_2^0 - \underline{\theta}_2$ (в абсолютном $L^0(\theta_2^0 - \underline{\theta}_2)$) перекачиваются в материальный и фондосоздающий секторы, при этом $\theta_1^*(0)$ определяется по формуле (10) при $k_i = k_i^0$, $\theta_2 = \underline{\theta}_2$, а $\theta_0^*(0) = 1 - \theta_1^*(0) - \underline{\theta}_2$.

Минимально допустимое значение доли потребительского сектора в распределении инвестиционных ресурсов

$$\underline{s}_2(0) = \frac{\lambda \underline{\theta}_2 k_2^0}{\theta_1^*(0) f_1(k_1^0)} \quad (46)$$

определяется из условия поддержания фондовооруженности потребительского сектора на стационарном уровне, равном ее начальному значению:

$$k_2^E = k_2^0. \quad (47)$$

Максимально допустимое значение доли фондосоздающего сектора в распределении инвестиционных ресурсов при уже заданной доле $\underline{s}_2(0)$ потребительского сектора определяется из условия поддержания фондовооруженности материального сектора на стационарном уровне, равном ее начальному значению:

$$k_0^E = k_0^0, \quad (48)$$

так что

$$s_0^*(0) = \frac{\lambda \theta_0^*(0) k_0^0}{\theta_1^*(0) f_1(k_1^0)}, \quad (49)$$

$$\bar{s}_1(0) = 1 - s_0^*(0) - \underline{s}_2(0). \quad (50)$$

Итак, в начальный момент времени в случае заметного отличия распределения ресурсов от оптимального происходит переключение по всем трем свободным управляющим параметрам:

$$s_1^*(0) = \bar{s}_1(0) > s_1^0, \quad s_2^*(0) = \underline{s}_2(0) < s_2^0, \quad \theta_2^*(0) = \underline{\theta}_2 < \theta_2^0. \quad (51)$$

Этап ускоренного роста $(0 < t < \hat{t})$

На этапе ускоренного роста, который наступил после трех переключений в начальный момент времени, система будет находиться до тех пор, пока будут выполняться необходимые условия оптимальности такого же типа, как и при $t = 0$:

$$\theta_0(t)\psi_1(t) > \theta_1(t)\psi_0(t),$$

$$\theta_0(t)\psi_2(t) < \underline{\theta}_2\psi_0(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial\theta_2}(t) < 0.$$

Поэтому на рассматриваемом этапе оптимальное управление будет иметь вид

$$s_1^*(t) = \bar{s}_1(t), \quad s_2^*(t) = \underline{s}_2(t), \quad \theta_2^*(t) = \underline{\theta}_2, \tag{52}$$

при этом в фондосоздающий сектор поступает максимально возможный объем ресурсов, а в материальный и потребительский — минимально возможный, при котором их фондовооруженность находится на первоначальном уровне

$$k_0(t) = k_0^0, \; k_2(t) = k_2^0,$$

откуда

$$\underline{s}_2(t) = \frac{\lambda k_2^0 \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_1 f_1(k_1)}, \quad \underline{s}_0(t) = \frac{\lambda k_0^0 \underline{\theta}_0}{\bar{\theta}_1 f_1(k_1)}, \quad \bar{s}_1(t) = 1 - \underline{s}_0(t) - \underline{s}_2(t), \tag{53}$$

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(t) = \frac{(1-\underline{\theta}_2)(1-a_0)f_0(k_0^0) - \underline{\theta}_2 a_2 f_2(k_2^0) - z_{02}^0}{(1-a_0)f_0(k_0^0) + (a_1+b_1)f_1(k_1)}, \tag{54}$$

$$\underline{\theta}_0 = \underline{\theta}_0(t) = 1 - \bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_2. \tag{55}$$

Фондовооруженность фондосоздающего сектора растет ускоренным образом согласно уравнению

$$\frac{dk_1}{dt} = -\lambda k_1 + s_1^*(t)(1+\gamma_1)f_1(k_1), \quad k_1(0) = k_1^0, \tag{56}$$

решение которого имеет вид

$$k_1(t) = e^{-\lambda t}\left(k_1^0 + (1+\gamma_1)\int_0^t s_1^*(\tau) f_1(k_1(\tau)) e^{\lambda\tau} d\tau\right). \tag{57}$$

Из соотношения (54) видно, что $\bar{\theta}_1(t)$ с ростом k_1 убывает, поэтому согласно (55) $\underline{\theta}_0(t)$ возрастает, т. е. происходит перелив труда из фондосоздающего сектора в материальный.

Несмотря на сокращение доли труда фондосоздающего сектора, его удельный выпуск будет возрастать. В самом деле, пусть за время Δt согласно уравнению (56) фондовооруженность сектора увеличится на Δk_1, тогда доля труда уменьшится на величину

$$\Delta\theta_1 = -\frac{(1-\underline{\theta}_2)(1-a_0)f_0(k_0) - \underline{\theta}_2 \underline{c} - z_{02}^0}{[(1-a_0)f_0(k_0) + (a_1+b_1)f_1(k_1)]^2}(a_1+b_1)f_1'(k_1)\Delta k_1 = -\frac{\bar{\theta}_1(a_1+b_1)f_1'(k_1)\Delta k_1}{(1-a_0)f_0(k_0) + (a_1+b_1)f_1(k_1)},$$

а удельный выпуск сектора получит приращение

$$\Delta x_1 = f_1(k_1)\Delta\theta_1 + \theta_1 f_1'(k_1)\Delta k_1 = \bar{\theta}_1 f_1'(k_1)\Delta k_1\left(1 - \frac{(a_1+b_1)f_1(k_1)}{(1-a_0)f_0(k_0) + (a_1+b_1)f_1(k_1)}\right),$$

которое, как видим, положительно.

Поскольку на этом этапе фондовооруженность материального и потребительского секторов не изменяется, то согласно (53) $\underline{s}_2(t)$ убывает, $\underline{s}_0(t)$ остается примерно постоянной, а $\bar{s}_1(t)$ растет.

Однако из примерного постоянства $\underline{s}_0(t)$ вытекает, что из s_1, s_2 только s_1 остается свободным управляющим параметром, так как

$$s_2 = 1 - s_0 - s_1,$$

поэтому необходимые правила оптимальности по s_1, s_2 (25), (26) перестают действовать и замещаются *новым правилом только по* s_1:

$$s_1^*(t) = \begin{cases} \bar{s}_1(t), & \underline{\theta}_2\psi_1(t) > \bar{\theta}_1(t)\psi_2(t), \\ \underline{s}_1(t), & \underline{\theta}_2\psi_1(t) < \bar{\theta}_1(t)\psi_2(t). \end{cases} \tag{58}$$

Дальнейшее поведение системы зависит от того, какое из переключений: по s_1 или по θ_2 — произойдет раньше.

