

Управление кредитным риском

Журнал продолжает публикацию консультации Дэана Фантацини, посвященной эконометрическому анализу финансовых данных в задачах управления риском. В данном номере публикуется первая часть материала, посвященного кредитному риску. В частности, вводятся основные понятия кредитного риска в контексте последних рекомендаций соглашения «Базель-II», описываются одномерные модели кредитного риска, связанные с моделированием и оценкой вероятности дефолта отдельного заемщика. Вторую часть материала по кредитному риску, завершающую всю консультацию, автор планирует посвятить многомерным моделям кредитного риска, позволяющим оценивать вероятность дефолта «портфеля заемщиков» (она будет опубликована в № 1 журнала за 2009 год).

Перевод оригинального англоязычного текста на русский язык выполнен А. В. Кудровым под научной редакцией С. А. Айвазяна.

1. Введение в управление кредитным риском

Что представляет собой кредитный риск, или риск нарушения обязательств по платежам? В статье [Crosbie, Bohn (2001)] этому понятию дается следующее определение: **Риск нарушения обязательств по платежам** — это неопределенность, связанная со способностью компании обслуживать свои долги и отвечать по взятым на себя финансовым обязательствам. При этом заранее невозможно идентифицировать те компании, которые смогут выполнить свои финансовые обязательства, и те, которые не смогут этого сделать. В лучшем случае мы лишь сможем дать вероятностную оценку кредитного риска. В результате компании, подверженные кредитному риску, обычно платят за пользование заемными средствами по процентной ставке, равной безрисковой процентной ставке, умноженной на коэффициент, пропорциональный вероятности нарушения обязательств по платежам, с помощью которого регулируется размер возмещения кредиторам за неопределенность, связанную с этими кредитными обязательствами.

В случае когда компания (заемщик) неспособна выполнить свои обязательства перед кредитором или один из контрагентов не имеет возможности следовать условиям финансового соглашения, мы говорим, что компания или контрагент находится в состоянии дефолта. Кредитный риск также включает риск, связанный с событиями, отличными от дефолта, а именно с движением кредитного рейтинга вверх или вниз.

Кредитный риск возникает в результате неопределенности, связанной со способностью (или с желанием) контрагента выполнять свои контрактные обязательства. Этот риск характерен для банковской коммерции. Отсутствие диверсификации кредитного риска в банках (в результате концентрации в определенных географических районах и промышленных секторах) в ряде случаев приводило к банкротству. Кроме того, при введении свопов и фьючерсных контрактов, а также в результате стремительного роста объемов внебиржевых рынков кредитный риск стал иметь ключевое значение при управлении инвестициями.

Компоненты кредитного риска определяются следующим образом.

• **Вероятность дефолта (ВД)**, которая может быть рассмотрена:

- с позиции двух простых событий: 1) платежеспособность и 2) неплатежеспособность заемщика. Вероятность дефолта в этом случае иногда называют *чистым риском дефолта*;
- с позиции ухудшения кредитного рейтинга, которое указывает на увеличение вероятности дефолта. Вероятность дефолта в этом случае иногда называют *риском миграции*, а риск дефолта является последним «поглощающим» состоянием.

• **Доля невозвращенных средств при дефолте по кредиту (ДНС(Д))**

В случае возникновения дефолта при условии наличия залогового обеспечения или каких-либо гарантий теряется не вся сумма кредита. Таким образом, мы приходим к понятию так называемой *нормы восстановления* (НВ) заемщика, которая определяется как доля всех кредитных обязательств заемщика и может быть покрыта в случае дефолта. При этом

$$\text{ДНС(Д)} = 1 - \text{НВ}.$$

• **Величина номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))**

Эта величина представляет собой сумму всех кредитных обязательств заемщика в случае его банкротства в результате реализации некоторого кредитного события (дефолта или миграции). Очевидно, что, если мы хотим определить ВНП(Д), следует рассмотреть всю позицию, подверженную кредитному риску:

- *Кредиты*: обеспеченные (например, ипотека) и необеспеченные (например, кредитные карты, беззалоговое кредитование домохозяйств, потребительское и коммерческое кредитование).
- *Облигации*: долговые ценные бумаги, выпускаемые компанией или государством на фиксированный период обращения и дающие инвестору право на возврат номинала таких ценных бумаг, а также на получение дополнительного процента от номинала (выплаты по этому проценту от номинала называют купонами).
- *Гарантии, выпущенные для клиентов*.
- *Внебиржевые производные ценные бумаги* (например, свопы) несут в себе риск того, что с контрагентом может произойти дефолт и он не сможет осуществить выплату по контракту.
- *Кредитные деривативы*. Внебиржевые производные ценные бумаги были введены специально для того, чтобы перераспределять кредитный риск от одного контрагента к другому; кредитные деривативы могут принимать разнообразные формы.

• **Дефолтная зависимость и/или миграционная зависимость**

Измерение такой зависимости — весьма сложная задача: исторических данных немного, но даже в том случае, если было бы доступно большее количество данных, одновременные дефолты в нескольких компаниях были бы редки. Эта область все еще требует тщательного изучения.

Среди всех *кредитных деривативов* дефолтный своп (ДС) является наиболее известным и наиболее торгуемым: покупатель дефолтного свопа периодически платит комиссию (купон) в обмен на обязательство продавца кредитного дериватива произвести оговоренные выплаты по определенному активу в случае реализации кредитного события для этого актива. Таким образом, покупатель дефолтного свопа может управлять (хеджировать) кредитным риском своего актива, не продавая его; в свою очередь продавец дефолтного свопа берет на себя забалансовый кредитный риск в спекулятивных целях.

Что касается *корзины (портфеля) кредитных деривативов*, то существуют долговые ценные бумаги, покрывающие потенциальный риск дефолта нескольких заемщиков: портфель из k дефолтных свопов, обеспеченные кредитные облигации (ОКО) и др. Для ОКО активы с кредитным риском (обычно это облигации или кредиты) объединяются в пул обеспечения, после чего риск пула обеспечения делится между траншами выпускаемых облигаций с разными степенями риска. В этом случае инвесторы несут кредитный риск залоговых активов.

Обеспеченные кредитные облигации используются для осуществления регулируемых арбитражных операций, поскольку они позволяют с помощью специального целевого механизма (СЦМ¹), перепаковывающего риск, удалять из баланса активы. Хедж-фонды часто используют ОКО в спекулятивных целях.

С лета 2007 года финансовые рынки и мировая экономика находятся в условиях резкого ограничения размеров кредитования, которое объясняется кризисом в США, связанным с субстандартными ипотечными кредитами. *Субстандартными ипотечными кредитами* называют кредиты, предоставленные заемщикам с более низким кредитным рейтингом, чем у первоклассных заемщиков. Многие из заемщиков субстандартных ипотечных кредитов с увеличением учетной ставки потерпели дефолт по своим выплатам, в это же время упали цены на жилье, что также сыграло на снижение стоимости залога. Во многих случаях субстандартные кредитные портфели были переупакованы в кредитные деривативы (например, в ОКО) и проданы инвесторам, таким, как хедж-фонды, стремящимся получить большую доходность на капитал. Эти хедж-фонды в результате дефолта многочисленных субстандартных ипотечных кредитов оказались в весьма сложном положении. Вследствие наличия в обороте банков безнадежных кредитов они стали неохотно выдавать кредиты. Рынок межбанковских кредитов, который является ключевым элементом финансовой системы, иссяк, и заимствования на нем в данный момент весьма дороги. Сложившаяся ситуация вызвала проблемы с ликвидностью в таких крупных банках, как Citigroup, Credit Suisse, JP-Morgan, Northern Rock (последний разорился), UBS и др.

Задача банка состоит в том, чтобы управлять рисками своих кредитных портфелей. Управление включает в себя серию мероприятий, в том числе удержание определенной величины резервного капитала на случай кризисных ситуаций, которая диктуется органами, надзорными за банковской деятельностью (для более подробной информации см. [BIS (2005)]). Существуют следующие **основные виды деятельности, направленные на управление рисками**:

- оценка риска кредитного портфеля;
- расчет величины регулирующего капитала и ее удержание;

¹ СЦМ, называемый также *специальным целевым объектом* (СЦО), — это компания или юридическое лицо, созданные для достижения некоторых узкоопределенных или временных целей.

- определение экономического капитала для внутренних целей;
- обеспечение диверсификации портфеля, а также выявление очагов или концентраций рисков;
- уменьшение концентраций риска путем хеджирования кредитными деривативами;
- приобретение новых кредитных рисков или «разгрузка» старых;
- сопоставление скорректированных рисков эффективностей различных секторов портфеля;
- уменьшение величины резервного капитала путем перемещения определенных кредитных рисков вне баланса банка с помощью структурированных финансовых продуктов, таких, как ОКО.

**2. Оценка кредитного риска:
ожидаемые, неожиданные убытки и экономический капитал**

В процессе оценки кредитного риска важно различать ожидаемые и неожиданные убытки:

- **Ожидаемые убытки** (ОУ), т. е. математическое ожидание $E(L)$ фактических убытков L . Убытки такого рода не представляют никаких проблем для банка, поскольку если фактические убытки L в точности равнялись бы ожидаемым убыткам

$$L \equiv ОУ,$$

для банка не было бы никаких негативных последствий. Если бы банк отложил резервный капитал, размер которого равен ОУ, то каких-либо неожиданных изменений величины прибыли в этом случае не произошло бы. Кроме того, банк эффективно покрывает ожидаемые убытки, взимая их со своих заемщиков в форме премии за риск. Это явным образом происходит, например, при ценообразовании кредитов, когда заемщик платит премии, зависящие от его уровня кредитоспособности. В случае облигаций купонные платежи являются неявными рискованными премиями.

- **Неождаемые убытки** (НУ). Риск-менеджеры в большей степени беспокоятся об убытках, которые превышают $E(L)$, т. е. о неожиданных убытках:

$$НУ = L - ОУ > 0.$$

Ожидаемые убытки (ОУ) измеряются с помощью *математического ожидания распределения, описывающего L* , а неожиданные убытки (НУ) будем измерять с помощью процентной точки этого приближающего распределения, т. е. с помощью *границы потерь* уровня α ($ГП_\alpha$). Следовательно, для того чтобы определить полный потенциал возможных убытков, необходимо рассмотреть распределение убытков L и, исходя из этого распределения, вычислить все требуемые меры риска.

Используя более формальные математические обозначения, рассмотрим фиксированный период времени $[0, T]$ и обозначим через τ_i случайную величину, отвечающую моменту дефолта i -го заемщика. Индикатор возникновения дефолта Y_i — это бернуллиевская случайная величина, определенная как $Y_i = I_{\{\tau_i \leq T\}} = \begin{cases} 1 & \text{если } \tau_i \leq T \\ 0, & \text{если } \tau_i > T \end{cases}$, и для нее справедливы следующие соотношения:

$$P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = P(\tau_i \leq T) = F_{\tau_i}(T) \equiv \text{ВД}_i,$$

где $F_{\tau_i}(\cdot)$ — функция распределения случайной величины τ_i .

В случае простой модели, в которой рассматриваются только убытки, возникающие в результате дефолта заемщика(ов), имеем

$$\text{Убыток в портфеле} = L = \sum_{i=1}^m \text{ДНС}(D)_i \cdot Y_i \cdot \text{ВНП}(D)_i.$$

Предполагая, что все $\text{ДНС}(D)_i$ и $\text{ВНП}(D)_i$ детерминированы, и усредняя правую часть этого выражения, получим

$$E(L) = \sum_{i=1}^m \text{ДНС}(D)_i \cdot \text{ВД}_i \cdot \text{ВНП}(D)_i.$$

Обозначив функцию распределения убытка L через $F_L(\cdot)$, так что $P(L \leq x) = F_L(x)$, можно определить границу потерь уровня α как

$$\text{ГП}_\alpha = q_\alpha(F_L) = F_L^{-1}(\alpha),$$

где используется обозначение $q_\alpha(F_L)$ или $q_\alpha(L)$ для квантилей уровня α функции распределения убытка L , а $F_L^{-1}(\cdot)$ определяет обобщенное обращение $F_L(\cdot)$.

Перед тем как перейти к нормативным и эконометрическим аспектам управления кредитным риском, хотелось бы сказать несколько слов относительно экономического капитала. **Экономический капитал** — это капитал, требуемый банку для того, чтобы ограничить вероятность банкротства до данного доверительного уровня на заданный промежуток времени. Несмотря на то что расчет величины регулирующего капитала основан главным образом на внешних правилах, устанавливаемых надзорными в банковской сфере органами и направленными на обеспечение некоторого уровня «игрового поля», экономический капитал — это попытка оценить риск с точки зрения экономических реалий. Модели экономического капитала более реалистичны, чем модели регулирующего капитала. Во многих крупных банках имеются проекты разработки таких моделей. В целом экономический капитал предлагает расширенный язык для обсуждения ценовой оценки риска, а также для оценки доходности на рисковый капитал. Банк, имеющий хорошую модель экономического капитала, может более эффективно использовать свой капитал.

Следующая мера риска наиболее часто используется в моделях экономического капитала для кредитного риска:

$$\text{ЭК}_\alpha = \text{ГП}_\alpha - E(L).$$

Иногда сама эта мера называется *экономическим капиталом*. Это обосновано следующими соображениями: поскольку ожидаемые потери уже включены в цену кредита, мера служит хорошим показателем величины рискового капитала, необходимого для обеспечения платежеспособности банка с данной вероятностью в течение заданного периода времени. Например, для компании, желающей придерживаться Аа стандарта Moody's в течение одного года, установлен уровень вероятности $\alpha = 99,97\%$, поскольку компании с рейтингом Аа Moody's имеют вероятность дефолта в течение одного года, равную 0,03%.

Подводя итог, скажем, что при управлении кредитным риском помимо задач, аналогичных тем, что возникают при управлении рыночным риском, существует и ряд специфических задач, в частности:

- *Данные*: недостаток публичной информации, касающейся кредитного качества заемщиков. Рейтинговые агентства играют важную роль, но не все кредитные риски рейтингуются.
- *Более длинный временной горизонт* (обычно не менее одного года).
- *Функции распределения убытков обычно сильно скошены*, имеют «длинный правый хвост», что указывает на частые малые и редкие большие убытки.
- *Моделирование зависимости между убытками в кредитном портфеле более важно, чем при управлении рыночным риском*, поскольку на «хвост» функции распределения убытка сильно влияет спецификация зависимости между дефолтами.

3. Регулирование кредитных рисков: исторический процесс и соглашение «Базель-II»

В Первом Базельском соглашении предприняты первые шаги к созданию международных стандартов расчета минимального регулирующего капитала. Однако предложенный в нем подход был довольно грубым и недостаточно дифференцированным: основное внимание в нем уделялось различению кредитного риска государственных, банковских и ипотечных облигаций небанковского частного сектора (имеющих низкий риск) или коммерческих кредитных обязательств (имеющих высокий риск). В этом соглашении практически ничего не говорилось относительно дифференциации кредитного риска в рамках классификации коммерческих кредитов. Для всех коммерческих кредитов неявно требовался 8%-й совокупный резервный капитал вне зависимости от кредитоспособности заемщиков, их внешнего кредитного рейтинга, предложенных гарантий уплаты займа, срока кредита и др. Кроме того, для высокорискованных кредитов был установлен слишком низкий уровень резервного капитала, а для низкорискованных — слишком высокий, и эта ошибочная оценка уровня резервного капитала создала у банков стимул для перехода к портфелям, составленным из кредитов с недооцененным уровнем регулирующего рискового капитала, т. е. к портфелям с повышенным риском. В первом соглашении ничего не сказано также о политике снижения рисков.

Цель нового базельского соглашения («Базель-II») заключается в том, чтобы скорректировать процедуру оценки уровня резервного капитала, принятую в соглашении «Базель-I», и сделать ее более гибкой и чувствительной к риску. Для оценки кредитных рисков банки могут использовать *стандартизированный подход*, введенный в соглашении «Базель-I», при этом в крупных банках имеется возможность выбора в пользу *подхода внутренних рейтингов* (ПВР).

3.1. Стандартизированный подход

При использовании стандартизированного подхода риск актива вычисляется путем умножения величины номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д)) на соответствующий вес риска. Веса риска определяются внешними рейтингами заемщиков (табл. 1).

Таблица 1

Вес риска, %, при различных кредитных рейтингах

Активы	От AAA до AA-	От A+ до A-	От BBB+ до BBB-	От BB+ до BB-	Ниже BB-	Без рейтинга
Государство	0	20	50	100	150	100
Банк:						
вариант 1	20	50	100	100	150	100
вариант 2	20	50	50	100	150	100
Корпорации	20	50	100		150	100
Розничный портфель				75		
Кредиты с залогом				35		
Коммерческие кредиты				100		
Просроченные ссуды с залогом				100		
Другие просроченные ссуды				150		

Например, корпоративные облигации с рейтингами от AAA до AA- имеют вес 20%, а у корпоративных облигаций с рейтингами от BBB+ до BB- вес равен 100%. Розничные продукты (овердрафты и кредитные карты) имеют вес 75%, а кредиты с залоговой собственностью — 35%.

После того как риск каждого входящего в портфель актива вычислен, можно вычислить риск всего кредитного портфеля, равный сумме рисков активов, его составляющих. В этом случае регулирующий капитал определяется путем умножения риска портфеля на величину, известную как *норма покрытия Куки*, или *норма покрытия МакДонафа*, которая приблизительно равна 0,08.

3.2. Подход внутренних рейтингов (ПВР)

Существует две разновидности подхода внутренних рейтингов (*базовый ПВР* и *усовершенствованный ПВР*), но в различных странах они реализуются по разным схемам.

Основная идея этого подхода заключается в том, что банки самостоятельно оценивают вероятность дефолта (ВД) заемщиков. Также в некоторых случаях (например, при использовании усовершенствованного ПВР) банки могут самостоятельно оценивать долю невозвращенных средств при дефолте по кредиту (ДНС(Д)). Такие оценки должны основываться на количественных моделях, которые с точки зрения регулятора являются приемлемыми.

В соглашении «Базель-II» величина капитала на покрытие кредитных рисков определяется формулами, в которых в качестве исходных данных используются оцененные ВД, ДНС(Д) и ВВП(Д) (для более подробной информации см. [BIS (2005)]).