Докажем, что переключение по s_1 произойдет раньше. В самом деле, достаточным условием отрицательности $\frac{\partial H}{\partial \theta_2}$ в любой момент t этапа ускоренного роста является следующее неравенство (рассуждения такие же, как при обосновании этого условия в начальный момент):

$$\delta < D\frac{f_2'(k_2^0)}{f_2(k_2^0)}\left[\frac{s_0}{\underline{\theta}_0}\underline{\theta}_2\left((1-a_0)f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)\right) + \frac{s_2}{\underline{\theta}_2}\left((1-a_0)f_0(k_0^0) - z_{02}^0\right)\right]. \tag{59}$$

Неравенство (59) на протяжении всего этапа будет только усиливаться, поскольку $k_0^0 = \text{const}$, $k_2^0 = \text{const}$, а

$$D(k_1) = \frac{1+\gamma_1}{a_1 + b_1 + (1-a_0)\frac{f_0(k_0^0)}{f_1(k_1)}}$$

растет быстрее, чем убывает содержимое квадратной скобки (ведь $\underline{\theta}_0(t)$ медленно растет, $\underline{s}_2(t)$ медленно убывает, $\underline{s}_0(t) \approx \text{const}$, $\underline{\theta}_2 = \text{const}$).■

Этап замедленного роста ($\hat{t} < t \le t_1$)

На этапе замедленного роста происходит подтягивание «тылов»: материальный и потребительский секторы после стабилизации получают развитие, а фондовооруженность фондосоздающего сектора «дотягивается» до оптимального уровня.

Этап наступает после момента переключения по s_1, определяемого условием

$$\underline{\theta}_2\psi_1(\hat{t}) = \theta_1(\hat{t})\psi_2(\hat{t}), \tag{60}$$

и заканчивается переходом системы в оптимальное стационарное состояние в момент t_1. Равенство (60) обязательно достижимо, поскольку ψ_1, ψ_2 — непрерывные функции и $\psi_1(t_1) = 0$, $\psi_2(t_1) > 0$.

«Дотягивание» фондовооруженности фондосоздающего сектора от достигнутого на начало этапа уровня $\hat{k}_1 = k_1(\hat{t})$ осуществляется путем следующего выбора управления:

$$s_1^*(t)=\underline{s}_1(t)=\frac{\lambda k_1(t)}{(1+\gamma_1)f_1(k_1)}(1+\eta_1(t)),\quad \eta_1(t_1)=0,\quad \eta_1(t)>0,\quad t\in[\hat{t},t_1). \tag{61}$$

Тогда уравнение (56) приобретает вид

$$\frac{dk_1}{dt}=\lambda_1 k_1\eta_1,\quad k_1(\hat{t})=\hat{k}_1,\quad \hat{k}_1<k_1^*$$

и имеет следующее решение

$$k_1(t)=\hat{k}_1 e^{\lambda\int_{\hat{t}}^{t}\eta_1(\tau)d\tau},$$

$$k_1(t_1)=\hat{k}_1 e^{\lambda\int_{\hat{t}}^{t_1}\eta_1(\tau)d\tau}=k_1^*,$$

откуда

$$\int_{\hat{t}}^{t_1}\eta_1(\tau)d\tau=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{k_1^*}{\hat{k}_1}. \tag{62}$$

Точно так же осуществляется «дотягивание» фондовооруженности потребительского сектора от начального значения k_2^0, которое сохранялось на всем протяжении этапа ускоренного роста, до оптимального значения k_2^*:

$$s_2^*(t)=\frac{\lambda k_2\underline{\theta}_2}{(1+\gamma_1)\theta_1 f_1(k_1)}(1+\eta_2(t)). \tag{63}$$

Аналогично (62) находим

$$\int_{\hat{t}}^{t_1}\eta_2(\tau)d\tau=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{k_2^*}{k_2^0}. \tag{64}$$

Функции $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ приближенно можно выбрать линейными:

$$\eta_i(t)=\frac{(t-t_1)\eta_i(\hat{t})}{\hat{t}-t_1},\quad i=1,2,$$

где $\eta_i(\hat{t})=\dfrac{2}{\lambda(t_1-\hat{t})}\ln\dfrac{k_i^*}{\hat{k}_i},\quad \hat{k}_2=k_2^0$.

Доля материального сектора в распределении инвестиционных ресурсов определяется по «остаточному» принципу:

$$s_0^*(t)=1-s_1^*(t)-s_2^*(t).$$

Пока не произошло переключения по θ_2, распределение труда задается следующим образом:

$$\theta_2^*(t)=\underline{\theta}_2(t)=\frac{\underline{c}}{f_2(k_2)},$$

$$\theta_1^*(t)=\frac{(1-\underline{\theta}_2)(1-a_0)f_0(k_0)-\underline{\theta}_2 a_2 f_2(k_2)-z_{02}^0}{(1-a_0)f_0(k_0)+(a_1+b_1)f_1(k_1)},$$

$$\theta_0^*(t)=1-\theta_1^*(t)-\theta_2^*(t).$$

На этом этапе $\theta_2^*(t)$ убывает, $\theta_1^*(t)$ растет, отрицательное слагаемое в $\dfrac{\partial H}{\partial\theta_2}$, согласно (27), начинает быстро убывать, поскольку $f_2'(k_2)$ убывает с ростом k_2 (это особенно видно из поведения мажоранты (41)). При $t = t_1$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial\theta_2}\right|_{t=t_1} = \delta e^{-\delta t_1} f_2(k_2^*) - \frac{(1+\gamma_1) f_1(k_1^*)}{(1-a_0) f_0(k_0^*) + (a_1+b_1) f_1(k_1^*)} \frac{s_2^*}{\theta_2^*}((1-a_0) f_0(k_0^*) - z_{02}^0) e^{-\delta t_1} f_2'(k_2^*) > 0,$$

поэтому вследствие непрерывности $\dfrac{\partial H}{\partial\theta_2}$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial\theta_2}\right|_{t=\tilde t} = 0, \quad \hat t < \tilde t < t_1. \tag{65}$$

Таким образом, на заключительной фазе этапа замедленного роста (при $t > \tilde t$) доля θ_2 должна принять свое максимально возможное значение

$$\theta_2^*(t) = \frac{c^*}{f_2(k_2)},$$

которое при $t = t_1$ достигает максимального стационарного значения

$$\theta_2^*(t_1) = \theta_2^* = \frac{c^*}{f_2(k_2^*)},$$

т. е. на заключительной фазе этапа замедленного роста внутреннее удельное непроизводственное потребление поддерживается на уровне c^*.