Вкратце, в любом ПВР существует пять основных элементов:

- 1) внутренняя рейтинговая модель;
- 2) компоненты риска;
- 3) весовая функция рисков;

- 4) перечень минимальных требований для применения ПВР;
- 5) обзор случаев соблюдения минимальных требований, предоставленный надзорными органами.

Среди **рисковых компонентов ПВР** выделим следующие.

- *Вероятность дефолта (ВД)*: может быть рассчитана на основании исторического опыта или на основании скоринговых моделей оценки кредитоспособности.
- *Величина номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))* для балансовых сделок равна номинальной сумме (балансовой стоимости) невыплаченной задолженности. В соответствии с принципами базового ПВР (см. раздел Pillar II в [BIS (2005)]) в качестве факторов, смягчающих последствия невыплат кредитов и корректирующих величину ВНП(Д) (рекомендации относительно величины корректировки см. в разделе Pillar II из [BIS (2005)]), следует выделить залоги, кредитные деривативы или гарантии, балансовые взаимозачеты. Для забалансовой деятельности ВНП(Д) рассчитывается на основе подхода BIS I, который позволяет результаты внебалансовой деятельности переводить в эквивалент результатов балансовой деятельности с использованием коэффициентов перехода BIS I (более подробную информацию см. в главе 20 из [Saunders (1997)]).
- *Доля невозвращенных средств при дефолте по кредиту (ДНС(Д)) при использовании базового ПВР* для необеспеченных преимущественных требований устанавливается равной 45%, а для субординированных требований — равной 75%. При расчете ДНС(Д) для обеспеченных требований следует использовать комплексный подход в рамках стандартизированной модели, а именно:

$$\text{ДНС(Д)}^* = \text{ДНС(Д)} \times (\text{ВНП(Д)}^* / \text{ВНП(Д)}),$$

где ДНС(Д) — доля невозвращенных при дефолте средств для необеспеченных преимущественных требований (45%);

ВНП(Д) — текущее значение величины номинальных потерь при дефолте;

ВНП(Д)* — значение величины номинальных потерь при дефолте после снижения риска (более подробную информацию см. в [BIS (2005)]).

• *ДНС(Д) при использовании усовершенствованного ПВР* равна оценке фактической ДНС(Д), полученной банком.

• *Эффективный срок долгового обязательства (ЭСДО)*: для базового ПВР эффективный срок долгового обязательства равен 2,5 годам; для усовершенствованного ПВР — максимуму из одного года и величины, полученной с помощью весовой функции, определяемой денежными потоками:

$$\sum_t t \cdot \text{ДП}_t / \sum_t \text{ДП}_t,$$

где ДП_t — денежный поток, поступающий по договору в момент времени *t*. Во всех случаях ЭСДО будет не более 5 лет.

Веса рисков корпоративных, государственных и банковских обязательств зависят от оценок ВД, ВНП(Д), ДНС(Д), а в некоторых случаях и от ЭСДО. Описание «линейки» весов риска

активов выходит за рамки этой консультации, и для получения более полной информации рекомендуется использовать материалы [BIS (2005)].

4. Обзор моделей кредитного риска

Перечислим задачи, о которых будет рассказано в этом разделе.

- Как вычислять вероятность дефолта?
- Как вычислять долю невозвращенных средств при дефолте по кредиту (или норму восстановления)?
- Как вычислять величину номинальных потерь при дефолте?

Далее представлены основные подходы к решению этих задач.

• Экспертный подход

Решение о том, выдавать или не выдавать кредит, выносится локальным или отраслевым инспектором по кредитам либо локальным или отраслевым менеджером по связям с клиентами. Такой эксперт может учитывать разные факторы риска, но обычно концентрирует внимание на так называемых **пяти «С» кредита**:

- *Характер.* Рассматривается репутация компании, т. е. мера ее готовности возратить долг и история погашения обязательств. Как правило, большой срок существования компании является весомой составляющей для репутации надежного заемщика.
- *Капитал.* Капиталовложения владельцев и отношение этих капиталовложений к величине кредита (плечо). Эти показатели можно использовать в качестве предикторов в моделях, описывающих вероятность банкротства.
- *Способность погашать задолженность* отражает устойчивость или неустойчивость доходов заемщика. Если погашение задолженности по контракту представляет собой постоянный во времени поток, а доходы неустойчивы (имеют большое стандартное отклонение), то могут возникать периоды, когда способность компании погашать задолженность будет ограничена.
- *Обеспечение.* В случае дефолта по кредиту финансовые организации (кредиторы) требуют от заемщика предоставленное таковым залоговое имущество. Большее преимущество требований и большая рыночная стоимость залогового имущества по кредиту влекут его меньшую рискованность.
- *Экономические условия (циклы).* Состояние бизнес-цикла — важный элемент при определении кредитного риска, в особенности для циклично функционирующих отраслей.

Мы рассмотрели достаточно старый подход, который в современных условиях используется нечасто, поэтому не будем приводить его в деталях (более подробную информацию см. в [Libby (1975)], [Libby et al. (1987)], [Treacy, Carey (2000)]).

• Подходы, основанные на кредитном скоринге

Основной принцип функционирования таких подходов заключается в идентификации ключевых факторов, определяющих вероятность дефолта, и получении количественной

оценки действия совокупности этих факторов путем их комбинированного взвешивания. Эта оценка может быть использована в системе классификации. В некоторых случаях полученная количественная оценка может быть буквально истолкована как вероятность дефолта.

Существуют четыре методологические формы многомерных моделей кредитного скоринга:

- 1) линейная модель вероятности;
- 2) логит-модель;
- 3) пробит-модель;
- 4) модели, полученные на основе дискриминантного анализа.

В работе [Mester (1997)] представлен достаточно широкий обзор примеров использования моделей кредитного скоринга: 97% банков используют кредитный скоринг при рассмотрении заявлений на выдачу кредитных карт и лишь 70% — при рассмотрении заявлений на получение кредитов предприятиями малого бизнеса. Однако, используя модели кредитного скоринга, банки проявляют ряд заблуждений: во-первых, некоторые из этих моделей линейны, тогда как более адекватными для описания банкротства могут быть нелинейные модели. Во-вторых, такие модели главным образом основаны на бухгалтерских коэффициентах. В большинстве стран данные бухгалтерского учета фиксируются в дискретные моменты времени и представлены в форме, соответствующей принципам бухгалтерского учета, поэтому сомнительно, что модели кредитного скоринга в состоянии распознать компании, чье состояние может стремительно ухудшиться. В-третьих, растущая сложность финансово-экономических связей и взаимодействия мировых экономик может ухудшить качество прогнозирования простыми моделями кредитного скоринга. Как сообщается в работе [Mester (1997)], при анализе деятельности 33 банков оказалось, что в 56% из них системы кредитного скоринга, используемые при рассмотрении заявлений на выдачу кредитных карт, не распознали низкокачественные кредиты. Если модели кредитного скоринга дают неточные результаты оценки относительно однородных кредитов (кредитных карт), то как с помощью таких моделей можно оценивать денежноемкое и сложное по структуре бизнес-кредитование?!

В заключение хотелось бы отметить, что специфическая природа этих моделей и их слабая взаимосвязь с существующей теорией финансов — те особенности, которые, вероятно, в наибольшей степени беспокоят экономистов. Тем не менее указанные модели по-прежнему широко используются в финансовом секторе (см. [Altman, Sabato (2007)] и ссылки в этой работе). Более подробно модели кредитного скоринга рассмотрены в работах [Altman (1968)], [Fuertes, Kalotychou (2006)], [Rodriguez P., Rodriguez A. (2006)], [Fantazzini et al. (2008a, b)].

• **Модели панельных данных**

Панельные данные сочетают в себе как данные пространственного типа, так и данные типа временных рядов. Исследования по использованию моделей панельных данных в финансах имеют непродолжительную историю. В работах, представленных в рамках этих исследований, для оценки вероятности дефолта по кредитам, выданным малым и средним предприятиям, предлагаются модели панельных данных как со случайным, так и с фиксированным эффектом. Учет наличия таких качественных особенностей, как, например, характе-

ристики бизнес-сектора, качество управления, позволяет объяснить, почему среди компаний *A* и *B*, имеющих одинаковое финансовое положение и структуру долга, одна оказывается в состоянии дефолта, а другая продолжает выполнять свои долговые обязательства. Вопрос, способствует ли учет неоднородности компаний или бизнес-секторов построению моделей с более качественными оценками вероятности дефолта, весьма актуален для финансовых организаций и рейтинговых агентств, большинство из которых главным образом заинтересовано в ответе на вопрос: «*Когда возникнет дефолт?*» нежели «*Почему возникнет дефолт?*» Более того, использование байесовского подхода для этих моделей позволяет учитывать априорные знания (например, рекомендации аналитиков). Посвятим этим моделям раздел 6.

• Внешние и внутренние рейтинговые системы

Построение кредитных рейтингов является традиционным подходом к оценке кредитного риска. Системы построения кредитных рейтингов основаны, как правило, на качественных и количественных оценках. Итоговый рейтинг вычисляется не на основании каких-либо математических моделей, а исходя из общих соображений и опыта. Рейтинг представляет собой категорию, которая описывает правдоподобность дефолта, однако при его использовании всегда надо иметь в виду, что могут быть выбраны разные критерии для присвоения того или иного рейтинга. Рейтинговые системы нельзя рассматривать как системы точной оценки кредитного качества; кроме того, кредитный рейтинг во многом зависит от мнения специалиста по его оценке.

В целом, кредитные рейтинги основываются, в большей или меньшей степени, на оценках следующих элементов:

- 1) возможность выплаты — способность и готовность заемщика выполнять свои обязательства в соответствии с тем, что указано в кредитном договоре;
- 2) характер и обеспечение кредитного обязательства;
- 3) защита, предусмотренная обязательствами при банкротстве, реорганизации или в других случаях, упомянутых в законах, касающихся прав кредиторов, в частности в законе о банкротстве.

Рейтинг выражается в терминах риска дефолта. Как правило, рейтинговятся приоритетные облигации. Однако в некоторых случаях рейтинг присваивается и облигациям более низкого уровня (непреимуществом). В основном их рейтинг меньше, чем рейтинг преимущественных облигаций, что отражает более низкий приоритет исполнения обязательств в случае банкротства. В связи с этим рейтинг, присваиваемый обязательствам с низким приоритетом исполнения, может не соответствовать формальному определению своей категории.

В качестве примера системы категорий рейтинга кратко опишем систему кредитных рейтингов, используемую агентством Standard and Poor's:

AAA. Это самый высокий рейтинг, присваиваемый агентством S&P. Заемщик обладает исключительно высокой способностью своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

AA. Этот рейтинг лишь в небольшой степени отличается от самого высокого рейтинга, присваиваемого агентством S&P. Заемщик обладает очень высокой способностью своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

A. Обязательства, которым присваивается рейтинг «А», более чувствительны к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях, чем обязательства с более высоким рейтингом. Заемщик имеет умеренно высокую способность своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства.

BBB. Заемщик с таким рейтингом имеет достаточную способность своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства. Однако такой заемщик обладает более высокой чувствительностью к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях, чем более высокие рейтинги «AAA», «AA» и «A».

BB. По сравнению со спекулятивными обязательствами², имеющими более низкие рейтинги (чем «AAA», «AA», «A» и «BBB»), обязательства с этим рейтингом наименее подвержены неплатежам. Однако у заемщика с таким рейтингом более высокая чувствительность к воздействию неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях, которые могут отрицательно повлиять на его способность своевременно и полностью выполнять свои долговые обязательства, чем у заемщика, имеющего более высокий рейтинг.

B. Обязательства с рейтингом «B» в большей степени подвержены неплатежам, чем обязательства с рейтингом «BB», но в текущий момент заемщик с рейтингом «B» способен исполнить свои обязательства в срок и в полном объеме. Однако у таких обязательств имеется более высокая уязвимость при наличии неблагоприятных коммерческих, финансовых и экономических условий, чем у обязательств с более высоким рейтингом.

CCC. На данный момент существует потенциальная возможность невыполнения эмитентом своих долговых обязательств; их своевременное выполнение в значительной степени зависит от благоприятных коммерческих, финансовых и экономических условий. В случае неблагоприятных перемен в коммерческих, финансовых и экономических условиях весьма маловероятно, что заемщик сможет выполнить свои обязательства в срок и в полном объеме.

CC. Заемщик с таким рейтингом в настоящее время имеет высокую вероятность невыполнения своих долговых обязательств.

C. Для субординированного кредита или иных обязательств с рейтингом «C» существует очень большая вероятность их неисполнения. Рейтинг «C» может быть присвоен заемщику, в отношении которого возбуждена процедура банкротства или предпринято аналогичное банкротству действие, но платежи или выполнение долговых обязательств продолжаются. Рейтинг «C» может быть также присвоен выпускам привилегированных акций в случае возникновения в будущем долгов по выплате дивидендов или недостатка средств для исполнения иных обязательств, предусмотренных привилегированными акциями, хотя в текущий момент заемщик выполняет все свои обязательства в срок и в полном объеме.

D. Дефолт по долговым обязательствам. Рейтинг «D» присваивается заемщику в том случае, если выплаты по обязательствам не производятся и аналитики агентства S&P полагают, что такие выплаты не будут сделаны даже в льготный период. Рейтинг «D» присваивается:

² К классу спекулятивных относят обязательства, которым присваиваются рейтинги «BB», «B», «CCC», «CC» и «C».

а) заемщику, на которого подана петиция о банкротстве;
б) заемщику, который признан банкротом или в отношении которого предприняты действия, аналогичные банкротству, в случае, если он отказывается от выплат по своим обязательствам.

Далее мы не будем рассматривать рейтинговые системы, поскольку их детальный анализ выходит за рамки этой консультации. Для получения более полной информации относительно рейтинговых систем обратитесь к работам [Treacy, Carey (2000)], [BIS (2005)], [Griep, De Stefano (2001)], а также к технической документации рейтинговых агентств Standard and Poor's, Moody's и Fitch, которую легко можно найти в Интернете.

• Структурные модели

Иногда ценные бумаги, выпущенные той или иной компанией, оцениваются с помощью моделей мертоновского типа (или структурных моделей), основанных на структурных переменных компании (т.е. на значениях, отражающих состояние ее активов и пассивов). Первые работы, в которых были изложены модели этого типа, появились в начале 70-х годов (см. [Merton (1970)], [Merton (1977)], [Bielecki, Rutkowski (2002)] и [Bharath, Shumway (2008)]). Как в работе [Black, Scholes (1973)], так и в работе [Merton (1974)] отмечается, что корпоративные облигации могут быть оценены так же, как простые ванильные опционы. Излишне говорить, что использование формулы Блэка–Шоулса для ценообразования ванильных опционов требует некоторых основополагающих предположений относительно поведения базового актива, безарбитражности и возможности хеджирования в любой момент времени. Кроме того, недавние разбирательства по дефолтам таких транснациональных корпораций, как «Энрон», «Пармалат» и «Вордлком», четко показали, насколько бухгалтерские данные могут быть искажены и как они могут быть далеки от подлинного финансового положения компании. Когда имеют место финансовые мошенничества, модели, использующие бухгалтерские данные для прогнозирования вероятности дефолта (например, модели мертоновского типа), не могут быть применены, поскольку их прогнозы абсолютно ненадежны. Во избежание подобных проблем был предложен иной подход, в котором используются только курсовые стоимости акций, а также возникает возможность при моделировании динамики курсовой стоимости акций использовать не только нормальное распределение. Более подробно эти модели представлены в разделах 7.3, 7.4 и 8.

5. Оценка качества моделей: оперативная кривая, площадь под ней и функции потерь

Для того чтобы сравнивать различные модели, в эмпирической литературе, как правило, используются критерии, основанные на статистических тестах (см. [Burnham, Anderson (1998)]), на количественных функциях (см. [Akaike (1974)], [Schwarz (1978)], [Bernardo, Smith (1994)], [Varpić (1998)]), на функциях потерь (см., например, [Kohavi, Provost (1998)]), а также вычислительные критерии (см., например, [Efron (1979)], [Hastie et al. (2001)]). Обзор подходов к сравнительному анализу моделей см. в [Giudici (2003)].

Повсеместное распространение вычислительных методов привело к более интенсивному развитию критериев выбора модели. Такие критерии обычно основаны на разбиении имеющейся выборки на две подвыборки: «обучающую» и «экзаменующую». По первой вы-

борке оцениваются параметры, вторая выборка используется для оценки дееспособности модели. При этом возможно сравнение моделей разной структуры.

Сосредоточимся на результатах, полученных из таблицы классификации подходов к прогнозированию, которую назовем таблицей «факт–прогноз» (см. [Kohavi, Provost (1998)]). Как правило, эта таблица обладает тем преимуществом, что с ее помощью можно легко сравнивать различные модели, но, с другой стороны, для такого сравнения необходима аккуратная формализация и математическая строгость.

Таблица содержит информацию о фактических и прогнозируемых классах, полученных в результате классификации. Эффективность модели обычно оценивается на основании данных из этой таблицы. В табл. 2 представлена таблица «факт–прогноз» для двух классов³.

Таблица 2

Теоретическая таблица «факт–прогноз»

Факт \ Прогноз	Неплатежеспособные компании	Платежеспособные компании
Неплатежеспособные компании	<i>a</i>	<i>b</i>
Платежеспособные компании	<i>c</i>	<i>d</i>

В контексте предмета нашего исследования элементы таблицы имеют следующий смысл:

- a* — количество правильных прогнозов того, что компания неплатежеспособна;
- b* — количество неправильных прогнозов, утверждающих, что компания платежеспособна;
- c* — количество неправильных прогнозов, утверждающих, что компания неплатежеспособна;
- d* — количество правильных прогнозов того, что компания платежеспособна.

Важным инструментом оценки эффективности модели прогнозирования вероятностей является **кривая соотношений правильной и ложной классификации объектов**, так называемая **оперативная кривая**⁴ (ОК), рассмотренная, в частности, в работах [Metz, Kronman (1980)], [Goin (1982)] и [Hanley, McNeil (1983)]. При условии, что нам заданы таблица «факт–прогноз» и пороговое значение (для отнесения к тому или иному классу), оперативная кривая строится на основе совместных частот правильных прогнозов и фактических событий, совместных частот неправильных прогнозов и фактических событий. Точнее, эта кривая строится на основании следующих условных вероятностей:

- **чувствительность:** $a/(a + b)$ — доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что в действительности компания и была неплатежеспособной;

³ Рассуждения проводятся в контексте схемы проверки двух простых гипотез: H_0 — компания в состоянии дефолта (основная гипотеза) и H_1 — компания платежеспособна (конкурирующая гипотеза). Поэтому понятия «позитив» и «негатив» означают соответственно принятие и отклонение основной гипотезы H_0 .

⁴ В англоязычной литературе кривая соотношений правильной и ложной классификации объектов называется Receiver Operating Characteristic curve или ROC curve.

- *специфичность*: $d/(c + d)$ — доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что в действительности она и была платежеспособной;
- *ложная позитивность* (или 1-специфичность): $c/(c + d)$ — доля случаев, в которых спрогнозирована неплатежеспособность компании, при условии, что компания была платежеспособной (ошибка II рода);
- *ложная негативность* (или 1-чувствительность): $b/(a + b)$ — доля случаев, в которых спрогнозирована платежеспособность компании, при условии, что компания была неплатежеспособной (ошибка I рода).

Оперативная кривая строится следующим образом: каждому фиксированному пороговому значению ставится в соответствие точка на декартовой плоскости, причем по оси x откладываются значения ложной позитивности (или 1-специфичности), также называемой *нормой ложной тревоги*, а по оси y — значения чувствительности, также называемой *нормой попадания* (рис. 1). Следовательно, каждая точка на этой кривой будет отвечать некоторому фиксированному пороговому значению. А значит, ОК может быть использована для выбора порогового значения, уравнивающего чувствительность и специфичность. В терминах сравнения моделей наилучшей из двух кривых признаем ту, которая расположена левее (в идеальном случае эта кривая совпадает с осью y).

Особенность хорошей модели состоит в том, что она имеет:

- *большую* (насколько это возможно) *норму попадания* (правильная классификация заемщика в качестве потенциального банкрота);

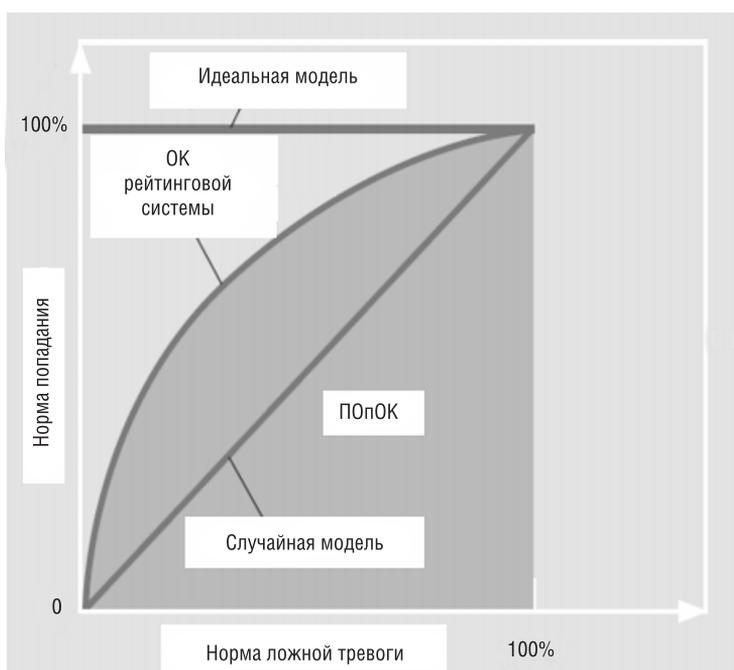


Рис. 1. Оперативная кривая (ОК) и площадь области под ней (ПОпОК)

- малую (насколько это возможно) норму ложной тревоги (неправильная классификация кредитоспособного заемщика как потенциального банкрота).

Для того чтобы проанализировать мощность дискриминации рейтинговой системы независимо от выбранного порогового значения, норма ложной тревоги и норма попадания рассчитываются для всех возможных пороговых значений. Точки, вычисленные таким образом, и будут составлять ОК.

Чем круче изменяется кривая, тем более точна рейтинговая система. Для идеальной рейтинговой системы ОК будет расположена на траектории, соединяющей точки (0; 0), (0; 1) и (1; 1). В случае чисто случайной рейтинговой системы ОК будет расположена вдоль прямой, соединяющей точки (0; 0) и (1; 1).

Однако несмотря на то, что ОК не зависит от типа распределения по классам или потерь, связанных с ошибочной классификацией (см. [Provost et al. (1998)]), координаты точек, лежащих на оперативной кривой, зависят от пороговых значений, отделяющих платежеспособные компании от неплатежеспособных. Опубликованы работы (см., например, [Buckland et al. (1997)]), в которых предлагается определять область под ОК как меру эффективности прогнозирования с помощью бутстреп-доверительных интервалов. Область под ОК всегда заключена в квадрате с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0) и (1; 1). Площадь области под ОК изменяется в пределах от нуля до единицы. Чем ближе значение этой площади к единице, тем более точна рейтинговая система.

Было показано, что площадь под эмпирической ОК, рассчитанная методом трапеций, совпадает с U-статистикой Манна–Уитни, используемой для сравнения распределений двух выборок (см. [Bamber, 1975]). В работе [Hanley, McNeil (1983)] используются некоторые свойства этой непараметрической статистики для сравнения двух мер области под ОК, соответствующих двум разным методам, примененным к одной и той же совокупности данных. Аналогичный подход предложен в работе [DeLong et al. (1988)].

Кроме того, в работе [Fielding, Bell (1997)] представлены разнообразные **критерии эффективности, зависящие от порогов**. Следуя этим критериям, оптимальное значение порога определяется на основании:

- максимизации каппа (*P-kappa*) (более подробную информацию см. в [Fielding, Bell (1997)]);
- минимизации разности между чувствительностью и специфичностью (в работе [Schröder, Richter (1999)] эта разность называется *P-fair*);
- максимизации нормы правильной классификации, или *P-opt*, которая вычисляется на основании оперативной кривой (см. [Zweig, Campbell (1993)]) и учитывает значения как ложно позитивных, так и ложно негативных прогнозов;
- фиксированного порогового значения $p = 0,5$, которое является эталонным в финансовой литературе.

Более того, как отмечает Базельский комитет по банковскому надзору, величина и число правильных прогнозов являются вопросами, которыми должны заниматься надзорные за банковской деятельностью органы. Эти вопросы могут изучаться с помощью так называемой **функции потерь**. Следовательно, в этом контексте, учитывая как таблицу «факт–прогноз»,

так и функцию потерь, мы хотим выбрать наилучшую модель прогнозирования. В частности, согласно структурной схеме, предложенной в [Granger, Pesaran (2000)], платежная матрица, суммирующая результаты принятия решений, имеет вид, представленный в табл. 3.

Таблица 3

Платежная матрица

Прогноз \ Факт	$y_{i,t} = 1$	$y_{i,t} = 0$
	$\hat{y}_{i,t} = 1$ ($\hat{p}_{i,t} > \text{Порог}$)	0
$\hat{y}_{i,t} = 0$ ($\hat{p}_{i,t} \leq \text{Порог}$)	$\theta_{i,t}^1$	0

В таблице $\theta_{i,t}^0$ — издержки банка в ситуации, когда он не выдает кредит компании i , которая в действительности не находится в состоянии дефолта, а величина $\theta_{i,t}^1$ (обязательства перед банком, умноженные на норму восстановления) — убыток в ситуации, когда кредит компании i предоставляется, но она оказывается в состоянии банкротства. Потери банка при правильном прогнозе равны нулю. Это позволяет выписать следующее выражение для функции финансового убытка (см. [Fantazzini, Figini (2009a, b)], [Fantazzini et al. (2008a)]:

$$Loss = \sum_i \sum_t \theta_{i,t}^1 y_{i,t} (1 - I\{\hat{p}_{i,t} > \text{Порог}\}) + \theta_{i,t}^0 (1 - y_{i,t}) I\{\hat{p}_{i,t} > \text{Порог}\}, \quad (1)$$

которая представляет собой сумму взвешенных элементов четырех типов из таблицы «факт–прогноз». Что касается нормы восстановления, то, например, при использовании базового подхода внутренних рейтингов для необеспеченных кредитов с первоочередным правом требования она равна 55% ($НВ = 100\% - ДНС(Д)$, при этом $ДНС(Д) = 45\%$).

6. Применение классических и байесовских моделей панельных данных для прогнозирования дефолта по кредиту

6.1. Классические модели панельных данных

Первые работы, в которых модели панельных данных используются для прогнозирования дефолта по кредиту для малых и средних предприятий, появились относительно недавно. К ним относится работа [Dietsch, Petey (2007)], в которой для оценки корреляции между стоимостями активов малых и средних компаний во Франции используется пробит-модель для панельных данных. В этой модели сектор занятости, местоположение и некоторые другие характеристики рассматривались в качестве специфических эффектов (но в этой работе не были представлены результаты прогнозирования). Точно так же в работе [Fidrmuc et al. (2007)] для описания рынка кредитования малых и средних предприятий в Словакии используется пробит-модель для панельных данных. В работе [Fantazzini, Figini (2009a)] для прогнозирования вероятностей дефолта малых и средних предприятий предлагаются и сравниваются модели панельных данных из достаточно широкого спектра, в частности такие классические модели, как модели со случайными эффектами, модели со случайными коэффициентами, учитывающими ненаблюдаемые неоднородности.

Большинство рейтинговых агентств обычно анализируют отдельно каждую компанию и оценивают риск дефолта с помощью критериев, основанных на годовых финансовых данных. Однако, как указывается в рекомендациях Международного валютного фонда относительно моделирования странового дефолта, «использование пробит-модели для панельных данных в ситуации, когда наблюдается временная стабильность и межстрановая однородность, может быть весьма проблематичным» (см. [Ока (2003)], с. 33). Те же самые рекомендации могут быть распространены на случай моделирования кредитного риска любого заемщика, в частности кредитного риска малых и средних предприятий.

Предположим, что задана стандартная несбалансированная база панельных данных по кредитам. В моделях панельных данных используем следующие обозначения: заемщиков будем идентифицировать с помощью индекса i ($i = 1, \dots, n$), время — с помощью индекса t ($t = 1, \dots, T$), сектора — с помощью индекса j ($j = 1, \dots, J$). Обозначим также через Y_{itj} переменную, отвечающую за платежеспособность (она может принимать либо значение 0 в случае платежеспособности, либо значение 1 в противном случае), а через X_{itj} — вектор предикторов (объясняющих переменных) платежеспособности, размер которого $p \times 1$ (где p — количество предикторов).

Необходимо представить математическое ожидание случайной величины, отвечающей за платежеспособность, как некоторую функцию от ее предикторов (объясняющих переменных). Математическое ожидание бинарной случайной величины (значение этой случайной величины может быть либо 0, либо 1) равно вероятности того, что она принимает значение 1:

$$E(Y_{itj} | X_{itj}) = P(Y_{itj} = 1 | X_{itj}). \quad (2)$$

Можно моделировать это математическое ожидание как линейную функцию регрессоров $\beta'X_{itj}$. В нашем случае для бинарной случайной величины использование такого подхода может оказаться весьма проблематичным, поскольку вероятность принимает значения из отрезка $[0; 1]$, а регрессионная прямая вместе с бесконечным ростом значений регрессоров либо бесконечно возрастает, либо бесконечно убывает. Поэтому математическое ожидание будем моделировать с помощью функций, специфицированных следующим образом:

$$P(Y_{itj} = 1 | X_{itj}) = h(\beta'X_{itj}), \quad (3)$$

или

$$g\{P(Y_{itj} = 1 | X_{itj})\} = \beta'X_{itj} = v_{itj}, \quad (4)$$

где v_{itj} — значение линейного предиктора. Эти две спецификации эквивалентны, если функция $h(\cdot)$ является обратной к функции связи $g(\cdot)$.

Мы ввели две компоненты обобщенной линейной модели: линейный предиктор и функцию связи линейного предиктора и вероятности $P(Y_{itj} = 1 | X_{itj})$. Третьей компонентой является условное распределение случайной величины, отвечающей за платежеспособность при заданных значениях предикторов, $P(Y_{itj} = 1 | X_{itj})$. Для бинарной случайной величины всегда берется распределение Бернулли. Типичным выбором для функции связи является логит-или пробит-функция связи. Логит-функция связи более привлекательна, поскольку при ее выборе линейная модель строится для $\ln \left\{ \frac{P(Y_{itj} = 1 | x_i)}{1 - P(Y_{itj} = 1 | x_i)} \right\}$ (подробнее см. [Dobson (2002)]).

Отметим, что здесь используются классические обозначения для обобщенных линейных моделей (см. [Rabe-Hesketh, Skrondal (2004, 2005)] и ссылки в этих работах). Однако логистическую регрессионную модель можно рассматривать как модель латентного отклика, в которой предполагается, что бинарной величине Y_{ij} соответствует непрерывная случайная величина Y_{ij}^* : если латентная переменная больше, чем 0, наблюдаемый отклик равен 1, в противном случае он равен 0. Модель линейной регрессии специфицируется для этой латентной величины, и ошибка в такой регрессионной модели имеет нормальное или логит-распределение:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_{ij}^* > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $Y_{ij}^* = \beta'X_{ij} + \varepsilon_{ij}$.

Подробную информацию относительно такой интерпретации см. в [Green (2002)].

Для того чтобы ослабить предположение об условной независимости компаний или заемщиков при заданных значениях предикторов, в линейную регрессионную модель в качестве предиктора включают индивидуальные *случайные эффекты* $\varsigma_i \sim N(0, \psi)$:

$$g\{P(Y_{ij} = 1 | X_{ij}, \varsigma_i)\} = \beta'X_{ij} + \varsigma_i. \quad (5)$$

В частности, в работе [Fantazzini, Figini (2009a)] предлагаются следующие модели (с пробит- и логит-функциями связи):

$$\begin{aligned} g\{P(Y_{ij} = 1 | X_{ij})\} &= \beta'X_{ij} + \varsigma_i, \\ \varsigma_i &\sim N(0, \sigma_{\varsigma,1}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g\{P(Y_{ij} = 1 | X_{ij})\} &= \beta'X_{ij} + \varsigma_j, \\ \varsigma_j &\sim N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g\{P(Y_{ij} = 1 | X_{ij})\} &= \beta'X_{ij} + \varsigma_i + \varsigma_j \\ \varsigma_i &\sim N(0, \sigma_{\varsigma,1}^2) \\ \varsigma_j &\sim N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2) \end{aligned} \quad (8)$$

где $i (i = 1, \dots, n)$ — индекс, идентифицирующий компании;
 $j (j = 1, \dots, J)$ — индекс, идентифицирующий бизнес-сектора.

Можно получить еще более гибкую модель, если в моделях (6)–(8) предположить, что некоторые или все *коэффициенты случайны*. Например, в приложениях, связанных с оценкой кредитного риска, мы хотим протестировать, является ли эффект между бизнес-секторами, вносимый отдельной финансовой характеристикой, случайным. Это можно сделать, если предположить, что коэффициент при соответствующей характеристике является случайным.

Пусть случайная величина $\varsigma_{2,j}$ отвечает за случайный эффект между бизнес-секторами второй характеристики, и она равна отклонению от среднего этого случайного эффекта β_2 . Тогда модель может быть специфицирована следующим образом:

$$g\{P(Y_{ij} = 1 | X_{ij})\} = \beta'X_{ij} + \varsigma_{1,j} + \varsigma_{2,j}x_{ij}^{(2)}, \quad (9)$$

где $x_{ij}^{(2)}$ — рассматриваемый предиктор (в нашем случае некоторая финансовая характеристика)⁵;

$$\begin{bmatrix} \varsigma_{1,j} \\ \varsigma_{2,j} \end{bmatrix} \sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\varsigma,1}^2 & \sigma_{\varsigma,12} \\ \sigma_{\varsigma,12} & \sigma_{\varsigma,2}^2 \end{bmatrix} \right). \quad (10)$$

Предиктор $x_{ij}^{(2)}$ может быть выбран на основании опыта работы.

Для иллюстрации различий между моделью со случайными эффектами и моделью со случайными коэффициентами обратимся к рис. 2, на котором представлен пример с единственным регрессором x_{ij} . Детально с этим примером можно ознакомиться в работах [Rabe-Hesketh, Skrondal (2004, 2005)].

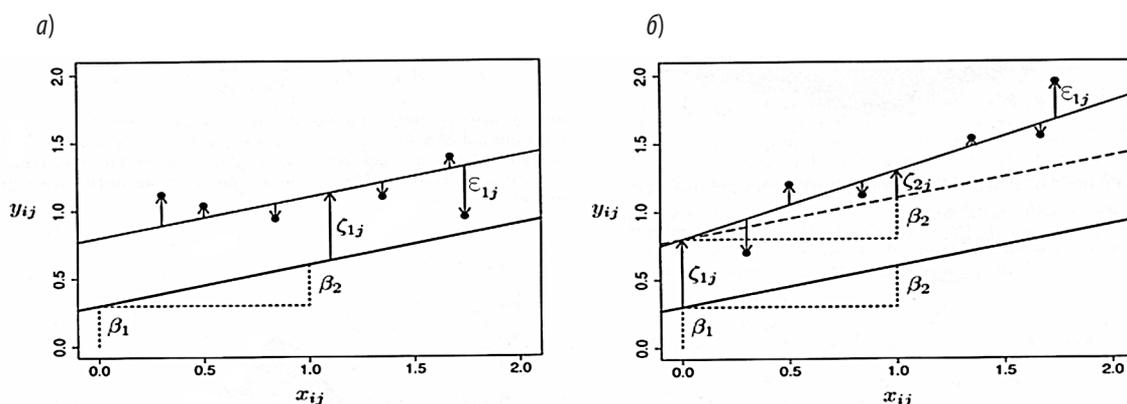


Рис. 2. Модель со случайным эффектом (а) и модель со случайными коэффициентами (б)

Заметим, что совместное распределение случайных величин v_{ij} (см. (4)) в этих моделях, при условии наблюдаемых регрессоров, не может быть представлено в функциональной форме и оценивается приближенными методами, например с помощью квадратурных формул Гаусса–Эрмита. Однако если их плотность островершинна, то обычные квадратуры могут давать весьма плохие приближения (см. [Rabe-Hesketh et al. (2002, 2005)]). Такая ситуация может возникнуть тогда, когда имеются достаточно большие кластеры, что типично для баз данных по кредитам. В этом случае рекомендуется использовать альтернативный метод, известный как метод адаптивных квадратур, поскольку с его помощью можно получить более точные приближения, что, в свою очередь, возможно благодаря масштабированию квадратуры и ее весов, а также преобразованию подинтегральной функции. Но все же качество приближения, обусловленное этим методом, зависит от параметров модели. Подробное описание алгоритма применения метода адаптивных квадратур можно найти в работах [Rabe-Hesketh et al. (2002, 2005)], [Rabe-Hesketh, Skrondal (2004,

⁵ Отметим, что в этой модели через $\sigma_{\varsigma,2}^2$ обозначена дисперсия случайного коэффициента $\varsigma_{2,j}$, которая отлична от дисперсии случайного эффекта бизнес-сектора.