Остальные доли распределения труда таковы:

$$\theta_1^*(t) = \frac{(1-\theta_2^*(t))(1-a_0) f_0(k_0) - \theta_2^* a_2 f_2(k_2) - z_{02}^0}{(1-a_0) f_0(k_0) + (a_1+b_1) f_1(k_1)},$$

$$\theta_0^*(t) = 1 - \theta_1^*(t) - \theta_2^*(t).$$

Замечание. При построении оптимального правила использовались ограничения (33), (44) на параметр дисконтирования

$$\delta \ge -(a_{00} + a_{02}) = D(1-a_0) f_0'(k_0)\left(\frac{s_0}{\theta_0}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{s_2}{\theta_2}\theta_0\right) - \lambda = \delta_1,$$

$$\delta < D^0 \frac{f_2'(k_2^0)}{f_2(k_2^0)}\left[\frac{s_0^0}{\theta_0^0}\theta_2^0((1-a_0) f_0(k_0^0) + a_2 f_2(k_2^0)) + \frac{s_2^0}{\theta_2^0}((1-a_0) f_0(k_0^0) - z_{02}^0)\right] = \delta_2^0.$$

Первое ограничение — достаточное условие для выполнения неравенства $\psi_0(t) < g(t)$, $t \in [0, t_1]$, второе — достаточное условие для выполнения в начальный момент переключения по параметру θ_2 (с θ_2^0 на $\underline{\theta}_2$). Оба эти условия могут быть ослаблены, если использовать точное решение (ψ_0, ψ_2) системы (29).

Для того чтобы убедиться в состоятельности выводов, полученных без использования точного решения, надо доказать, что ограничения (33), (44) в начальный момент времени приводят к непустому множеству значений параметра δ, иными словами, должно выполняться неравенство $\delta_1^0 < \delta_2^0$.

Имеем

$$\delta_2^0-\delta_1^0=\lambda+D^0\frac{s_0^0}{\theta_0^0}\left[\theta_2^0\left((1-a_0)\frac{f_0(k_0^0)}{f_2(k_2^0)}+a_2\right)f_2'(k_2^0)-(\theta_0^0+\theta_1^0)(1-a_0)f_0'(k_0^0)\right]+$$

$$+D^0\frac{s_2^0}{\theta_2^0}\left[\frac{(1-a_0)f_0(k_0^0)-z_{02}^0}{f_2(k_2^0)}f_2'(k_2^0)-\theta_0^0(1-a_0)f_0'(k_0^0)\right].$$

Для стран с развитыми сырьевыми отраслями, но недостаточно развитыми обрабатывающими отраслями имеют место следующие соотношения:

$$f_0(k_0^0)>f_2(k_2^0),\ f_0'(k_0^0)<f_2'(k_2^0).$$

Из этих неравенств вытекает, что содержимое первой и второй квадратных скобок в выражении $\delta_2^0-\delta_1^0$ положительно, поэтому $\delta_2^0>\delta_1^0$. ■

Итак, в результате синтеза получилось *оптимальное правило*, состоящее из двух этапов. На первом этапе — ускоренного роста — максимально быстрыми темпами развивается фондосоздающий сектор при фиксированной фондовооруженности материального и потребительского секторов. Момент $\hat{t}$ переключения по s_1 определяется из условия (60), после чего начинается второй этап — замедленного роста, на котором фондовооруженность каждого сектора «дотягивается» до оптимального стационарного уровня k_0^*, k_1^*, k_2^*. Момент $\tilde{t}$ переключения по θ_2 находится по условию (65). Момент окончания оптимального переходного процесса — момент достижения фондовооруженностью фондосоздающего сектора оптимального стационарного значения k_1^* (фондовооруженность других секторов в этот момент также достигает своих оптимальных стационарных значений):

$$k_1^*(t_1)=k_1^*,$$

где k_1^* — стационарное решение уравнения движения для k_1 при $s_1=s_1^*$

$$-\lambda k_1^*+s_1^*(1+\gamma_1)f_1(k_1^*)=0.$$

На рис. 1–3 показано строение оптимального правила по управляющим параметрам s_1, s_2, θ_2, а на рис. 4 — изменение во времени удельного непроизводственного потребления.

Как видно из оптимального правила, оптимальный переходный процесс привел к росту фондовооруженности всех секторов при гармоничном распределении трудовых и инвестиционных ресурсов между ними. Особенно это проявилось в сокращении чрезмерной доли труда потребительского сектора, удельный выпуск которого, несмотря на это, заметно возрос за счет роста фондовооруженности. Следует также отметить, что динамика удельного потребления точно такая, как и в случае односекторной модели.

Согласно рис. 4 максимум дисконтированного удельного потребления равен

$$\max\delta\int_0^\infty e^{-\delta t}\theta_2^*(t)f_2\big(k_2^*(t)\big)dt=(1-e^{-\delta\tilde{t}})\underline{c}+e^{-\delta\tilde{t}}c_1^*,$$

где $\tilde{t}$ — момент переключения по θ_2.