2005)]. Для оценки рассматриваемых ранее моделей Рейб-Хескес, Скрондал и Пиклес написали в статистическом пакете STATA процедуру GLLAMM, которая доступна на сайте www.gllamm.org.

Наконец отметим, что мы не рассматривали логит-модели с фиксированным эффектом для панельных данных, поскольку такие модели оцениваются только по реализациям, отличным от «нулевых» (т. е. только по данным о тех заемщиках, которые подверглись дефолту). «Бесполезность» других данных в задаче оценивания модели приводит к существенному снижению эффективности оценивания (см. [Cameron, Trivedi (2005)]).

6.2. Применение байесовских моделей панельных данных к кредитному риску

В работе [Fantazzini et al. (2009a)] предлагается объединить различные типы информации. Цель этого состоит в том, чтобы соединить результаты «экспериментирования», которые мы получаем в виде балансовых данных, и априорные знания. Как правило, априорные знания представлены в виде неструктурированных данных (качественная информация), например в виде комментариев аналитиков, текстовой информации и т. д. Для того чтобы показать, как добиться этой цели, на примере данных по средним и малым предприятиям в работе [Fantazzini et al. (2009a)] рассмотрен набор байесовских моделей для панельных данных, использующих моделирование цепей Маркова.

Качественная информация, которой обладали авторы работы [Fantazzini et al. (2009a)], включала в себя описания аналитиков исследуемых средних и малых предприятий, в которых были изложены вероятные перспективы для этих предприятий без каких-либо четких указаний относительно того, стоит выдавать кредит или нет. Ответственные лица, предоставившие эту информацию, в личной беседе отмечали, что такое описание с общими рекомендациями было обусловлено тем фактом, что не только аналитик участвует в принятии окончательного решения. Последнее слово всегда за финансовым директором: его указания могут вызвать проблемы в некоторых спорных случаях. Кроме того, следует отметить, что для многих рассматриваемых малых и средних предприятий априорная информация не была указана. Более того, упомянутые ответственные лица отмечали невозможность определить четкие закономерности относительно изменения баланса этих предприятий, так как доходные предприятия с положительными денежными потоками могут иметь (во многом случайные) негативные перспективы и наоборот.

Принимая во внимание имеющуюся качественную информацию, исследователи решили выбрать неинформативные априорные функции распределения для параметров, определяющих фиксированный эффект, тогда как для параметров, отвечающих за случайный эффект, было выбрано распределение $U(0, 100)$, отражающее неоднородность рекомендаций аналитиков. Несмотря на то что такая ситуация часто встречается при работе с данными по малым и средним предприятиям, следует подчеркнуть, что для получения более надежной априорной информации и более реалистичных априорных распределений необходимо иметь больше данных, отражающих качественную информацию, и больше исследований в этой области.

В работе [Fantazzini et al. (2009a)] предложена новая методология, основанная на байесовском подходе, для моделей панельных данных по малым и средним предприятиям, имеющая следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 g\{P(Y_{ij} = 1|X_{ij})\} &= \beta'X_{ij} + \varsigma_j, \\
 \varsigma_j &\sim N(0, \sigma_{\varsigma,2}^2), \\
 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} &\sim N_k \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1e-6 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1e-6 \end{bmatrix} \right), \\
 \sigma_{\varsigma,2} &\sim U(0, 100),
 \end{aligned} \tag{11}$$

при построении которой авторы следовали стандартной структуре байесовских моделей со случайными эффектами, предложенной в работах [Crowder (1978)], [Breslow, Clayton (1993)], [Gelman et al. (1995)] и [Gameran (1997a, b)]. Байесовский подход реализован на примерах многих моделей в программном обеспечении Winbugs (общедоступно по следующему адресу в Интернете: <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>).

Возможны и другие подходы (см. [Cai, Dunson (2006)] и ссылки в этой работе). В статье [Fantazzini et al. (2009a)] предложена модель с использованием цепей Маркова. В частности, при прогнозировании применялся формализованный алгоритм моделирования Гиббса (для более подробной информации см. [Gameran (1997a, b)]), а также руководство к программному обеспечению Winbugs).

В работе [Fantazzini et al. (2009a)] рассматривается байесовский подход и для моделей со случайными коэффициентами:

$$g\{P(Y_{ij} = 1|X_{ij})\} = \beta'X_{ij} + \varsigma_{1,j} + \varsigma_{2,j}x_{ij}^{(2)}, \tag{12}$$

где $x_{ij}^{(2)}$ — некоторый финансовый показатель и

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varsigma_{1,j} \\ \varsigma_{2,j} \end{bmatrix} &\sim N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\varsigma,1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varsigma,2}^2 \end{bmatrix} \right), \\
 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} &\sim N_k \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1e-6 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1e-6 \end{bmatrix} \right), \\
 \sigma_{\varsigma,1} &\sim U(0, 100), \\
 \sigma_{\varsigma,2} &\sim U(0, 100).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Отметим, что в моделях со случайными эффектами имеются некоторые проблемы идентификации. Несколько достаточно общих результатов относительно идентификации, ненадлежащих априорных функций распределения и моделирования с помощью алгоритма Гиббса рассмотрено в работах [Gelfand, Sahu (1999)], [Chen et al. (2006)].

7. Модель Мертона

Модель Мертона была предложена в 1974 году и является прототипом всех моделей стоимости компании. Эта модель остается эталонной и по сей день.

Модель Мертона — основная представительница класса так называемых *моделей стоимости активов*. Она объясняет дефолт компании падением стоимостей ее активов. В моде-

ли Мертона предполагается, что стоимость активов V_t хорошо описывается броуновским движением, а компания финансируется из своего собственного капитала S и своих долговых обязательств номиналом B со сроком погашения в момент времени T , которые могут быть в форме, например, облигаций или банковских кредитов.

Кредит, выданный какой-либо компании, создает для кредитора *кредитный риск*, а именно риск того, что стоимость активов компании в момент времени T упадет ниже уровня B , т. е. $V_T \leq B$. В этом случае мы говорим, что фирма находится в состоянии дефолта. Для того чтобы компенсировать кредитный риск владельца облигации, доходность по ней r_B должна быть выше безрисковой процентной ставки r . Разность $r_B - r$ называют *дефолтным спредом*. Далее в модели предполагается, что:

- рынок непрерывен и не имеет «трения» (рынок эффективен) или транзакционных издержек;
- агенты рынка (покупатели или продавцы) не имеют влияния на формирование цен;
- нет ограничений на объем коротких продаж;
- процентные ставки при заимствовании и кредитовании одинаковы и равны r .

Основной целью модели является определение цены облигации B_t , $0 \leq t \leq T$ некоторой компании в предположении, что динамика стоимости ее активов описывается броуновским движением следующего типа:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

где μ — ожидаемая доходность для V_t ($\mu = EV_t$), а dW_t — это винеровский процесс, т. е. $dW_t = Z\sqrt{dt}$ и $Z \sim N(0, 1)$.

Если цена активов подчинена следующему процессу:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW,$$

то можно показать, что дифференциал функции $G(x, t)$, являющейся функцией указанной цены активов и времени, равен

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW.$$

Это знаменитая лемма Ито, и за более подробной информацией мы отсылаем читателя к работе [Hull (2005)]. В предположении, что V_t подчинена броуновскому движению, получаем:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

$$dG_t = \left(\frac{\partial G_t}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{\partial G_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G_t}{\partial V_t^2} \sigma^2 V_t^2 \right) dt + \frac{\partial G_t}{\partial V_t} \sigma V_t dW_t.$$

Далее предположим, что V_t имеет логнормальное распределение. Положим $G_t = \ln V_t$ и, применив лемму Ито, придем к соотношениям

$$\frac{\partial G_t}{\partial V_t} = \frac{1}{V_t}, \quad \frac{\partial G_t}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 G_t}{\partial V_t^2} = -\frac{1}{V_t^2},$$

$$dG_t = \left(\frac{1}{V_t} \mu V_t + 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{V_t^2} \right) \sigma^2 V_t^2 \right) dt + \frac{1}{V_t} \sigma V_t dW_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Наконец, сделав замену $G_t = \ln V_t$, получим

$$\ln V_T - \ln V_0 = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_T,$$

или, что эквивалентно,

$$V_T = V_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma \sqrt{T} Z_T \right].$$

Следовательно, вероятность дефолта компании легко вычислить по формуле

$$P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = N \left[\frac{\ln \frac{B}{V_0} - \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right], \quad (14)$$

где $N(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

На рис. 3 представлен графический пример моделирования стоимости активов компании. В соответствии с экономической интуицией, вероятность дефолта возрастает с ростом B , σ и убывает с ростом V_0 , μ .

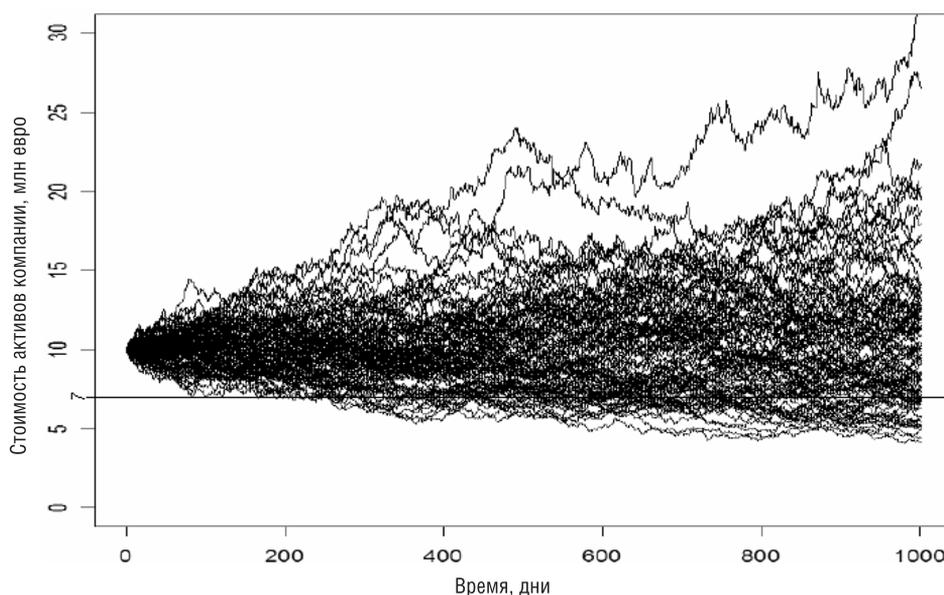


Рис. 3. Смоделированная стоимость (броуновское движение)

7.1. Структура капитала
и ценообразование активов и долговых обязательств

Структура капитала в мертоновской модели весьма проста (табл. 4).

Таблица 4

Структура капитала компании в момент времени t

Актив	Обязательства/Собственный капитал
Рискованные активы: V_t	Долг: B_t
	Собственный капитал: S_t
Итого: V_t	Итого: V_t

Предположим, что выполнены условия теоремы Модильяни–Миллера (см. [Miller, Modigliani (1958, 1961)]). Тогда выбор величины B не влияет на стоимость активов компании V_t , а выплата по долгу B_T и величина оставшегося после выплаты долга собственного капитала S_T в момент времени T будут равны соответственно

$$B_T = \min(B, V_T) = B - \max(B - V_T, 0),$$

$$S_T = \max(V_T - B, 0).$$

Итак, B_T равна номиналу безрисковой облигации минус стоимость опциона пут на базисный актив V_t с ценой исполнения B , истекающего в момент времени T , а S_T равна стоимости опциона колл на базисный актив V_t с ценой исполнения B , истекающего в момент времени T .

Таким образом, получаем

$$B_t = B \exp(-r(T-t)) - P(V_t, B, \sigma, r, T-t),$$

$$S_t = C(V_t, B, \sigma, r, T-t).$$

Используя формулу ценообразования опционов Блэка–Шоулса, можно определить $C(\cdot)$ и $P(\cdot)$ (для более подробной информации см. [Hull (2005)]):

$$C(V_t, B, \sigma, r, T-t) = V_t N(d_1) - B \exp(-r(T-t)) N(d_2),$$

$$P(V_t, B, \sigma, r, T-t) = -N(-d_1) V_t + B \exp(-r(T-t)) N(-d_2),$$
(15)

где

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/B) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Более того, учитывая, что в момент времени t выплата по долгу равна разности между стоимостью в момент времени t безрисковой облигации с номиналом B , сроком погашения T и стоимостью опциона пут на базисный актив V_t с ценой исполнения B , истекающего в момент времени T , получим, что стоимость долга в момент времени t равна

$$B_t = B \exp(-r(T-t)) N(d_2) + V_t N(-d_1).$$
(16)

Управление кредитным риском

В связи с тем что увеличение волатильности σ увеличивает как цену опциона пут, так и цену опциона колл, держатели долговых обязательств и акционеры имеют несколько конфликтующих предпочтений: первые предпочитают низкую волатильность, поскольку в этом случае маловероятно, что опцион пут будет реализован в момент истечения; акционеры же, наоборот, предпочитают высокую волатильность, поскольку в этом случае прибыль, ассоциированная с длинной позицией по опциону колл, будет выше.

7.2. Вычисление вероятности дефолта: некоторые замечания

Сделаем некоторые пояснения относительно вычисления вероятности дефолта. В зависимости от целей проводимого анализа эта вероятность может быть вычислена двумя способами:

- если целью является *описание ценообразования*, например, рискованных облигаций, тогда *риск-нейтральная вероятность дефолта* (РНВД), получаемая в предположениях модели Блэка–Шоулса, равна

$$\text{РНВД} = P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = N\left(\frac{\ln \frac{B}{V_0} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = N(-d_2). \tag{17}$$

В модели Мертона для описания ценообразования облигаций и акций используется формула Блэка–Шоулса;

- если же цель состоит в том, чтобы вычислить *актуальную вероятность дефолта* (также называемую *ожидаемой частотой дефолта* — ОЧД), что является достаточно распространенной ситуацией при управлении рисками, тогда мы должны использовать формулу (14):

$$\text{ОЧД} = P(V_T < B) = P(\ln V_T < \ln B) = N\left(\frac{\ln \frac{B}{V_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = N(-d_2^*), \tag{18}$$

где

$$d_2^* = d_2^* - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln(V_t/B) + (\mu + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \sigma\sqrt{T-t},$$

а μ — ожидаемая доходность активов V_t компании.

Сравнивая (17) с (18), заключаем, что РНВД > ОЧД при $\mu > r$.

В частности, если

$$d_2^* = d_2 - \frac{(\mu - r)\sqrt{T}}{\sigma},$$

то

$$\text{РНВД} = N(-d_2) = N\left[N^{-1}(\text{ОЧД}) + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right]. \tag{19}$$

В модели ценообразования основного капитала (ЦОК-модель)⁶ справедливо представление $\mu - r = \beta\pi$, где β — бета-коэффициент, рассчитанный для модели ценообразования капитальных активов, а π — рыночная премия за риск:

$$\beta = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} = \frac{\text{cov}(R, R_M)}{\text{var}(R_M)},$$

$$\pi = \mu_M - r,$$

здесь ρ — корреляция между рыночными (R_M) и фондовой (R) доходностями, а μ_M и σ_M — ожидаемая рыночная доходность и ее дисперсия соответственно. Используя ранее упомянутые определения, выпишем следующие соотношения:

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\beta\pi}{\sigma} = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} \cdot \frac{\pi}{\sigma} = \rho \frac{\pi}{\sigma_M} = \rho\theta, \quad \theta = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M}, \quad (20)$$

где θ — рыночное отношение Шарпа. Подставляя (20) в (19), получим

$$\text{РНВД} = N(-d_2) = N\left[N^{-1}(\text{ОЧД}) + \rho\theta\sqrt{T-t}\right] \quad (21)$$

7.3. Калибровка моделей реальными данными

Если мы хотим вычислить вероятность дефолта, предполагая выполнение условий модели Мертона и модели Блэка–Шоулса, нам необходимы оценки для V_t и σ . К сожалению, ни один из этих двух параметров в явном виде не наблюдается. Тем не менее для торгуемых собственных активов можно использовать величину стоимости акции в момент времени t , т. е. S_t , в задаче решения системы из двух уравнений относительно двух неизвестных параметров:

- первое уравнение получается из условия, что стоимость собственного капитала равна стоимости опциона колл, а именно:

$$S_t = C(V_t, B, \sigma, r, T-t) = V_t N(d_1) - B \exp(-r(T-t)) N(d_2); \quad (22)$$

- второе уравнение получается, если воспользоваться леммой Ито:

$$\sigma_S S_t = \frac{\partial S_t}{\partial V_t} \sigma V_t = N(d_1) \sigma V_t. \quad (23)$$

Наконец, следует решить систему нелинейных уравнений относительно V_t и σ .

Уравнение (23) имеет смысл выписывать только для текущего момента, поскольку на практике отношение V_t/S_t изменяется слишком стремительно. Более того, модель систематически дает неверные оценки вероятности дефолта. Например, если отношение V_t/S_t быстро убывает, то модель будет систематически переоценивать волатильность актива, а значит, вероятность дефолта будет завышена. И наоборот, если отношение V_t/S_t быстро возрастает, то модель будет систематически недооценивать волатильность актива, а значит, вероятность дефолта будет недооценена.

⁶ В англоязычной литературе модель ценообразования основного капитала называется Capital Asset Pricing Model или CAPM model. Подробную информацию относительно этой модели см. в [Cochrane (2001)].

7.4. Кредитные спрэды

Кредитные спрэды измеряют разность между доходностью нулевой безрисковой бескупонной облигации (с непрерывно начисляемой процентной ставкой) и доходностью рискованной бескупонной облигации.