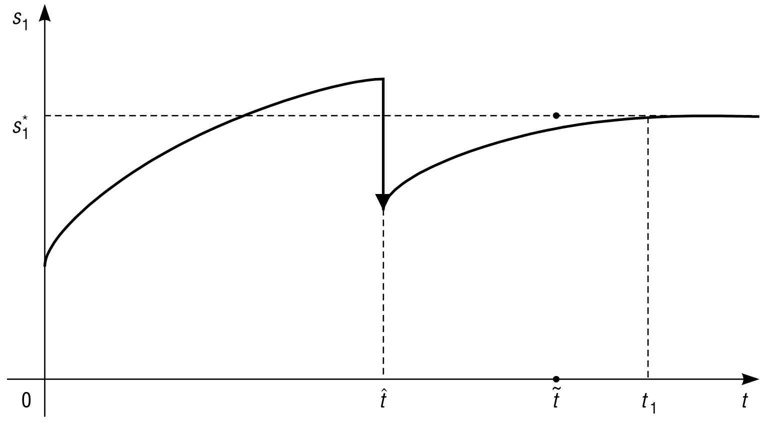

Рис. 1. Оптимальное правило по s_1

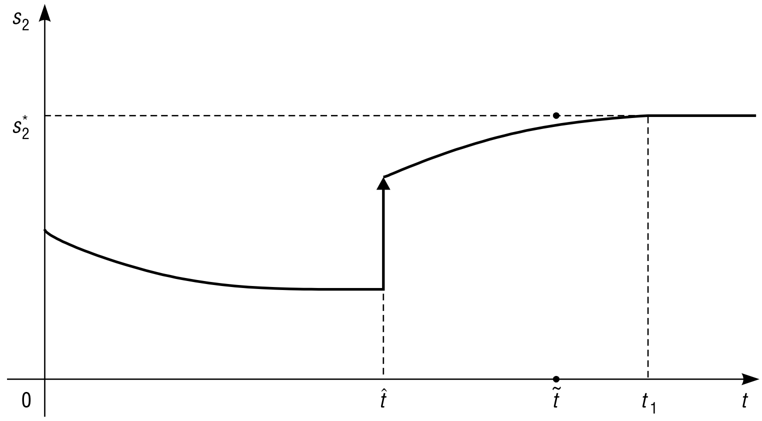

Рис. 2. Оптимальное правило по s_2

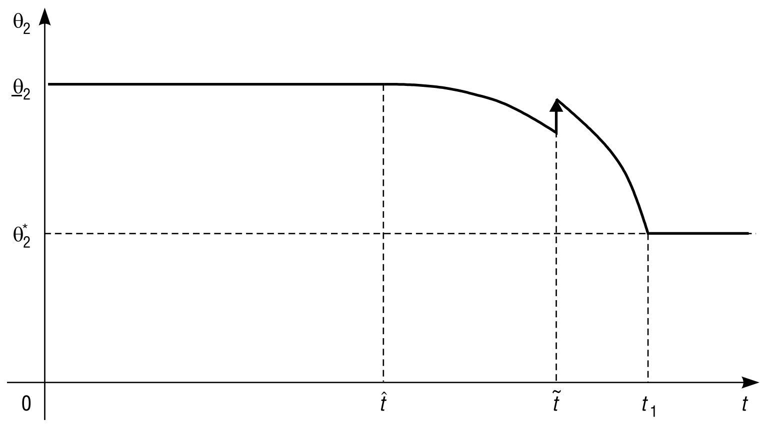

Рис. 3. Оптимальное правило по θ_2

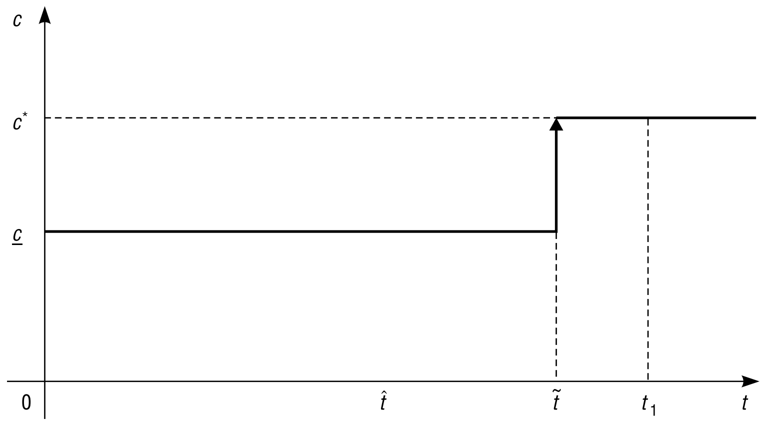

Рис. 4. Динамика удельного непроизводственного потребления за счет отечественного производства

В заключение заметим, что строение оптимального правила принципиально не изменится, если отказаться от условия $y_2 = \text{const}$ и ввести ограничение на потребительскую безопасность в форме равенства $y_2 = \gamma_2 x_2$.

6. Решение стационарной задачи

В общем виде (20) стационарную задачу пока не удалось решить. Ниже приводится ее решение для случая, когда производственные функции секторов являются функциями Кобба–Дугласа

$$F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{1-\alpha_i}, \ i = 0,1,2,$$

тогда

$$f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}, \ i = 0,1,2.$$

Учитывая, что стационарность фондовооруженности секторов

$$k_i^E = \left(\frac{(1+\gamma_1)A_1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \frac{s_i}{\theta_i}\theta_1 s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \ i = 0,1,2,$$

стационарные удельные выпуски секторов примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \theta_0 f_0(k_0^E) = B_0 s_0^{\alpha_0}\theta_0^{1-\alpha_0}\theta_1^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_1 &= \theta_1 f_1(k_1^E) = B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \\ x_2 &= \theta_2 f_2(k_2^E) = B_2 s_2^{\alpha_2}\theta_2^{1-\alpha_2}\theta_1^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

где

$$B_i = A_i\left(\frac{(1+\gamma_1)A_1}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}}, \ i = 0,1,2. \qquad (67)$$

Таким образом, в случае функций Кобба–Дугласа стационарная задача имеет следующий вид:

$$B_2 s_2^{\alpha_2} \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_1}} \to \max, \tag{68}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \ \theta_i \geq 0, \tag{69}$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \ s_i \geq 0, \tag{70}$$

$$(1-a_0) B_0 s_0^{\alpha_0} \theta_0^{1-\alpha_0} \theta_1^{\alpha_0} s_1^{\frac{\alpha_0\alpha_1}{1-\alpha_1}} = (a_1 + b_1) B_1 \theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + a_2 B_2 s_2^{\alpha_2} \theta_2^{1-\alpha_2} \theta_1^{\alpha_2} s_1^{\frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_1}} + z_{02}^0. \tag{71}$$

Так сформулированная задача является классической задачей на условный экстремум (за исключением условий $\theta_i \geq 0, s_i \geq 0$). Трудовой и инвестиционный балансы (69), (70) будем учитывать напрямую ($\theta_1, \theta_2, s_1, s_2$ — варьируемые переменные), а материальный баланс (71) включим в функцию Лангранжа

$$L = x_2 + \tilde{\lambda}[(1-a_0)x_0 - (a_1 + b_1)x_1 - a_2 x_2 - z_{02}^0],$$

где под x_0, x_1, x_2 понимаются их выражения (66), а

$$\theta_0 = 1 - \theta_1 - \theta_2, \ s_0 = 1 - s_1 - s_2.$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial s_1} = \frac{\alpha_1 \tilde{\lambda}}{(1-\alpha_1)s_1}\left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - a_2\right)\alpha_2 x_2 + (1-a_0)\alpha_0 x_0\left(1 - \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{s_1}{s_0}\right) - (a_1+b_1)x_1\right] = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{\tilde{\lambda}}{\theta_1}\left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - a_2\right)\alpha_2 x_2 + (1-a_0)x_0\left(\alpha_0 - \frac{\theta_1}{\theta_0}(1-\alpha_0)\right) - (a_1+b_1)x_1\right] = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial s_2} = \tilde{\lambda}\left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - a_2\right)\frac{\alpha_2 x_2}{s_2} - (1-a_0)\frac{\alpha_0 x_0}{s_0}\right] = 0,\\
&\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tilde{\lambda}\left[\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}} - a_2\right)(1-\alpha_2)\frac{x_2}{\theta_2} - (1-a_0)(1-\alpha_0)\frac{x_0}{\theta_0}\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Из третьего и четвертого уравнений (72) получим

$$\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\frac{s_0}{\theta_0} = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\frac{s_2}{\theta_2}. \tag{73}$$

Найдя $(a_1 + b_1)x_1$ из первого и второго уравнений (72) и приравняв друг другу найденные выражения, получим

$$\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\frac{s_1}{\theta_1} = \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}\frac{s_0}{\theta_0}. \tag{74}$$

Таким образом, на траектории оптимального роста в пространстве управляющих параметров (θ, s) должны быть равны отношения скорректированных долей секторов в распределении ресурсов:

$$\frac{s_0/\alpha_0}{\theta_0/(1-\alpha_0)} = \frac{s_1/\alpha_1}{\theta_1/(1-\alpha_1)} = \frac{s_2/\alpha_2}{\theta_2/(1-\alpha_2)},$$

где под скорректированной долей ресурса понимается отношение этой доли к эластичности ресурса.

Подставим соотношения (73), (74) в уравнения инвестиционного (70) и материального (71) балансов:

$$-(1-s_1)\theta_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} s_1\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} s_1\theta_2 = 0, \tag{75}$$

$$(1-a_0)D_0\theta_0 s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} = (a_1+b_1)B_1\theta_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}} + a_2D_2\theta_2 s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} + z_{02}^0, \tag{76}$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i},\ i=0,1,2;\quad D_i = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_i}\right)^{\alpha_i} B_i,\ i=0,2. \tag{77}$$

Присоединив к уравнениям (75), (76) уравнение трудового баланса (69), получим систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно θ_0, θ_1, θ_2. Разрешим (69), (75) относительно θ_0, θ_1:

$$\left.\begin{aligned}
\theta_0 &= \frac{1-s_1-\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)s_1\right)\theta_2}{1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1},\\
\theta_1 &= \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\theta_2}{1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1}s_1.
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Подставим эти значения в (76):

$$(1-a_0)D_0\frac{1-s_1-\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)s_1\right)\theta_2}{1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1}s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} - (a_1+b_1)B_1\frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}+\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\theta_2}{1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1}s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} - a_2D_2\theta_2 s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} = z_{02}^0$$

и разрешим полученное линейное уравнение относительно θ_2:

$$\theta_2(s_1) = \frac{(1-a_0)D_0(1-s_1)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} - (a_1+b_1)B_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} - z_{02}^0\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1\right)}{(1-a_0)D_0\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)s_1\right)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}} + (a_1+b_1)B_1\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1^{\frac{1}{1-\alpha_1}} + a_2D_2\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)s_1\right)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}}. \tag{79}$$

Таким образом, получили выражение для критериальной функции как функции только s_1:

$$\theta_2(s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}} \to \max.$$

Траектория $(\theta_2(s_1), s_1)$ в пространстве управляющих параметров $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, s_0, s_1, s_2)$ является *траекторией оптимального сбалансированного роста*. Однако продвигаться по ней вплоть до достижения локального максимума функции $\theta_2(s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}$ нецелесообразно, поскольку это связано со все большими затратами средств производства на производство дополнительного рубля предметов потребления. При проведении численных экспериментов с моделью, результаты которых описаны в последнем разделе, было принято, что движение прекращается при $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_0 + \Delta x_1} = 0{,}5$, т. е. увеличение производства средств производства на 1 руб. приводит к росту производства предметов потребления на 0,5 руб.

7. Ретроспективный сценарий возможного развития экономики России

Применим полученные теоретические результаты к исследованию возможного пути развития экономики России с 1991 года до достижения оптимального стационарного состояния. Для пояснения результатов выполняемых расчетов в скобках приводятся соответствующие формулы.

На основе данных[2] за 1960–1991 годы (в ценах 1983 года) были найдены следующие производственные функции секторов ($f_i(k_i) = A_i k_i^{\alpha_i}$):

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= 6{,}19\, K_0^{0,46} L_0^{0,54}, \quad f_0(k_0) = 6{,}19\, k_0^{0,46},\\ X_1 &= 1{,}35\, K_1^{0,68} L_1^{0,32}, \quad f_1(k_1) = 1{,}35\, k_1^{0,68},\\ X_2 &= 2{,}71\, K_2^{0,49} L_2^{0,51}, \quad f_2(k_2) = 2{,}71\, k_2^{0,49}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

В результате агрегирования межотраслевых балансов за 1985–1987 годы были определены следующие коэффициенты прямых материальных затрат по секторам (руб. материалов на 1 руб. продукции соответствующего сектора в ценах 1983 года):

$$a_0 = 0{,}39; \; a_1 = 0{,}29; \; a_2 = 0{,}52.$$

Расчет начальных значений

Фактические значения фондовооруженности секторов за 1990 год были такими (тыс. руб. в ценах 1983 года на одного занятого):

$$k_0^0 = 48{,}7; \; k_1^0 = 16{,}6; \; k_2^0 = 9{,}4. \tag{81}$$

В 1989–1990 годы экономика Российской Федерации характеризовалась следующими фактическими долями распределения трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_0^0 = 0{,}22; \quad \theta_1^0 = 0{,}16; \quad \theta_2^0 = 0{,}62 \quad (1990\ \text{год});\\ &s_0^0 = 0{,}47; \quad s_1^0 = 0{,}14; \quad s_2^0 = 0{,}39 \quad (1989\ \text{год}). \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Используя производственные функции (80), найдем расчетные значения отраслевой производительности труда секторов ($f_i(k_i^0) = A_i (k_i^0)^{\alpha_i}$):

$$f_0(k_0^0) = 37{,}0\ (36{,}4), \; f_1(k_1^0) = 9{,}1\ (10{,}6), \; f_2(k_2^0) = 8{,}1\ (7{,}7) \tag{83}$$

(в скобках приведены фактические значения отраслевой производительности труда).

[2] Сбор данных, их пересчет в сопоставимые цены, расчет производственных функций Кобба–Дугласа секторов, агрегацию межотраслевого баланса России выполнила в 1999–2000 годы Л. А. Константинова, доц. кафедры прикладной математики ГУУ.

Как видим, расчетная производительность материального и потребительского секторов оказалась несколько выше, чем фактическая, а расчетный показатель фондосоздающего сектора — ниже фактического.