Если параметры σ и V_t вычислены, спрэд может быть определен явным образом. Используя для описания ценообразования рискованных облигаций формулу (16)

$$B_t = B \exp(-r(T-t))N(d_2) + V_t N(-d_1),$$

а также учитывая, что доходность рискованных облигаций определяется соотношением

$$r_B = \frac{1}{T-t} \ln(B/B_t),$$

после некоторых преобразований получаем

$$r_B - r = -\frac{1}{T-t} \ln \left[N(d_2) + \frac{V_t}{B \exp(-r(T-t))} N(-d_1) \right]. \quad (24)$$

Кредитный спрэд, полученный в предположениях модели Мертона, обладает следующими свойствами:

- он растет с ростом величины $V_t / [B \exp(-r(T-t))]$, которая является мерой задолженности компании и отражает финансовый риск;
- он растет при увеличении σ , которая отражает бизнес-риск;
- он не имеет определенной тенденции в своем поведении при увеличении $(T-t)$. Если рассматривается компания, для которой вероятность дефолта мала, то кривая спрэда имеет положительную крутизну. У очень рискованной компании с большой вероятностью дефолта кривая спрэда имеет отрицательную крутизну: если компания не подверглась дефолту в течение первого года, вероятность дефолта в последующие годы, как правило, снижается (а кредитный рейтинг увеличивается).

8. Прогнозирование вероятности дефолта без учета данных из бухгалтерских отчетов: вероятность нулевой цены (ВНЦ)

Модель Мертона, а также некоторые другие структурные и статистические подходы к прогнозированию предполагают, что данные из бухгалтерских отчетов отражают реальную финансовую ситуацию, складывающуюся в компании. Что касается модели Мертона, то в ней используются бухгалтерские данные, отражающие величину суммарных долговых обязательств компании. Обычной практикой является вычисление суммарных долговых финансовых обязательств как суммы всех краткосрочных займов и половины долгосрочных. Эта практика впервые была предложена корпорацией KMV (которая сейчас принадлежит рейтинговому агентству Moody's) для североамериканских компаний. Применение такой практики гарантирует, что величина долговых обязательств компании не завышена (см. [Vassalou, Xing (2004)], [Hao (2006)]). Несмотря на то что в работе [Vassalou, Xing (2004)] указывается, что использование различных процентных ставок для долгосрочных финансовых долговых обязательств не обнаруживает значительного изменения качественных результатов, такой под-

ход может быть неустойчивым к мерам по «декорированию баланса», проводимым для улучшения финансовых показателей компании, или, в наихудшем случае, к финансовым мошенничествам.

Анализ дефолта пищевого гиганта компании «Пармалат» в 2003 году ясно показал, как информация относительно долговых финансовых обязательств, представленная в подтвержденном (аудитором) балансовом отчете, может отражать только часть реальных долгов.

Коротко об этой истории. В феврале 2003 года финансовый директор Фаусто Тонна объявил о новом выпуске облигаций на сумму 500 млн евро. Это стало неожиданностью как для инвесторов, так и для генерального директора Калисто Танци. Танци настоял на увольнении Тонна и назначил финансовым директором Альберто Феррариса. Согласно интервью, которое Феррарис впоследствии дал журналу «Тайм», он с удивлением обнаружил, что, будучи финансовым директором, тем не менее не имеет доступа к некоторым корпоративным бухгалтерским книгам, которые находятся в ведении главного бухгалтера компании Лучиано Дель Солдато: «Феррарис обратился к двум доверенным лицам из своего штата с просьбой провести тайное расследование. После прояснения ситуации вокруг операций, осуществленных компанией «Пармалат» по всему миру, они поделились шокирующими новостями: суммарные долговые финансовые обязательства компании составили 14 миллиардов евро, т. е. величину, более чем в два раза превышающую сумму долговых обязательств, указанных в балансовом отчете» (Тайм, 2004). О кризисе в компании стало общеизвестно в ноябре 2003 года, когда возникли вопросы относительно сделок с взаимным фондом «Эпикурум», компанией, расположенной на Каймановых Островах и связанной с компанией «Пармалат». Впоследствии это сотрудничество сыграло роковую роль для компании «Пармалат». Феррарис подал в отставку, и на посту финансового директора его заменил Дель Солдато. В декабре Дель Солдато также подал в отставку, после того как вывел наличные средства из фонда «Эпикурум», необходимые для выплат по долговым обязательствам. Когда в балансе возникла брешь размером в 7 млрд евро, Танци сложил с себя полномочия члена совета директоров и генерального директора компании: позднее «Бэнк оф Америка», через который компания «Пармалат» осуществляла финансовые операции, выпустил документ, показывающий, что 3,95 млрд евро на счету компании «Бонлат»⁷ являются фальсификацией. Через несколько часов после того, как компания официально была объявлена неплатежеспособной и были предъявлены обвинения в финансовых мошенничествах и отмывании денег, Калисто Танци был арестован.

Среди сомнительной практики ведения бухгалтерского учета, использованной в компании «Пармалат», есть и такая ситуация: продажа собственных облигаций, привязанных к кредитному риску компании, когда фактически делалась ставка на собственную кредитоспособность и «из воздуха раздувался баланс». Для более подробной информации см. статьи, опубликованные в нескольких номерах за 2004 год журнала «Тайм», а также работу [Castri, Benedetto (2006)].

Приведенное описание скандала вокруг компании «Пармалат» ясно показывает, что использование данных из бухгалтерских отчетов для вычисления вероятности дефолта компании может вести по неправильному пути, в результате чего будет получена очень неточная оценка вероятности дефолта. Во избежание таких проблем рекомендуется применять новый

⁷ В 1999 году компания «Пармалат» учредила на Каймановых Островах дочернюю компанию «Бонлат».

подход, предложенный в работе [Fantazzini et al. (2008a)], в котором нулевая цена используется как дефолтная граница для отделения функционирующих компаний от компаний, находящихся в состоянии дефолта, а вероятность дефолта оценивается без учета данных из публичных бухгалтерских отчетов. Авторы оправдывают адекватность предлагаемого подхода тем, что, как показано во многих работах, котировки акций в основном обусловлены конфиденциальными сведениями, а следовательно, должны быть ближе к оценке реальной ситуации, чем сведения, полученные из официальных бухгалтерских отчетов.

О важности конфиденциальных сведений в определении справедливой цены было впервые упомянуто в работе [French, Roll (1986)], посвященной теоретическому исследованию волатильности доходности акций в торговые и неторговые дни, а также за первые часы после открытия на бирже рабочей сессии и за несколько часов до ее закрытия. В работе показано, что во многих случаях большая волатильность доходностей активов была вызвана действиями информированных трейдеров, чьи конфиденциальные сведения начинали работать в момент открытия рабочей сессии на бирже. Все большая доступность высокочастотных данных с недавнего времени позволила проводить более точные тесты на качество микроструктурных моделей. Вот лишь несколько ссылок на работы [Hasbrouck (1988)], [Madhavan, Smidt (1991)], [Hasbrouck, Sofianos (1993)], [Madhavan, Sofianos (1997)], в которых показана важность асимметрии конфиденциальной информации относительно динамики цен акций и фьючерсов (в работах [Biass et al. (2005)], [Hasbrouck (2007)]) представлены обзоры недавних исследований микроструктуры рынка.

Рассмотрим два следующих тождества, основанных на реальных бухгалтерских данных в момент времени T :

$$\begin{cases} E_T = A_T - B_T, \\ E'_T = A_T = (A_T - B_T) + B_T = E_T + B_T. \end{cases} \quad (25)$$

Финансовый смысл величин E_T и E'_T зависит от ситуаций, с которыми сталкивается фирма (табл. 5).

Таблица 5

Финансовый смысл и знаки E_T, E'_T

$E_T = A_T - B_T$	$E'_T = A_T$
<i>Функционирующая компания</i>	
Собственный капитал компании (+)	Стоимость активов (+)
<i>Компания в состоянии дефолта</i>	
Убытки держателей долговых обязательств при дефолте (-)	Активы, принадлежащие кредиторам (+)

В табл. 5 показано, что величина E_T отрицательна, когда компания находится в состоянии дефолта, поскольку в этом случае E_T представляет собой убытки держателей долговых обязательств в условиях дефолта компании, и E_T положительна, когда компания является функционирующей, так как в этом случае E_T представляет собой величину собственного ка-

питала компании, принадлежащего акционерам. Отрицательность значения E_T является прямым следствием ограниченной ответственности, свойственной всем современным западным законодательствам. Кроме того, убытки (так же, как и доходы) могут быть теоретически бесконечными: убытки авиакомпаний вследствие воздушной атаки 11 сентября 2001 года либо убытки вследствие эпидемии коровьего бешенства среди животных или птичьего гриппа. Поэтому для описания доходности компании можно использовать плотности вероятности, принимающие положительные значения при отрицательных значениях аргумента.

В соответствии с предыдущим рассуждением склонность к дефолту можно оценить, просто используя величину E_T вместо величины d_2 , как это делается в модели Мертона, а вероятность дефолта оценивать как $P(E_T \leq 0)$, поскольку компания подвергается дефолту в том случае, если E_T неположительно. Более того, при условии, что $E_T = S \times P_T$ (где P_T — котировка цены акции в момент времени T , а S — число акций), вероятность дефолта компании может быть вычислена как $P(P_T \leq 0)$, т. е. как *вероятность нулевой цены* (ВНЦ). Несмотря на то что котировка цены P_T — это усеченная величина, которая не может принимать отрицательных значений, величина E_T не имеет нижней границы. Это объясняется тем, что финансовое значение этой величины для функционирующих компаний и компаний, находящихся в состоянии дефолта, различно: в первом случае на финансовом рынке E_T вычисляется (в электронном виде) ежедневно, тогда как в последнем случае убытки в условиях дефолта вычисляются согласно предписанной в суде процедуре.

Цены акций, как правило, представляют собой нестационарные временные ряды первого порядка интегрируемости ($I(1)$), и обычной практикой является моделирование их динамики с помощью логдоходностей таким образом, чтобы цены были положительными. Однако необходимо найти $P(P_T \leq 0)$, поскольку, как было показано ранее, нулевая цена может быть использована как дефолтный барьер. Простым способом для вычисления упомянутой вероятности является использование условной модели для *разностей в уровнях цен*, $X_t = P_t - P_{t-1}$, вместо разностей в уровнях логарифмов цен.

Аналитическое выражение для $P(P_T \leq 0)$ можно выписать для нескольких частных, но не встречающихся на практике случаев, например для случая нормально распределенных цен с неменяющимися во времени дисперсиями. Когда невозможно выписать аналитическое выражение, необходимо пользоваться методами стохастического моделирования. Если в текущий момент времени t желательно оценить вероятность дефолта в момент времени $t + T$, то для этого можно воспользоваться следующим достаточно общим алгоритмом.

Алгоритм оценки ВНЦ

Шаг 1. Рассмотрим общую условную модель для разностей в уровнях цен $X_t = P_t - P_{t-1}$ без логарифмического преобразования при условии, что мы располагаем всей информацией F_t об анализируемом процессе до момента времени t :

$$\begin{aligned} X_t &= E(X_t | F_t) + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= H_t^{1/2} \eta_t, \quad \eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0,1), \end{aligned} \tag{26}$$

где $\eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0,1)$ означает, что (η_t) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а $H_t = D(\varepsilon_t | F_t)$ — дисперсия ε_t .

Шаг 2. Смоделируем большое число N траекторий цен до момента времени $t + T$, используя оцененную модель временных рядов (26) согласно шагу 1.

Шаг 3. Оценка вероятности дефолта равна отношению n/N , где n — количество смоделированных траекторий из N , которые касаются или пересекают барьер нулевой цены.

Этот метод позволяет получить ряд важных преимуществ.

- Необходимы только курсовые стоимости акций.
- Не требуются ни значение волатильности компании, ни величина номинала задолженности, как в моделях мертоновского типа.
- Можно использовать более реалистичные, чем логнормальное, распределения.
- Можно оценить вероятность дефолта для любого временного горизонта $t + T$.
- Имеется возможность рассчитывать ежедневные или даже внутрисуточные вероятности дефолта. Следовательно, ВНЦ может быть использована как инструмент управления рисками.
- ВНЦ может быть использована в качестве системы раннего предупреждения о финансовых дефолтах, поскольку ее легко оценить для любых финансовых временных рядов.

9. Бутстреп-полосы доверия

Впервые бутстреп-методология (ее описание можно найти в [Efron, Tibshirani (1993)]) была использована для изучения воспроизводимости некоторых признаков филогенетических деревьев (см. [Felsenstein (1985)]). Позднее в работе [Efron, Tibshirani (1998)] эта методология была рассмотрена с более общих позиций и названа «проблемой областей». В настоящей работе предлагаемая мера доверия представлена в связи с так называемыми p -значениями (p -value) эмпирической функции распределения и байесовскими апостериорными вероятностями.

С появлением бутстреп-техники значительно расширились возможности статистики в ситуациях, когда классические статистические процедуры неприменимы. Бутстреп-оценки стандартных ошибок параметров моделей оказываются весьма полезными в случаях, когда вычисление стандартных ошибок (асимптотических или неасимптотических) в явном виде невозможно (см., например, [Efron, Tibshirani (1993)]). Кроме того, стандартные ошибки, рассчитанные с помощью бутстреп-техники, могут лучше отражать свойства оценок в условиях малых выборок.

На сегодняшний день весьма мало сделано для количественной оценки неопределенности оценок вероятностей дефолта, поскольку основной интерес исследований до сих пор был смещен к области построения точечных оценок. Обратная ситуация складывается в других областях исследования, например в биостатистических исследованиях, когда в задаче вычисления вероятности корректной идентификации отдельных генов и их распределений используется параметрическая бутстреп-техника (см. [Van der Laan, Bryan (2001)]). В статье [Karlis, Kostaki (2002)] для оценки коэффициентов смертности различных групп населения используется техника, подобная той, что применялась в работе [Van der Laan, Bryan (2001)]. В статье [Zwane, Van der Heijden (2003)] представлен алгоритм для параметрической бутстреп-техники, который может использоваться в логлинейных моделях с непрерывными независимыми переменными. В работе [Zwane et al. (2004)] с помощью параметрического

бутстреп-подхода были построены доверительные интервалы для оценок систем множественных записей, когда регистрационные записи делаются для различных, но пересекающихся популяций.

Кроме того, некоторые авторы применяли непараметрическую бутстреп-технику при логлинейном моделировании (см., например, [Huggins (1989)], [Tilling, Sterne (1999)], [Tilling et al. (2001)]). Однако, как отмечается в работе [Norris, Pollock (1996)], при использовании непараметрического бутстреп-метода для оценки дисперсии значение оценки часто меньше, чем реальное значение дисперсии. Этот факт соответствует результатам моделирования, представленным в работе [Tilling, Sterne (1999)], из которых следует, что оценка, полученная непараметрическим бутстреп-методом, имеет устойчиво меньшее значение, чем номинальное. Аналогичные выводы сделаны в работе [Zwane, Van der Heijden (2003)]. Помимо этого, параметрический бутстреп-метод дает асимптотически правильные результаты при достаточно слабых условиях по сравнению с условиями, требуемыми в непараметрическом бутстреп-методе (см. [Gine, Zinn (1990)]).

Для того чтобы оценка, даваемая параметрическим бутстреп-методом, асимптотически совпадала с действительным значением, требуется корректность выбранной параметрической модели. В работе [Van der Laan, Bryan (2001)] показано, что в случае усеченного многомерного нормального распределения, в параметрической модели которого нет никаких ограничений на параметры, параметрический бутстреп-метод будет состоятельно оценивать вырожденное предельное распределение, даже если модель некорректна. Принимая во внимание вышеизложенные результаты, обратимся к параметрическим бутстреп-методам.

Процедура построения доверительных границ для оценки вероятности дефолта следующая.

Шаг 1. Смоделируем вектор размера $T \times 1$ стандартизированных ошибок η_{it} , имеющих заданную маргинальную плотность (например, плотность распределения Стьюдента).

Шаг 2. Заменяя все параметры значениями их оценок и подставляя значения стандартизированных ошибок η_{it} , полученных на предыдущем шаге, создадим искусственно сгенерированную историю для случайной величины X_t .

Шаг 3. Используя данные из искусственно сгенерированной истории, оценим параметры модели AR(1)-T-GARCH(1,1).

Шаг 4. Используя предыдущие оценки, полученные на основе искусственно сгенерированной истории, вычислим бутстреп-оценку для ВНЦ.

Шаг 5. Для того чтобы получить численную оценку распределения ВНЦ, повторим шаги 1–4 большое количество раз (n_B).

Это распределение формирует основу для вычисления бутстреп-доверительных интервалов для вероятностей дефолта.

В работе [Fantazzini et al. (2008a)] проанализированы американский и европейский рынки, а в работе [Fantazzini (2009)] — российский рынок. В целях экономии места здесь рассматриваются только четыре известные компании, которые оказались в состоянии дефолта и чьи финансовые отчеты позднее были юридически признаны неправдоподобными, в силу чего для них нельзя использовать стандартные подходы (см. [Fantazzini et al. (2008a)]).

Это следующие четыре компании:

- «Чирио»: 24.09.1999–24.07.2003. Второй по величине крупный дефолт в пищевом секторе Европы (первый по величине — дефолт компании «Пармалат», см. раздел 8);
- «Энрон»: 20.01.1998–10.01.2002. Второй по величине крупный дефолт в американской истории;
- «Пармалат»: 22.02.2000–22.12.2003. Крупнейший дефолт в европейской истории;
- «Ворлдком»: 16.07.1998–12.07.2002. Крупнейший дефолт в американской истории.

В статье [Fantazzini et al. (2008a)] представлены результаты тестирования на наличие единичных корней для рассматриваемых финансовых временных рядов с помощью теста Дики–Фуллера с исключением тренда обобщенным методом наименьших квадратов (ДФ-ОМНК), предложенного в работе [Elliott et al. (1996)], а также с помощью KRSS-теста, предложенного в работе [Kwiatkowski et al. (1992)]. Нулевая гипотеза в методе ДФ-ОМНК состоит в наличии единичного корня (т. е. в нестационарности анализируемого временного ряда), в то время как в методе Квятковского и др. (KPSS-методе) нулевая гипотеза состоит в ковариационной стационарности ряда (против альтернативы о его интегрируемости первого порядка). Тщательный анализ уровней ценовых временных рядов за период наблюдений показывает, что рассматриваемые ряды отличаются нестационарностью, тогда как разности первого порядка позволяют получить стационарные временные ряды (табл. 6).