Начальные значения удельных выпусков секторов ($x_i^0 = \theta_i^0 f_i(k_i^0)$) найдем, используя среднеарифметическое фактической и расчетной отраслевой производительности секторов:

$$x_0^0 = 8{,}07;\ x_1^0 = 1{,}58;\ x_2^0 = 4{,}9. \tag{84}$$

Подставив эти значения в материальный баланс, получим начальное значение удельного экспорта материалов ($z_0^0 = (1 - a_0)x_0^0 - a_1 x_1^0 - a_2 x_2^0$):

$$z_0^0 = 1{,}91.$$

Учитывая, что в 80-х годах прошлого века выручка от экспорта материалов распределялась в пропорции 2:3 на импорт инвестиционных и потребительских товаров, получим

$$z_{01}^0 = 0{,}76;\ z_{02}^0 = 1{,}15. \tag{85}$$

Примем, что в это время соотношение мировых цен на импортные инвестиционные товары и экспортируемые материалы было примерно таким же, как и сейчас:

$$\frac{q_1^+}{q_0} = 0{,}5$$

(т. е. на 1 руб. материалов можно было купить на 2 руб. машин и оборудования). Тогда начальный удельный импорт инвестиционных товаров составит $\left(y_1^0 = \frac{q_0}{q_1^+} z_{01}^0 \right)$

$$y_1^0 = 1{,}52, \tag{86}$$

поэтому начальное значение коэффициента квотирования $\left(\gamma_1^0 = \frac{y_1^0}{x_1^0} \right)$ будет равно $\gamma_1^0 = 0{,}96$.

Начальные переключения в соответствии с оптимальным управляющим правилом

Большая открытость экономики относительно импорта инвестиционных товаров ($\gamma_1^0 = 0{,}96$) слишком рискованна, поэтому выберем коэффициент квотирования в соответствии со стандартом ЕС (поставка от рискованного поставщика не должна превышать трети потребности):

$$\gamma_1 = 0{,}5,$$

отсюда $b_1 = \gamma_1 \frac{q_1^+}{q_0} = 0{,}25$.

В начальный момент времени правая часть неравенства (44) равна 1,3, поэтому это неравенство выполнено при $\delta < 1{,}3$. Далее примем, что коэффициент дисконтирования равен 1, поэтому $\theta_2^*(0) = \underline{\theta}_2$, и θ_2 будет удерживаться на этом уровне вплоть до момента $\tilde{t}$.

Значение $\theta_2^*(0) = \underline{\theta}_2$ определим из условия сокращения удельного потребления на 8% ($\underline{c} = 0{,}92 x_2^0$)

$$7{,}9\underline{\theta}_2 = 4{,}6,$$

откуда $\underline{\theta}_2 = 0{,}58$.

Значения $\theta_0^*(0)$, $\theta_1^*(0)$ определяем из трудового и материального балансов

$$\left.\begin{array}{l}\theta_0+\theta_1=0{,}42,\\ (1-a_0)f_0(k_0^0)\theta_0-(a_1+b_1)f_1(k_1^0)\theta_1=a_2\cdot 0{,}58f_2(k_2^0)+z_{02}^0,\end{array}\right\}$$

откуда $\theta_0^*(0)=0{,}21$, $\theta_1^*(0)=0{,}21$.

Поскольку $\theta_2^0>>\theta_0^0>>\theta_1^0$, то $\theta_0^0\psi_1(0)>\theta_1^0\psi_0(0)$, $\theta_2^0\psi_0(0)>\theta_0^0\psi_2(0)$, поэтому $s_1^*(0)=\bar{s}_1(0)$, $s_2^*(0)=\underline{s}_2(0)$. Найдем нижние значения $\underline{s}_0(0)$, $\underline{s}_2(0)$:

$$s_0^*(0)=\underline{s}_0(0)=\frac{\lambda\theta_0^*(0)k_0^0}{(1+\gamma_1)\theta_1^*(0)f_1(k_1^0)}=0{,}164,$$

$$s_2^*(0)=\underline{s}_2(0)=\frac{\lambda\theta_2^*(0)k_2^0}{(1+\gamma_1)\theta_1^*(0)f_1(k_1^0)}=0{,}087,$$

откуда $s_1^*(0)=1-s_0^*(0)-s_2^*(0)=0{,}749$.

Далее на протяжении всего этапа ускоренного роста доля фондосоздающего сектора в распределении инвестиционных ресурсов будет медленно возрастать. Таким образом, на этом этапе сектор будет получать «львиную» долю инвестиционных ресурсов ($s_1^*(t)\geq 0{,}749$).

Расчет оптимальных стационарных значений

Прежде всего по формулам (67) при $\lambda=0{,}05$ (норматив Минэкономразвития) и по коэффициентам производственных функций (80), а также по формулам (77) находим

$$B_0=1266;\ B_1=3471;\ B_2=773;$$

$$\varepsilon_0=1{,}17;\ \ \varepsilon_1=0{,}47;\ \ \varepsilon_2=1{,}04;$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}=0{,}4;\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}=0{,}05;\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=0{,}45;$$

$$D_0=831;\ \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)(a_1+b_1)B_1=94;\ D_2=523;$$

$$(1-a_0)D_0=507;\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}(a_1+b_1)B_1=750;\ a_2D_2=272;$$

$$\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}=1{,}44;\ \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}=2{,}13;\ \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}=1{,}53.$$

Подставим эти значения в выражение (79):

$$\theta_2(s_1)=\frac{507(1-s_1)s_1^{1,44}-750s_1^{3,13}-1{,}15(1-0{,}6)s_1}{507(1-0{,}55s_1)s_1^{1,44}+94s_1^{3,13}+272(1-0{,}6s_1)s_1^{1,53}},\tag{87}$$

затем по формулам (78) определим $\theta_0(s_1)$, $\theta_1(s_1)$.

При каждом s_1 значения удельных выпусков равны соответственно

$$\left.\begin{array}{l}x_0(s_1)=D_0\theta_0(s_1)s_1^{\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}}=831\,\theta_0(s_1)s_1^{1,44},\\ x_1(s_1)=B_1\theta_1(s_1)s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}=3471\,\theta_1(s_1)s_1^{2,13},\\ x_2(s_1)=D_2\theta_2(s_1)s_1^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}}=523\,\theta_2(s_1)s_1^{1,53}.\end{array}\right\}\tag{88}$$

Расчеты по формулам (87), (88) дали результаты, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные стационарные удельные выпуски секторов (тыс. руб./чел. в ценах 1983 года) и доли секторов в распределении труда в зависимости от s_1

s_1	$\theta_0(s_1)$	$x_0(s_1)$	$\theta_1(s_1)$	$x_1(s_1)$	$\theta_2(s_1)$	$x_2(s_1)$	$\frac{x_2}{x_0+x_1}$	$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_0+\Delta x_1}$
0,14	0,359	17,57	0,066	3,51	0,575	14,86	0,705	—
0,16	0,372	22,07	0,076	4,04	0,552	17,49	0,670	0,523
0,18	0,374	26,29	0,086	7,79	0,540	20,48	0,601	0,375
0,20	0,383	31,35	0,097	11,01	0,520	23,17	0,547	0,325
0,32	—	—	—	—	0,362	33,37	—	—

Как видно из таблицы, расчетный удельный выпуск потребительского сектора растет, достигая максимума при $s_1 \approx 0{,}32$. Однако этот рост дается все более дорогой ценой: увеличение выпуска средств производства на 1 руб. сопровождается все меньшим ростом выпуска предметов потребления[3]. Если взять за нижнюю границу прироста предметов потребления 0,5 руб. на 1 руб. роста средств производства, то $s_1^* = 0{,}16$. Как видим, отличие от начального значения $s_1^0 = 0{,}14$ небольшое.

Ниже приводится полный перечень оптимальных стационарных значений параметров и переменных (в скобках указаны соответствующие начальные значения):

$$\left.\begin{array}{lll}
\theta_0^* = 0{,}37\ (\theta_0^0 = 0{,}22), & \theta_1^* = 0{,}08\ (\theta_1^0 = 0{,}16), & \theta_2^* = 0{,}55\ (\theta_2^0 = 0{,}62),\\
s_0^* = 0{,}32\ (s_0^0 = 0{,}47), & s_1^* = 0{,}16\ (s_1^0 = 0{,}14), & s_2^* = 0{,}52\ (s_2^0 = 0{,}39),\\
k_0^* = 98{,}3\ (k_0^0 = 48{,}7), & k_1^* = 337\ (k_1^0 = 16{,}6), & k_2^* = 108\ (k_2^0 = 9{,}4),\\
x_0^* = 22{,}1\ (x_0^0 = 8{,}1), & x_1^* = 4{,}0\ (x_1^0 = 1{,}6), & x_2^* = 17{,}5\ (x_2^0 = 4{,}9),\\
f_0(k_0^*) = 51{,}08, & f_1(k_1^*) = 70{,}65, & f_2(k_2^*) = 25{,}37,\\
f_0'(k_0^*) = 0{,}239, & f_1'(k_1^*) = 0{,}143, & f_2'(k_2^*) = 0{,}117.
\end{array}\right\} \qquad (89)$$

Как видим, многократно возрастает фондооснащенность потребительского и особенно фондосоздающего секторов, в то время как фондооснащенность материального сектора увеличивается всего в 2 раза. Это позволило бы более чем в 3 раза увеличить удельный выпуск предметов потребления (напомним, в их состав входит и вооружение), при этом ВВП возрос бы в 2,9 раза.

Продолжительность переходного процесса

Момент времени t_1 окончания оптимального переходного процесса определяется по достижении фондовооруженностью фондосоздающего сектора оптимального стационарного значения k_1^*.

Уравнение (12) для фондовооруженности сектора в нашем случае имеет вид

$$\frac{dk_1}{dt} = -\lambda k_1 + s_1^*(t)(1+\gamma_1)A_1 k_1^{\alpha_1}, \ \ k_1(0) = k_1^0,$$

[3] По этой причине соответствующие места в таблице остались незаполненными.

подстановкой $k_1(t) = e^{-\lambda t}u(t)$ оно сводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{du}{dt} = s_1^*(t)(1+\gamma_1)A_1 e^{\lambda(1-\alpha_1)t} u^{\alpha_1}, \;\; u(0) = k_1^0,$$

которое имеет следующее решение:

$$u(t) = \left[(1-\alpha_1)(1+\gamma_1)A_1 \int_0^t s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau + (k_1^0)^{1-\alpha_1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha_1}},$$

поэтому

$$k_1^{1-\alpha_1}(t) = \left[(1-\alpha_1)(1+\gamma_1)A_1 \int_0^t s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau + (k_1^0)^{1-\alpha_1}\right] e^{-\lambda(1-\alpha_1)t}. \quad (90)$$

Поскольку $k_1(t_1) = k_1^*$, то из (90) получаем

$$(k_1^0)^{1-\alpha_1} e^{-\lambda(1-\alpha_1)t_1} = (k_1^*)^{1-\alpha_1} - (1-\alpha_1)(1+\gamma_1)A_1 e^{-\lambda(1-\alpha_1)t_1} \int_0^t s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau. \quad (91)$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, заменим

$$\int_0^{t_1} s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau = h s_1^* \int_0^{t_1} e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau = h s_1^* \frac{e^{\lambda(1-\alpha_1)t_1} - 1}{\lambda(1-\alpha_1)}. \quad (92)$$

Выражение (91) примет вид

$$(k_1^0)^{1-\alpha_1} e^{-\lambda(1-\alpha_1)t_1} = (1-h)(k_1^*)^{1-\alpha_1} + (k_1^*)^{1-\alpha_1} e^{-\lambda(1-\alpha_1)t_1},$$

откуда

$$t_1 = \frac{\ln\left(1 - \left(\frac{k_1^0}{k_1^*}\right)^{1-\alpha_1}\right) - \ln(h-1)}{\lambda(1-\alpha_1)}. \quad (93)$$

Используя данные (89), по формуле (93) при $h = 1{,}45$ получаем $t_1 = 20$ лет, т. е. столько занял бы сбалансированный переход от начального состояния ($k_0^0 = 48{,}7;\ k_1^0 = 16{,}6;\ k_2^0 = 9{,}4$) в конечное оптимальное стационарное состояние ($k_0^* = 98{,}3;\ k_1^* = 337;\ k_2^* = 108$).

Определение момента переключения $\hat{t}$

Момент переключения по параметру s_1 оценим косвенно, исходя из строения оптимального правила. До момента $\hat{t}$ параметр s_1 поддерживается примерно на одном и том же уровне 0,75. В момент переключения параметр принимает минимально возможное значение $\underline{s}_1(t) < s_1^*$, которое незначительно отличается от s_1^*. Поэтому

$$\int_0^{t_1} s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau = \int_0^{\hat{t}} s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau + \int_{\hat{t}}^{t_1} s_1^*(\tau) e^{\lambda(1-\alpha_1)\tau} d\tau \approx$$

$$\approx \frac{1}{\lambda(1-\alpha_1)}[0{,}75(e^{\lambda(1-\alpha_1)\hat{t}} - 1) + 0{,}15(e^{\lambda(1-\alpha_1)t_1} - e^{\lambda(1-\alpha_1)\hat{t}})] = \frac{1}{0{,}016}[0{,}75(e^{0{,}016\hat{t}} - 1) + 0{,}15(e^{0{,}016t_1} - e^{0{,}016\hat{t}})].$$

Однако этот же интеграл, согласно выражению (92), равен

$$\frac{h}{0{,}016}\cdot 0{,}16(e^{0{,}016t_1}-1).$$

При $h=1{,}45,\ t_1=20$ находим $\hat{t}\approx 5$.