Таблица 6

Тесты на наличие единичных корней для данных по четырем компаниям

Компания	ДФ-ОМНК		KPSS	
	Уровни	Разности первого порядка	Уровни	Разности первого порядка
«Чирио»	-2,083	-20,583(**)	0,256(**)	0,065
«Пармалат»	-1,372	-12,395(**)	0,768(**)	0,045
«Энрон»	-2,620	-38,785(**)	0,353(**)	0,022
«Ворлдком»	-1,359	-34,876(**)	0,833(**)	0,057

(*) статистическая значимость на 5%-м уровне.

(**) статистическая значимость на 1%-м уровне.

Далее, в этой работе рассматривается модель AR(1)-T-GARCH(1,1) для разностей уровней цен $X_t = P_t - P_{t-1}$, стандартизированные ошибки которой имеют распределение Стьюдента (для того, чтобы учесть леввередж-эффект и лептокуртозис рассматриваемых данных) (подробная информация относительно этой модели предложена в [Biais et al. (1993)]):

$$\begin{aligned}
 X_t &= \mu + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \\
 \varepsilon_t &= \eta_t \sqrt{h_t}, \quad \eta_t \sim \text{н.о.р.с.в.}(0, 1), \\
 h_t &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 D_{t-1} + \beta h_{t-1},
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

где $D_{t-1} = 1$, если $\varepsilon_{t-1} < 0$. Авторы работы [Fantazzini et al. (2008a)] объясняют выбор такой спецификации тем, что она позволяла получить хорошие результаты при моделировании финансовых данных (см. §3 в [Tsay (2002)], а также [Hansen, Lunde (2005)] и ссылки в этих работах). Что касается выбора числа смоделированных ценовых траекторий N для оценки ВНЦ в работе [Fantazzini et al. (2008a)], то оно взято равным $N = 5000$.

Наконец, в статье [Fantazzini et al. (2008a)] представлены результаты тестирования качества моделей AR(1)-T-GARCH(1,1), использованных для описания условных маргинальных распределений. Тестирование качества осуществлялось с помощью теста Льюнга–Бокса для стандартизированных остатков в уровнях $\hat{\eta}_t$ и их квадратов $\hat{\eta}_t^2$, нулевая гипотеза которого состоит в *отсутствии автокорреляции*. Использовались также тесты спецификации, рассмотренные в работе [Granger et al. (2006)]. В статье [Fantazzini et al. (2008a)] для проверки корректности спецификации плотности использовался тест Колмогорова–Смирнова, а для того, чтобы протестировать совместно адекватность динамики и спецификации плотности маргинального распределения модели, использовался «тест на охват», нулевая гипотеза которого состоит в том, что *модель для плотности хорошо специфицирована*. В последнем тесте носитель функции плотности делится на пять областей. После этого техника интервального прогнозирования применяется к каждой из этих областей в отдельности, а затем ко всем областям совместно (подробнее об этом см. [Granger et al. (2006)]). В целях экономии места в табл. 7 представлены только p -значения каждого теста.

Таблица 7

p -значения спецификационных тестов

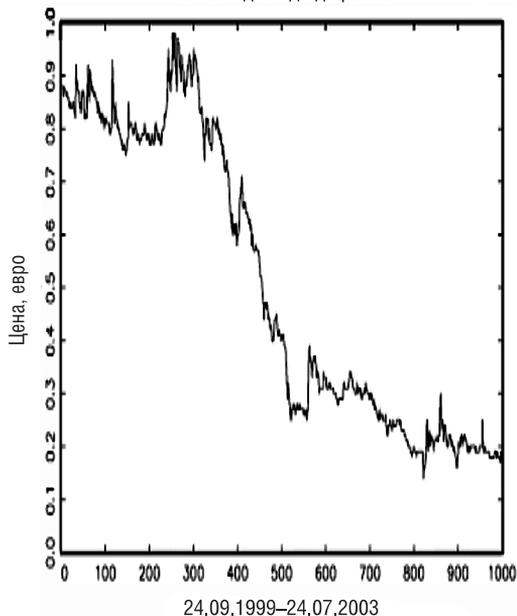
Компания	Тест Льюнга–Бокса (25)		Тест Колмогорова–Смирнова	Тест на охват
	$\hat{\eta}_t$	$\hat{\eta}_t^2$		
«Чирио»	0,112	0,182	0,018	0,017
«Энрон»	0,953	0,096	0,380	0,837
«Пармалат»	0,906	0,971	0,091	0,530
«Ворлдком»	0,167	0,758	0,435	0,058

Во всех упомянутых в табл. 7 тестах для каждой из рассмотренных маргинальных моделей принимается нулевая гипотеза (по крайней мере, на 1%-м уровне значимости), что указывает на корректную спецификацию моделей. В целом представленные результаты указывают на то, что выбранная AR(1)-T-GARCH(1,1)-модель, в которой стандартизированные ошибки имеют распределение Стьюдента, адекватна рассматриваемым финансовым временным рядам. Последнее обстоятельство очень важно, поскольку оно позволяет нам использовать параметрические бутстреп-процедуры для построения доверительных интервалов оценок вероятностей дефолта.

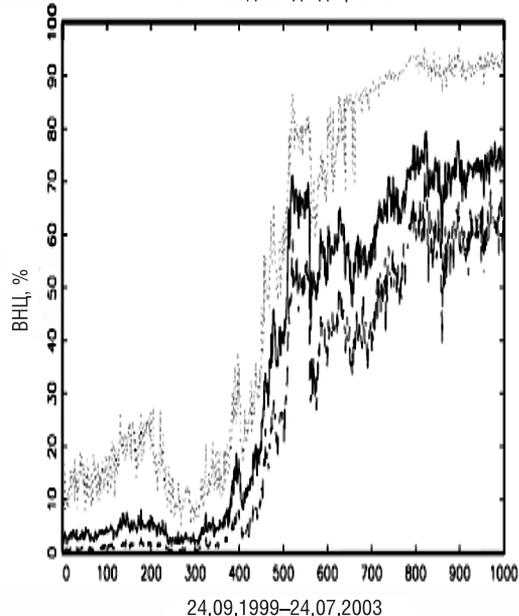
На рис. 4 и 5 показаны котировки цен акций рассматриваемых четырех компаний за 1000 дней до дефолта, а также вычисленные оценки вероятностей дефолта и 90%-е доверительные полосы (по оси x отложено количество дней).

а)

Цены на акции компании «Чирио»
за 1000 дней до дефолта

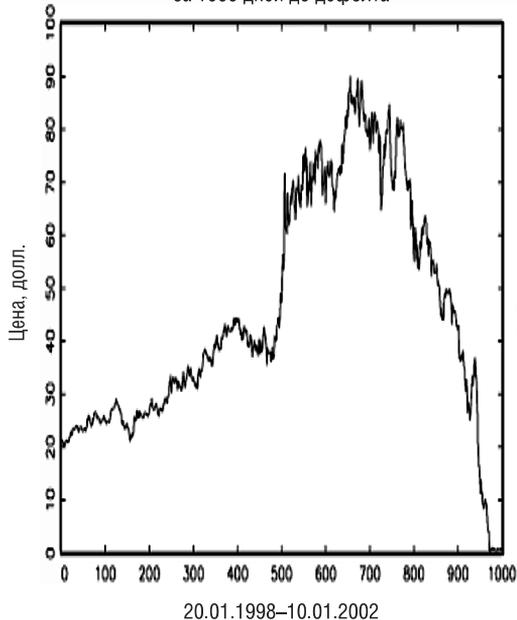


Оценки ВД компании «Чирио»
за 1000 дней до дефолта



б)

Цены на акции компании «Энрон»
за 1000 дней до дефолта



Оценки ВД компании «Энрон»
за 1000 дней до дефолта

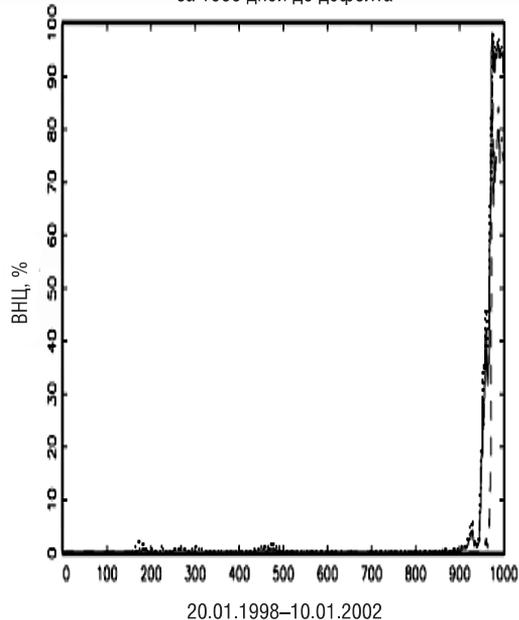


Рис. 4. Цены на акции и оценки ВД с 90%-ми бутструп-доверительными полосами (верхняя граница — пунктирная линия, нижняя — штриховая) для компании «Чирио» (а) и «Энрон» (б)

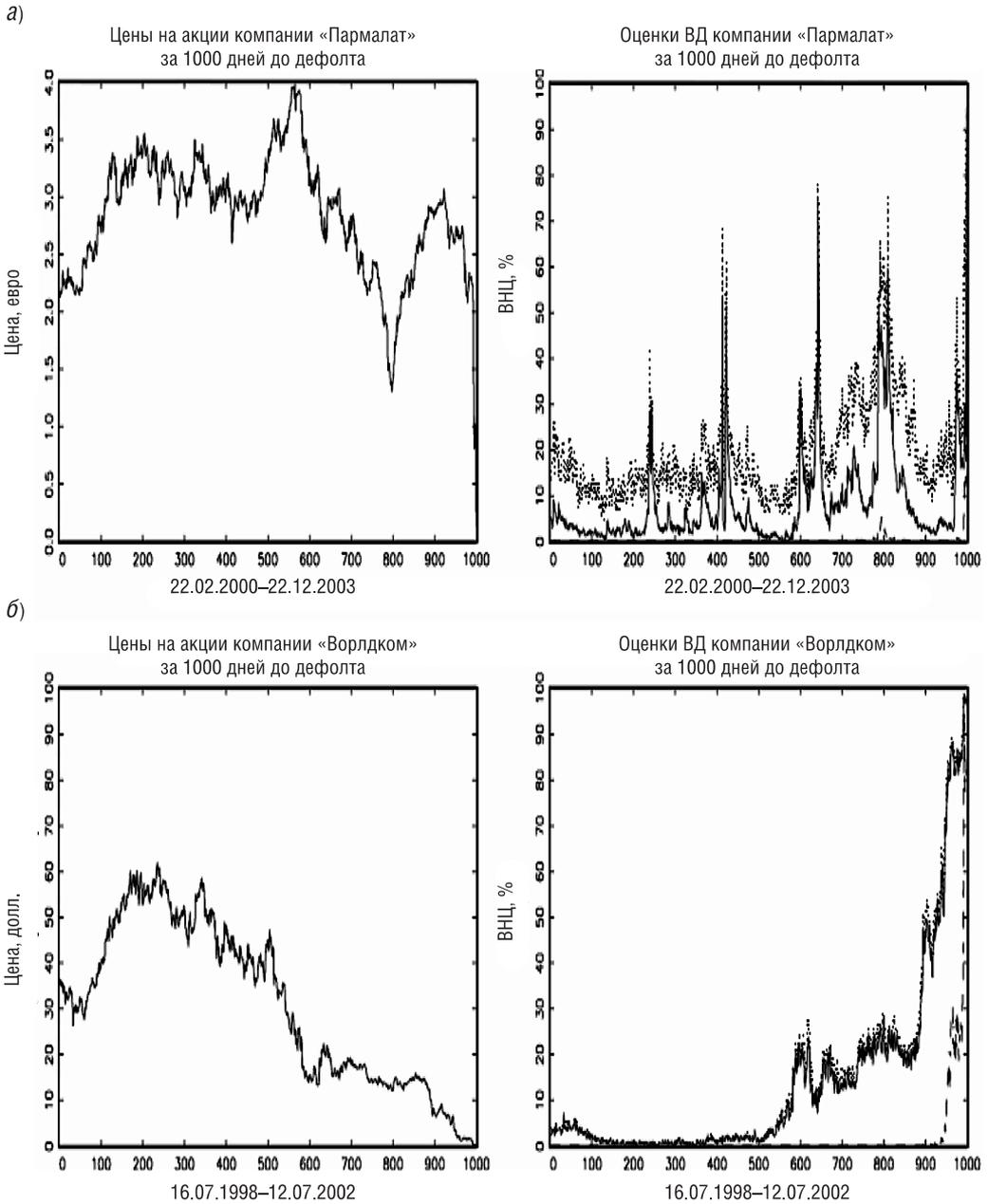


Рис. 5. Цены на акции и оценки ВД с 90%-ми бутструп-доверительными полосами (верхняя граница — пунктирная линия, нижняя — штриховая) для компании «Пармалат» (а) и «Ворлдком» (б)

Обратим особое внимание на тот факт, что доверительные интервалы в определенной степени асимметричны. Помимо этого наблюдается выраженное различие между американскими и итальянскими компаниями. Вычисленное значение оценки вероятности дефолта за один год до него для компаний «Энрон» и «Ворлдком» составляет более чем 50% оценки вероятности дефолта за два месяца до него. Относительно итальянских компаний интересно отметить, что уже за $\frac{2}{3}$ года до дефолта величина оценки вероятности дефолта превышает 50%. Эти факты соответствуют изменению ситуации, связанному с предварительным расследованием. Оно показало, что финансовые трудности в двух компаниях были известны менеджменту уже в 90-х годах. Кроме того, хотя достаточно широкие полосы доверия указывают на то, что должно рассматривать корректность оценки вероятностей дефолта только с некоторой степенью уверенности (в частности, для компании «Пармалат»), тем не менее можно интерпретировать это как знак, указывающий на рыночную неопределенность относительно будущего компании.

В целом, предыдущие результаты указывают на разную степень эффективности итальянского и американского рынков в случае финансовых махинаций. Некоторые эпизоды вокруг дефолтов компаний «Энрон» и «Пармалат» могут помочь прояснить причины такого различия.

Жена генерального директора компании «Энрон», Лиза Лей, была обвинена в продаже 28 ноября 2001 года 500 тыс. акций компании на общую сумму в 1,2 млн долларов. Отчеты показывают, что миссис Лей размещала предложение на продажу в промежутке времени между 10:00 и 10:20. Новости относительно проблем в компании «Энрон», включая информацию о миллионных (в долларах) убытках, которые были скрыты, стали общеизвестны около 10:30, и вскоре после этого сообщения котировки цен акций упали до одного доллара. Кроме того, бывшей работнице этой компании Пауле Райекер было предъявлено уголовное обвинение в использовании инсайдерской информации. Райекер получила 18 380 акций компании «Энрон» по цене 15,51 доллара за каждую акцию, а продала их по цене 49,77 доллара за акцию в июле 2001 года, т. е. за неделю до того, как стала общеизвестной информация об убытках в 102 млн долларов, уже известная ей на момент продажи акций.

Что касается компании «Пармалат», то финансовая полиция обнаружила, что сумма приблизительно в 1–2 млрд евро была выведена с банковских счетов компании на счета туристических обществ, а также других компаний, принадлежащих семье Танци (до тех пор не имевших отношений с пищевым гигантом), между 1993 и 2003 годом.

Следовательно, дефолты этих двух компаний разного типа: хотя информация о серьезных проблемах в компании «Энрон» была известна ее работникам еще за год до того, как она стала общеизвестной, продажи в последние минуты, по-видимому, свидетельствуют о том, что «продавцы акций покидали тонущий корабль». Случай с компанией «Пармалат» несколько отличается: по-видимому, менеджмент организовал незаконную систему вывода денег из компании. Расследования и судебные заседания по этим делам продолжаются. Остается надеяться, что ситуация по оставшимся вопросам в будущем прояснится.

10. Модели для нормы восстановления (НВ) и величин номинальных потерь при дефолте (ВНП(Д))

Как уже упоминалось в разделе 3, существует две разновидности подхода внутренних рейтингов (ПВР): базовый и усовершенствованный. Они имеют принципиальные различия в том, как рассчитывать параметры ВД, ДНС(Д) = $1 - НВ$, ВНП(Д), ЭСДО. Например, при базовом

вом подходе только ВД может быть рассчитана на основе внутренних моделей, используемых в банке, тогда как при усовершенствованном подходе на основе внутренних моделей рассчитываются все четыре параметра и, разумеется, подлежат инспекции надзорных органов в банковской сфере.

Гибкость существующих моделей для вычисления НВ портфеля кредитных активов, вероятно, будет мотивацией перехода банков от базового подхода к усовершенствованному. Как воспользуется банк имеющейся гибкостью, зависит, конечно, от того, насколько хорошо он представляет общий и дифференцированный характер НВ имеющихся кредитных активов.

В связи с этим перечислим наиболее **характерные особенности и основные факторы, определяющие НВ.**

- Норма восстановления как процент от величины номинальных потерь при дефолте либо высока (70–80%), либо низка (20–30%). Характерной особенностью распределения, описывающего норму восстановления, является бимодальность; следовательно, не совсем корректно рассматривать среднюю норму восстановления.

- Одним из основных определяющих факторов является *наличие или отсутствие секьюритизации дефолтного кредитного обязательства*, а также *место этого дефолтного обязательства в структуре капитала заемщика* (степень субординированности требования). Таким образом, банковские кредиты, будучи на вершине структуры капитала, как правило, имеют большую норму восстановления, чем, например, долговые расписки.

- *Наличие какого-либо залога и степень его ликвидности* являются еще одним важным определяющим фактором.

- *Тип процедуры банкротства*, определяемый существующим законодательством, влияет на срок восстановления всей величины номинальных потерь или ее части. Например, в развитых странах существует множество правил, защищающих интересы служащих, а также семей с низкими совокупными доходами.

- *Бизнес-циклы и политика определения процентных ставок* также представляют собой определяющие факторы: нормы восстановления систематически меньше в периоды рецессии, и разница может достигать значительных величин (до 35%). Другими словами, убытки больше в периоды рецессии и меньше в противоположной ситуации.