Таким образом, продолжительность этапа ускоренного роста составит примерно 5 лет. За это время за счет усиленных инвестиционных вливаний фондовооруженность фондосоздающего сектора вырастет до уровня

$$\hat{k}_1=k_1^*(\hat{t})=\left[\frac{0{,}75(1+\gamma_1)A_1}{\lambda}(e^{0{,}08}-1)+(k_1^0)^{0{,}32}\right]^{\frac{1}{0{,}32}}e^{-0{,}25}=118{,}3,$$

увеличившись более чем в 7 раз по сравнению с первоначальным значением. За оставшиеся 15 лет до конца переходного процесса фондовооруженность должна была бы возрасти еще в 2,8 раза.

8. Выводы

В результате проведенного исследования на основе открытой трехсекторной модели экономики и с помощью принципа максимума Понтрягина было найдено *оптимальное динамическое правило распределения трудовых и инвестиционных ресурсов между секторами открытой трехсекторной экономики*. В качестве критерия использовался максимум дисконтированного удельного потребления.

Согласно оптимальному управляющему правилу переход экономической трехсекторной системы из первоначального состояния (k_0^0, k_1^0, k_2^0) в оптимальное стационарное состояние (k_0^*, k_1^*, k_2^*) осуществляется в два этапа. На каждом этапе обеспечивается сбалансированность по трудовым, материальным и инвестиционным ресурсам.

Если в начальный момент времени состояние системы и распределение трудовых и инвестиционных ресурсов значительно отличались от оптимальных, то необходим *этап ускоренного индустриального роста*. Этап начинается с трех переключений: параметр s_1 устанавливается на максимально возможном значении, s_2 — на наименьшем, параметр θ_2 — на значении, при котором удельный выпуск предметов потребления уменьшится до минимально допустимого уровня $\underline{c}$. Кроме того, в этот момент возможно переключение по коэффициенту квотирования импорта инвестиционных товаров γ_1.

На этом этапе максимально возможные объемы трудовых и инвестиционных ресурсов направляются в фондосоздающий сектор, в то время как фондовооруженность материального и потребительского секторов остается на первоначальном уровне. В результате система переходит в промежуточное состояние $(k_0^0, \hat{k}_1, k_2^0)$.

Момент перехода ко второму этапу $\hat{t}$ определяется из условия $\underline{\theta}_2\psi_1(\hat{t})=\theta_1^*(\hat{t})\psi_2(\hat{t})$. На этом этапе — *этапе замедленного индустриального роста* — усиленным образом растет фондовооруженность потребительского сектора, фондовооруженность фондосоздающего сектора «подтягивается» до оптимального стационарного значения k_1^*, фондовооруженность материального сектора возрастает ровно настолько, чтобы обеспечить потребности в материалах фондосоздающего и потребительского секторов и экспорт в объеме, необходимом для обеспечения импорта инвестиционных и потребительских товаров.

На заключительной фазе этапа в момент $\tilde{t}>\hat{t}$ происходит переключение по параметру θ_2 со значения $\underline{\theta}_2$ до максимально возможного значения $\overline{\theta}_2(\tilde{t})$, после чего продолжается его уменьшение $\left(\theta_2^*(t) = \dfrac{c^*}{f_2(k_2)}\right)$ вплоть до достижения в момент t_1 оптимального стационарного значения θ_2^*.

Момент окончания переходного процесса t_1 определяется как момент достижения фондовооруженностью фондосоздающего сектора своего оптимального стационарного значения k_1^*, т. е. $k_1^*(t_1) = k_1^*$.

Применение полученных теоретических результатов позволило построить ретроспективный сценарий возможного индустриального развития экономики России в 1991–2010 годы. В основе сценария — производственные функции секторов, найденные по данным за 1960–1990 годы и отражающие сложившийся за этот период технологический уклад.

Согласно сценарию на этапе ускоренного индустриального роста (1991–1995 годы) произошло бы интенсивное развитие фондосоздающего сектора за счет перелива в него 75% инвестиционных ресурсов, в результате фондовооруженность сектора к концу этапа возросла бы более чем в 7 раз. Оставшиеся 25% инвестиционных ресурсов использовались бы лишь на поддержание фондовооруженности материального и потребительского секторов на первоначальном уровне.

На втором этапе замедленного индустриального роста (1996–2010 годы) произошло бы гармоническое развитие всех секторов. За эти 15 лет фондовооруженность фондосоздающего сектора возросла бы еще в 2,8 раза, материального — в 2 раза, потребительского — более чем в 10 раз.

В целом за весь период (1991–2010 годы) осуществления индустриального сценария ВВП возрос бы в 2,9 раза, а удельный выпуск предметов потребления — более чем в 3 раза.

Поскольку используемая модель основана на отсутствии лага капиталовложений, а оптимальное правило — на мгновенных переключениях, то реальные сроки осуществления сценария могут заметно возрасти. Учет финансовых ограничений также увеличивает сроки. Ясно также, что такое масштабное развитие фондосоздающего сектора невозможно без прямой поддержки государства.

Проведенное исследование со всей непреложностью показывает, что России нужна была не шоковая терапия, а вторая индустриализация на базе новейших достижений науки и техники, т. е. то, что сейчас называют инновационным путем развития.

Список литературы

Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

Колемаев В. А. Трехсекторная модель экономики // Сб. науч. тр. Международной академии информатизации. М.: Копия-Принт, 1997.

Колемаев В. А. Математическая экономика. М.: Юнити, 1998, 2002, 2005.

Колемаев В. А. Моделирование макроэкономических процессов и систем. М.: Юнити, 2005.

Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, Физматгиз, 1969.

Phelps E. S. Golden Rules of Economic Growth. New York, W.W. Norton and Company, Inc., 1966.

Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly Journal of Economics*. 1956. № 70. P. 65–94.

Uzawa H. Optimal Growth in Two-Sector Model of Capital Accumulation // *Review of Economic Studies*. 1964. № 31. P. 1–24.