- *Характер бизнеса заемщика*: фондоемкие отрасли промышленности, в особенности муниципальные, коммунальные предприятия, имеют более высокие нормы восстановления, чем компании из сферы услуг (с некоторыми исключениями, такими, например, как телекоммуникационные и наукоемкие компании).

- *Географическое положение* также имеет значение.
- Величина номинальных потерь, представляется, не имеет сильного влияния на реальные потери.

Для более подробной информации см. работы [Altman, Resti et al. (2001)], [Altman, Brady et al. (2005)], [Varma, Cantor (2005)], [Acharya et al. (2007)] и ссылки в этих работах.

Решения, предложенные для оценки НВ, могут быть разделены на четыре категории.

- *Субъективная оценка* основана на историческом опыте и сегментации кредитного портфеля.

- *Стандартная мера* рассчитывается как фиксированная процентная ставка на основе имеющихся собственных данных.

- *Подразумеваемая рыночная норма восстановления*: норма восстановления рассчитывается на основе цен рискованных (но не дефолтных) облигаций с использованием теоретических моделей ценообразования активов. В эту категорию также можно включить оценки НВ, рассчитанные на основе рыночных цен облигаций, оказавшихся в дефолте, или цен ликвидных займов вскоре после фактического дефолта. Эта процедура является классической для английских и американских банков, в то же время она менее распространена в континентальной Европе.

- *Финансовый подход к оценке НВ*: рассматривается множество оценок движения наличных средств и затрат, полученных на основе опыта работы с просроченной задолженностью и/или с иной собранной информацией и надлежащим образом дисконтированных, а также оценки номинальных потерь. Этот подход достаточно распространен в континентальной Европе.

Если мы рассмотрим последнюю методологию, то в соответствии с ней НВ вычисляется на основе: *ожидаемого восстановления* (ОВ), т. е. НВ, которую банк ожидает получить от заемщика рассматриваемого типа, учитывая его залог; величины *административных расходов* (АР), связанных с процедурой ликвидации; оценки необходимого для восстановления времени (t) и *маргинальной стоимости фондирования* (МСФ), в качестве которой можно взять процентную ставку по межбанковским операциям или своп-ставку. С учетом ранее введенных обозначений НВ вычисляется следующим образом:

$$НВ = \frac{ОВ - АР}{(1 + МСФ)^t},$$

или

$$ДНС(Д) = 1 - \frac{ОВ - АР}{(1 + МСФ)^t}.$$

Важно отметить, что процедура вычисления НВ сильно зависит от определения неплатежеспособности, которого мы придерживаемся при анализе: если определение очень строгое, оценка НВ будет, как правило, достаточно низкой и, соответственно, дефолтные заемщики будут в крайне жестких условиях. Если определение не является строгим, то оценка НВ возрастет и заемщики, классифицированные как неплатежеспособные, будут в более хороших условиях, чем заемщики, классифицируемые как дефолтные в соответствии с более строгим определением. Кроме того, существование различных законов о банкротстве неизбежно сказывается на оценках НВ (см., например, табл. G.1 из главы «Техническая документация CreditMetrics» в работе [Gupton et al. (1997)]).

11. Эмпирические свидетельства для значений норм восстановления

Существует множество исследований, отраженных в литературе по финансовой тематике, касающихся изучения восстановления облигаций или займов. В большинстве опубликованных исследований изучается восстановление облигаций, а не займов. Этот факт объясня-

ется тем, что по облигациям имеется достаточное количество данных. Хотелось бы надеяться, что займы столь же хорошо исследованы, как и облигации. Банковские займы обычно имеют большой приоритет в структуре капитала, и банкам следует более активно следить за меняющимся финансовым здоровьем заемщиков.

В работе [Hu, Perraudin (2002)] показано, что НВ должника зависит от промышленного сектора, в котором он занят, а в работе [Altman, Kishore (1996)] отмечено, что должники из ряда таких отраслей, как, например, коммунальный сектор, имеют большую НВ, чем другие.

Кроме того, в работе [Altman, Kishore (1996)] обосновано, что устойчиво повторяется результат, состоящий в том, что приоритет обязательств в структуре капитала должника и наличие обеспечения (обеспеченные обязательства против необеспеченных) — наиболее важные составляющие НВ долговых обязательств. В связи с этим структура капитала компании может быть структурирована следующим образом (рис. 6).

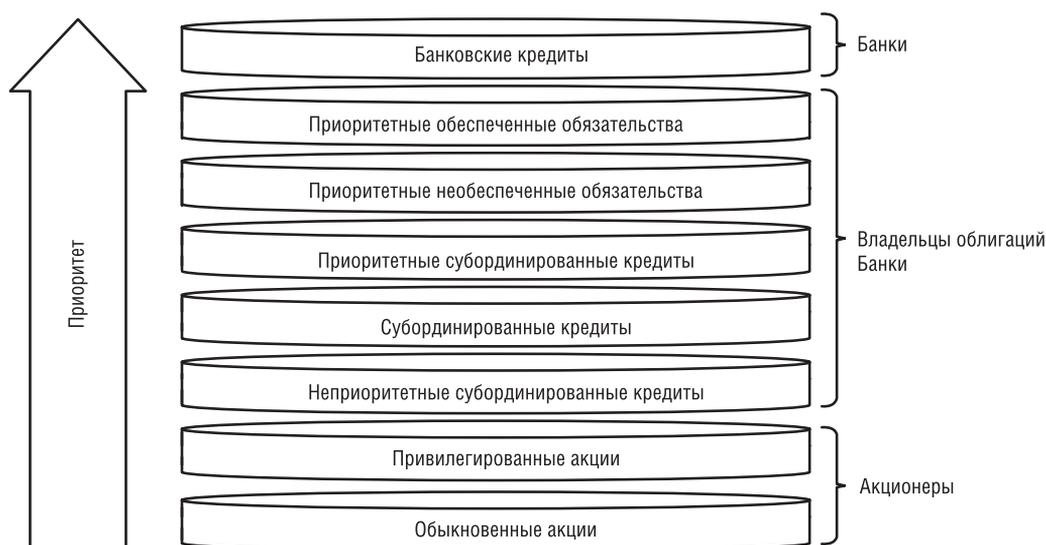


Рис. 6. Степень приоритета

В США и многих других странах законы о банкротстве имеют важную особенность, называемую *правилом абсолютного приоритета* (ПАП). Коротко говоря, это правило гласит, что стоимость компании, оказавшейся в состоянии банкротства, должна быть распределена между поставщиками капитала таким образом, чтобы сначала долг был погашен перед кредиторами, обязательства перед которыми имеют наибольший приоритет, потом перед кредиторами, обязательства перед которыми имеют меньший приоритет, а затем оставшаяся стоимость компании распределяется между ее акционерами.

Однако на практике ПАП систематически нарушается. В действительности некоторыми исследователями обнаружено, что банкротства, при которых акционеры получают какие-то средства до того, как долги будут полностью погашены перед кредиторами, составляют 65–80% (см., например, [Eberhart, Weiss (1998)] и ссылки в этой работе). Основной причиной этого является скорость погашения долгов (кредиторы согласны с нарушениями ПАП ради того, чтобы побыстрее получить причитающиеся им средства).

Рассматривая значения НВ, представленные в некоторых исследовательских работах, можно рассчитать средние значения НВ для каждого класса и получить более надежные значения (табл. 8).

Таблица 8

Средние значения НВ

Авторы	Банковские кредиты	Приоритетные обеспеченные обязательства	Приоритетные необеспеченные обязательства	Приоритетные субординированные кредиты	Субординированные кредиты
[Carty, Lieberman (1996)]	71	57	46		34
[Van de Castle, Keisman (2000)]	84	66	49	37	26
[Hamilton, Cantor, Ou (2002)]	67	52	44	35	32
[Emery, Cantor, Avner (2004)]	67				
[Fons (1994)]		65	48	40	30
[Altman, Kishore (1996)]		58	48	34	31
[Hu, Perraudin (2002)]		53	50	38	33
[Altman, Fanjul (2004)]		52	35	30	31
Средние значения	72,25	57,57	45,71	35,67	31,00

Тем не менее эти значения должны использоваться с некоторой осторожностью, поскольку количество изучаемых данных обычно не очень велико. При расчете значений НВ рассматривается главным образом рынок облигаций и не рассматриваются банковские кредиты. Следовательно, гораздо лучше, если банк сосредоточивает свой бизнес в основном на локальном рынке, поскольку это позволяет полагаться как на данные, собранные самим банком, так и на информацию, получаемую с подобных же рынков.

12. Распределение нормы восстановления

Распределения норм восстановления, как правило, имеют две вершины, или моды. Это означает, что НВ либо очень маленькая, либо очень большая. Кроме того, маленькое значение НВ — более распространенное явление. Как указывалось ранее, существует вполне четкая взаимосвязь между уровнем приоритета долгового обязательства и НВ. Последнее можно обнаружить, если, например, рассмотреть данные из базы по дефолтным рискам рейтингового агентства Moody's (Moody's Default Risk Service Database) (рис. 7).

По мере того как мы двигаемся вниз в структуре капитала — к позициям с меньшим приоритетом, вероятностная масса смещается влево, т. е. нормы восстановления уменьшаются. Интересно отметить, что для функции распределения приоритетных необеспеченных инструментов сохраняется бимодальность, тогда как для субординированных и приоритетных субординированных кредитов большинство вероятностной массы сосредоточено при ма-

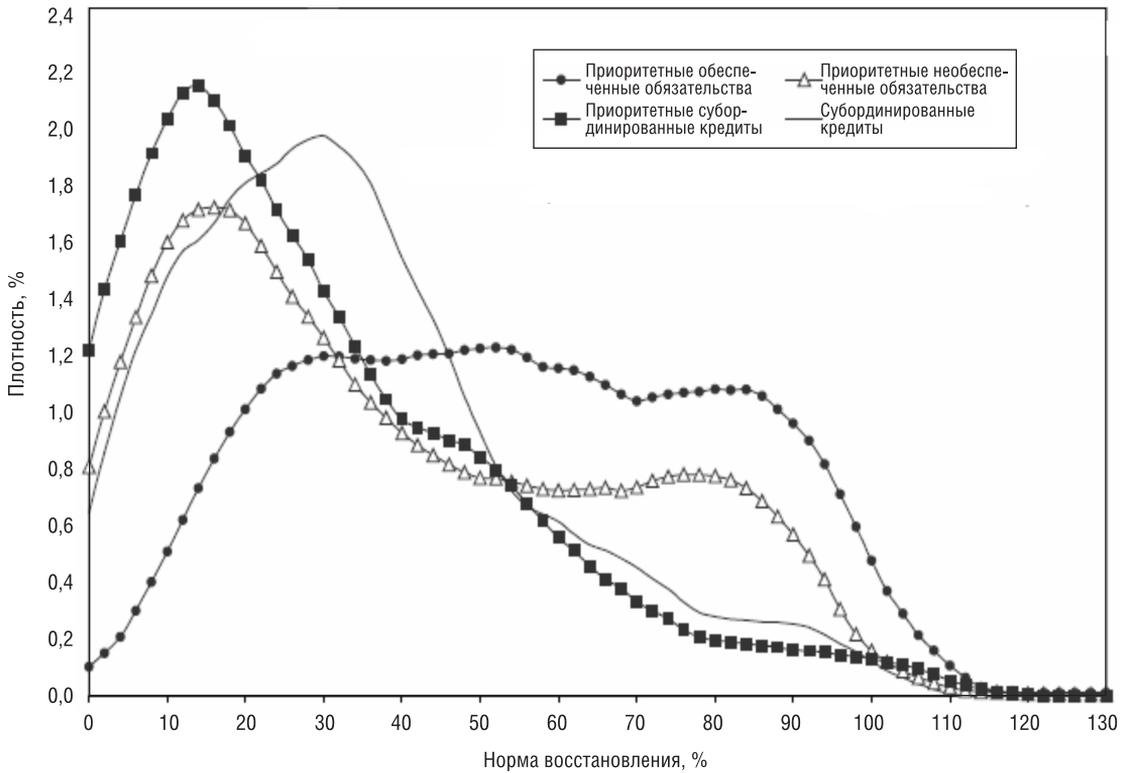


Рис. 7. Плотности функций распределения НВ для кредитов с разным уровнем приоритета (Moody's, 1970–2003).
 Источник: [Shimko (2004)]

лых значениях НВ (около 15%)⁸. Однако приоритетные обеспеченные инструменты имеют почти плоское распределение, указывающее на то, что нормы восстановления относительно равномерно распределены от 30 до 80%. Отметим, что нормы восстановления могут превосходить 100% ввиду различий в период восстановления между купонными ставками и преобладающими процентными ставками, т. е. если купоны превышают величину преобладающей процентной ставки.

В случае когда ничего неизвестно относительно норм восстановления и можно было бы предположить, что все возможные нормы восстановления равновероятны, можно моделировать их с помощью *равномерного распределения* $U(0, 1)$. Однако такой выбор редко описывает реальную ситуацию (см. рис. 7).

Другой альтернативой является выбор *бета-распределения*, которое позволяет моделировать вероятностную массу вокруг моды и толщину «хвостов». Плотность этого распределения равна

$$f(x, a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1},$$

⁸ Субординированные кредиты с низким уровнем приоритета включены в категорию субординированных кредитов, поскольку выборка по ним мала.

где $0 \leq x \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $B(a,b)$ — бета-функция:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Если $a = b = 1$, то бета-распределение сводится к равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. При заданных оценках выборочного среднего $\hat{\mu}$ и дисперсии $\hat{\sigma}^2$ оценки параметров бета-распределения, полученные методом моментов, равны соответственно

$$\hat{b} = \frac{\hat{\mu}(\hat{\mu}-1)^2}{\hat{\sigma}^2} + \hat{\mu} - 1,$$

$$\hat{a} = -\frac{\hat{b}\hat{\mu}}{\hat{\mu}-1}.$$

Анализируя данные рейтингового агентства Moody's за 1970–2003 годы с целью оценить бета-распределения для каждой категории приоритета, получаем следующие результаты (табл. 9)⁹.

Таблица 9

Оценки параметров бета-распределения, описывающего НВ для каждой категории приоритета

Уровень приоритета	Среднее	Стандартное отклонение	N	Параметры бета-распределения	
				a	b
Приоритетные обеспеченные обязательства	54,26	25,82	433	1,48	1,25
Приоритетные необеспеченные обязательства	38,71	27,80	971	0,80	1,27
Приоритетные субординированные кредиты	28,51	23,41	260	0,78	1,94
Субординированные кредиты	34,65	22,23	347	1,24	2,34
Неприоритетные субординированные кредиты	14,39	8,99	12	2,05	12,19

График плотности бета-распределения для приоритетных обеспеченных облигаций, параметры которого равны $a = 1,48$, $b = 1,25$, представлен на рис. 8.

Реализуя подобную процедуру для всех категорий очередности, получим следующие плотности, изображенные на рис. 8 (при этом с помощью соответствующего масштабного множителя шкала возможных значений $[0; 1]$ бета-распределенной случайной величины преобразована в шкалу $[0\%; 100\%]$).

⁹ Следуя принятым в данной области правилам, все линейные характеристики бета-распределений случайной величины даются в процентах (т.е. шкала ее возможных значений умножается на 100%).

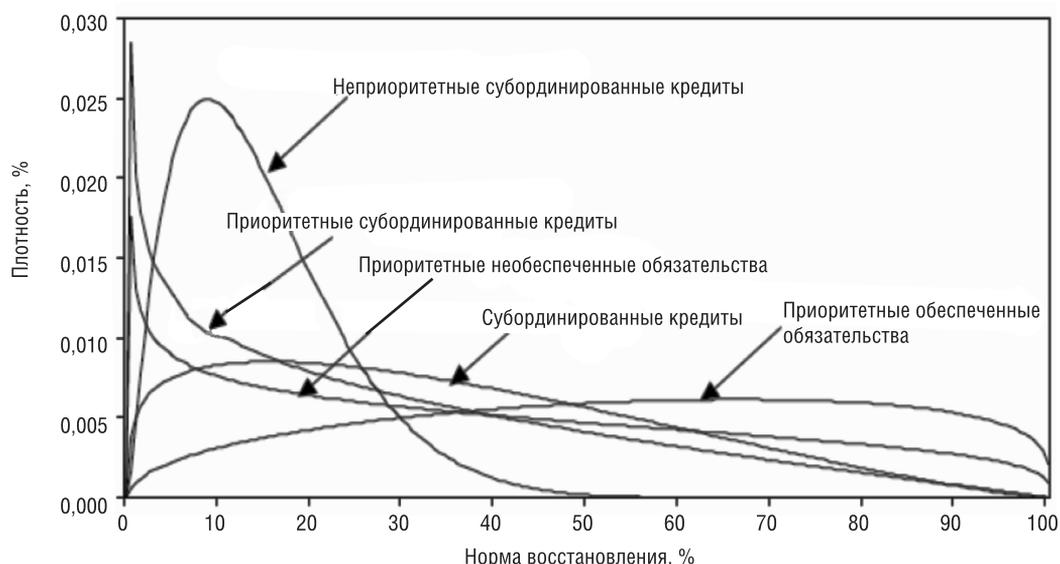


Рис. 8. Функции бета-плотности для всех классов (Moody's, 1970–2003)

Однако плотности, представленные на рис. 8, лишь частично напоминают эмпирические плотности, представленные на рис. 7.

13. Связь между ВД и НВ

Как отмечалось ранее, вероятность дефолта или доля дефолтов (т. е. доля дефолтных компаний в экономике) и среднее значение для норм восстановления отрицательно коррелированы (см., например, [Altman, Resti et al. (2001)], [Altman, Brady et al. (2005)] и [Acharya et al. (2007)]), что отражено, в частности, на рис. 9.

Этот результат подтверждается результатами, полученными в работе [Hu, Perraudin (2002)], в которой установлено, что корреляция между нормами восстановления и агрегированными долями дефолта для США равна в среднем $-0,2$ и около $-0,3$, если рассматривать только достаточно большие или достаточно малые значения агрегированной доли дефолта и соответствующее им среднее для норм восстановления.

В работе [Altman, Resti et al. (2001)] сделана попытка рассчитать, насколько сильно увеличивается 99%-я граница потерь, если учесть отрицательную корреляцию между нормами восстановления и долями дефолта. На основе статической модели авторы утверждают, что 99%-я граница потерь для репрезентативного портфеля может меняться от значения, равного приблизительно 3,8%-й доли убытков, до значения, равного 4,9%-й доли убытков, при переходе от модели, в которой нормы восстановления постоянны, к модели, в которой учитывается отрицательная зависимость между нормами восстановления и долями дефолта.

Представляется, что НВ и ВД движимы одним и тем же общим фактором, который достаточно устойчив во времени и связан с бизнес-циклами: в периоды рецессии, или спада, в промышленности вероятности дефолтов велики, а нормы восстановления малы. Можно продемонстрировать этот результат, снова воспользовавшись данными по дефолтам, собранными рейтинговым агентством Moody's, отдельно анализируя нормы восстановления

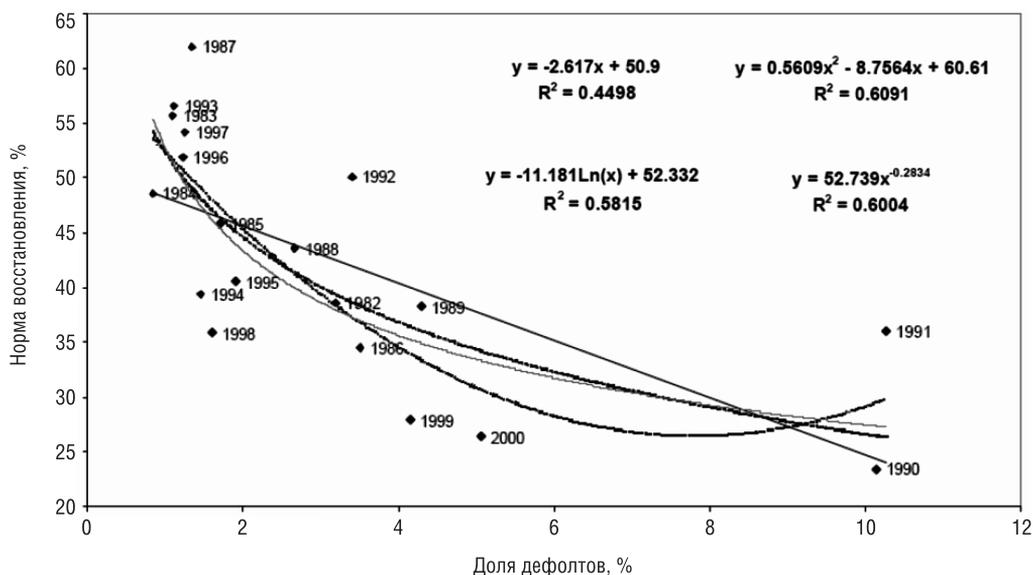


Рис. 9. Норма восстановления/Доля дефолтов: взяты данные по облигациям за период 1982–2000 годы.
 Источник: [Altman, Resti et al. (2001)]

в периоды спадов и в периоды подъемов американской экономики с 1970 года. Сводные выборочные статистики представлены в табл. 10.

Таблица 10

Нормы восстановления для разных периодов бизнес-цикла (Moody's, 1970–2003)

Период бизнес-цикла	Среднее	Стандартное отклонение	НВ при вероятности дефолта			N
			25%	50%	75%	
Рецессия	32,07	26,86	10	25	48,5	322
Рост	41,39	26,98	19,5	36	62,5	1703
По всей выборке	39,91	27,17	18	34,5	61,37	2025

В периоды рецессии нормы восстановления меньше, чем в периоды роста. Кроме того, в периоды роста экономики нормы восстановления распределены более равномерно. В работе [Altman, Brady et al. (2005)] приведена регрессия среднего для норм восстановления на агрегированные вероятности дефолта и макроэкономические переменные, анализируя которую можно увидеть, что нормы восстановления и агрегированные вероятности дефолта тесно взаимосвязаны, а макроэкономические переменные становятся незначимыми, как только агрегированные вероятности дефолта включаются в регрессию в качестве объясняющих переменных. Авторы предполагают, что это происходит в силу неэластичности спроса на дефолтные ценные бумаги. Гипотеза авторов заключается в том, что типичные инвесторы, вкладывающие средства в дефолтные ценные бумаги, имеют ограниченные возможности. Поэтому в период, когда происходит много дефолтов, цена дефолтных ценных бумаг быстро падает.

В работе [Acharya et al. (2007)] за основу принимается аргумент, предложенный в [Shleifer, Vishny (1992)], а именно: предположим, что некоторый сектор промышленности находится в бедственном положении и некоторые компании, занятые в этом секторе, оказались в состоянии дефолта. Если активы компаний, оказавшихся в дефолте, состоят из активов в этом же секторе промышленности, то эти компании, которые могли бы наилучшим образом распорядиться этими активами, также оказались в бедственном положении и не смогут выкупить указанные активы. Это может привести к низкой цене на активы, а следовательно, к низкой норме восстановления. В работе [Shleifer, Vishny (1992)] рассматривалась цепь перепродажи реальных активов, тогда как в [Altman, Brady et al. (2005)] — цепь перепродажи финансовых активов (дефолтные облигации). При этом в первом случае снижается цена перепродажи реальных активов, а во втором — цена перепродажи финансовых активов (дефолтных облигаций).

Из статьи [Altman, Kishore (1996)] вытекает, что корпоративные облигации компаний некоторых отраслей экономики (например, коммунальные службы) надежнее. Их исследование охватывает достаточно длинный период (1971–1995 годы), и мы воспроизведем некоторые полученные ими результаты в табл. 11.

Таблица 11

Средняя норма восстановления для разных отраслей экономики и секторов промышленности

Отрасль экономики, сектор промышленности	Средняя НВ, %	Отрасль экономики, сектор промышленности	Средняя НВ, %
Коммунальные службы	70	Телекоммуникации	37
Сфера услуг	46	Финансовые компании	36
Пищевая промышленность	45	Недвижимость	35
Торговля	44	Магазины со смешанным ассортиментом	33
Производство	42	Текстильная промышленность	32
Строительство	39	Бумажная промышленность	30
Транспорт	38	Сдача помещений в аренду	26

Источник: [Altman, Kishore (1996)]

Эти общие выводы подтверждаются на более поздних данных (см. [Grossman et al. (2001)]) по рейтингуемому агентством Fitch облигациям и займам за 1997–2000 годы. В соответствии с работой [Grossman et al. (2001)] различия в ставках восстановления займов и облигаций для одних и тех же секторов экономики достаточно значительны. Например, облигации компаний сферы услуг имеют удивительно низкие нормы восстановления (около 3%) сравнительно с нормой восстановления займов (около 42%). Конечно, мы не обладаем информацией относительно уровня приоритетности долговых обязательств, поэтому следует принимать эти результаты с некоторой осторожностью. Более того, поскольку это средние значения, бимодальность распределения нормы восстановления не учитывается.

14. Величина номинальных потерь при дефолте

Величина номинальных потерь при дефолте для срочных кредитов, как правило, определяется однозначно. Эта ситуация несвойственна таким схемам кредитования, как, например, кредитная линия, когда заемщик теоретически может отклониться от первоначально установленной схемы возвращения долга. Более того, в случае ухудшения финансового положения заемщика, как правило, отклоняются от первоначально установленной схемы кредитной линии настолько, насколько это возможно в сложившихся условиях, с целью избежать дефолта. В базовом ПВР вычисление величины номинальных потерь при дефолте в случае, когда процедура измерения не вполне четкая, основано на контрольных значениях. Например, ВВП(Д) для безотзывных неиспользованных обязательств равна 75%. При этом для усовершенствованного ПВР величина номинальных потерь при дефолте может быть определена на основе модели, используемой в банке.

Анализ кредитных линий и соответствующих им величин номинальных потерь, значения которых неизвестны в начальный момент времени, требует тщательной оценки следующих элементов:

- *величины кредита*, т. е. максимальной суммы, которая может быть использована заемщиком;
- *извлеченной суммы*, т. е. использованной заемщиком части кредита;
- *неизвлеченной суммы*, т. е. неиспользованной заемщиком части кредита.

В качестве примера рассмотрим статистический бюллетень Банка Италии, в котором отражено осуществляемое банками финансирование заемщиков с помощью кредитных линий или похожими схемами начиная с сентября 2004 года (табл. 12).

Таблица 12

Величины кредитов и извлеченные суммы (Банк Италии, сентябрь 2004 года)

Сумма выделенного кредита, евро	Число заемщиков	Среднее величин кредитов, евро	Среднее извлеченных сумм	
			евро	%
От 75 000 до 125 000	778 918	83 357	74 681	89,59
От 125 000 до 250 000	417 587	84 479	69 508	82,28
От 250 000 до 500 000	146 492	71 478	50 727	70,97
От 500 000 до 2 500 000	134 747	206 749	139 555	67,50
От 2 500 000 до 5 000 000	18 271	93 498	63 034	67,42
От 5 000 000 до 25 000 000	13 339	196 898	130 275	66,16
Более 25 000 000	2438	522 694	350 201	67,00

Очевидно, что чем меньше величина кредита, тем больше процент извлеченных заемщиками сумм.

С учетом вышеупомянутых элементов ВВП(Д) может быть разложена на два компонента:

- *рисковую составляющую*, которую обычно называют *скорректированной ВВП(Д)* или *фактором эквивалентности займа (ФЭЗ)*:

$$\text{ФЭЗ} = \text{Извлеченная сумма} + (\text{Величина кредита} - \text{Извлеченная сумма}) \times \text{ДИС(Д)},$$

где ДИС(Д) — оценка доли использованных средств компанией, оказавшейся в состоянии дефолта (в процентах);

- *безрисковую составляющую*, которая определяется следующим образом:

$$(\text{Величина кредита} - \text{Извлеченная сумма}) \times (1 - \text{ДИС(Д)}).$$

При нормальных условиях ДИС(Д) достаточно стабильна во времени. Однако если у заемщика возникают некоторые финансовые проблемы, он берет больше денег и его ДИС(Д) увеличивается. С финансовой точки зрения ДИС(Д) можно рассматривать как опцион, который заемщик может исполнить в случае финансовой необходимости. В качестве компенсации банк берет комиссию, равную фиксированному проценту от неиспользованной суммы.

Как оценить ДИС(Д) и ФЭЗ? Эти величины зависят от кредитного качества, типа кредитной схемы, а также от страны кредитора. На эту тему довольно мало эмпирических исследований. В одной из немногих работ, посвященных указанной тематике, а именно в [Asarnow, Marker (1995)], анализируется характер больших корпоративных заемных обязательств перед Ситибанком за период с 1988 по 1993 год и показана важность кредитных рейтингов, в особенности на спекулятивном уровне (табл. 13).

Таблица 13

Извлеченные суммы, ДИС(Д) и ФЭЗ (Ситибанк, 1988–1993)

Рейтинг	Извлеченная сумма, %	ДИС(Д), %	ФЭЗ, %
	(А)	(В)	(А)+[100-(А)]·(В)
AAA	0,10	69,00	69,03
AA	1,60	73,00	73,43
A	4,60	71,00	72,33
BBB	20,00	65,00	72,00
BB	46,80	52,00	74,46
B	63,70	48,00	81,12
CCC	75,00	44,00	86,00

Список литературы

Acharya V., Bharath S., Srinivasan A. Does Industry-wide Distress Affect Defaulted Firms? Evidence from Creditor Recoveries // *Journal of Financial Economics*. 2007. № 85(3). P. 787–821.
 Akaike H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle / Second Interantional Symposium on Information Theory. 1974. P. 267–281.
 Altman E. I., Brady B., Resti A., Sironi A. The Link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence, and Implications // *Journal of Business*. 2005. № 78(6). P. 2203–2227.

- Altman E. I., Fanjul G. Defaults and Returns in the High Yield Bond Market: The Year 2003 in Review and Market Outlook / NYU Salomon Center. Working Paper. 2004. February.
- Altman E. I., Kishore V. M. Almost everything you wanted to know about recoveries on defaulted bonds // *Financial Analysis Journal*. 1996. P. 57–64.
- Altman E. I., Resti A., Sironi A. Analyzing and Explaining Default Recovery Rates. London: Report submitted to ISDA, 2001.
- Altman E., Sabato G. Modeling Credit Risk for SMEs: Evidence from the U. S. Market // *ABACUS*. 2007. № 43(3). P. 332–357.
- Asarnow E., Marker J. Historical Performance of the U. S. Corporate Loan Market: 1988–1993 // *The Journal of Commercial Lending*. 1995. № 10(2). P. 13–32.
- Bamber D. The area above the ordinal dominance graph and the area below the receiver operating characteristic graph // *Journal of Mathematical Psychology*. 1975. № 12. P. 387–415.
- Bernardo J. M., Smith A. F. M. Bayesian Theory. Wiley, 1994.
- Bharath S., Shumway T. Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model // *Review of Financial Studies*. 2008. № 21(3). P. 1339–1369.
- Biais B., Glosten L., Spatt C. Market Microstructure: a Survey of Microfoundations, Empirical Results and Policy Implications // *Journal of Financial Markets*. 1993. № 8(2). P. 217–264.
- Bielecki T., Rutkowski M. Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging. Springer-Verlag, 2002.
- BIS: Basel Committee on Banking Supervision. Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework / Bank for International Settlementment document. 2005.
- Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. № 81(3). P. 637–654.
- Breslow N. E., Clayton D. G. Approximate inference in generalized linear mixed models // *Journal of the American Statistical Association*. 1993. № 88. P. 9–25.
- Buckland S. T., Burnham K. P., Augustin N. H. Model selection: an integral part of inference // *Biometrics*. 1997. № 53. P. 603–618.
- Burnham K. P., Anderson D. R. Model selection and inference: a practical information-theoretic approach. New York: Springer-Verlag, 1998.
- Cai B., Dunson D. B. Bayesian covariance selection in generalized linear mixed models // *Biometrics*. 2006. № 62(2). P. 446–457.
- Cameron A. C., Trivedi P. K. Microeconometrics: Methods and Applications. New York: Cambridge University Press, 2005.
- Carty L., Lieberman D. Defaulted Bank Loan Recoveries / Moody's Special Comment. 1996.
- Cagri S., Benedetto F. There is Something about Parmalat (On Directors and Gatekeepers): Discussion paper. Milan: Bocconi University, 2006.
- Chen K., Fan J., Jin Z. Design-adaptive Minimax Local Linear Regression for Longitudinal / Clustered Data // *Statistica Sinica*. 2008. № 18. P. 515–534.
- Cochrane J. H. Asset pricing / Princeton University Press. 2001.
- Crosbie P. J., Bohn J. R. Modeling Default Risk. KMV LLC. 2001.
- Crowder M. J. Beta-binomial Anova for proportions // *Applied Statistics*. 1978. № 27. P. 34–37.
- DeLong E. R., DeLong D. M., Clarke-Pearson D. L. Comparing the Areas under Two or More Correlated Receiver Operating Characteristic Curves: A Non-parametric Approach // *Biometrics*. 1988. № 44(3). P. 837–845.

- Dietsch M., Petey J.* The impact of size, sector and location on credit risk in SME loans portfolios / Universite Robert Schuman de Strasbourg. 2007. Working paper.
- Dobson A. J.* Introduction to Generalised Linear Model. Chapman & Hall, 2002.
- Eberhart A. C., Weiss L. A.* The Importance of Deviations from the Absolute Priority Rule in Chapter 11 Bankruptcy Proceedings // *Financial Management*. 1998. № 27(4). P. 106–110.
- Efron B.* Computer and the theory of statistics: thinking the unthinkable // *SIAM Review*. 1979.
- Efron B., Tibshirani R.* An Introduction to the Bootstrap. London: Chapman & Hall, 1993.
- Efron B., Tibshirani R.* The problem of regions // *Annals of Statistics*. 1998. № 26. P. 1687–1718.
- Elliott G., Rothenberg T., Stock J.* Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root // *Econometrica*. 1996. № 64. P. 813–836.
- Emery K., Cantor R., Avner R.* Recovery Rates on North American Syndicated. Bank Loans, 1989–2003 / Moody's Investors Service. 2004. March.
- Fantazzini D.* Forecasting Default Probability without Accounting Data: Evidence from Russia / In: G. Gregoriou (ed.), Stock Market Volatility. Chapman Hall-CRC / Taylor and Francis, 2009.
- Fantazzini D., Degiuli E., Maggi M.* A new Approach for Firm Value and Default Probability Estimation beyond the Merton Models // *Computational Economics*. 2008a. № 31(2). P. 161–180.
- Fantazzini D., Dallavalle L., Giudici P.* Copulae and operational risks // *International Journal of Risk Assessment and Management*. 2008b. № 9(3). P. 238–257.
- Fantazzini D., Figini S.* Random Survival Forest models for SME Credit Risk Measurement // *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2009a. forthcoming.
- Fantazzini D., Figini S.* Default Forecasting for Small-Medium Enterprises: Does Heterogeneity Matter? // *International Journal of Risk Assessment and Management*. 2009b. forthcoming.
- Felsenstein J.* Confidence limits on phylogenies: an approach using the bootstrap // *Evolution*. 1985. № 39. P. 783–791.
- Fidrmuc J., Hainz C., Malesich A.* Default Rates in the Loan Market for SMEs: Evidence from Slovakia / William Davidson Institute — University of Michigan. 2007. Working paper.
- Fielding A. H., Bell J. F.* A review of methods for the assessment of prediction errors in conservation presence / absence models // *Environmental Conservation*. 1997. № 24. P. 38–49.
- Fons J. S.* Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk // *Financial Analysis Journal*. Moody's Investors Service. 1994. P. 25–33.
- French K. R., Roll R.* Stock return variances: The arrival of information and the reaction of traders // *Journal of Financial Economics*. 1986. № 17(1). P. 5–26.
- Fuertes A. M., Kalotychou E.* Early Warning Systems for Sovereign Debt Crises: The Role of Heterogeneity // *Computational Statistics and Data Analysis*. 2006. № 51. P. 1420–1441.
- Gamerman D.* Sampling from the posterior distribution in generalized linear mixed models // *Statistics and Computing*. 1997a. № 7. P. 57–68.
- Gamerman D.* Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference. London: Chapman Hall, 1997b.
- Gelfand A. E., Sahu S.* Gibbs Sampling, Identifiability and Improper Priors in Generalized Linear Mixed Models // *Journal American Statistical Association*. 1999. № 94. P. 247–253.
- Gelman A., Carlin J. C., Stern H., Rubin D. B.* Bayesian Data Analysis. New York: Chapman and Hall, 1995.
- Gine E., Zinn J.* Bootstrapping General Empirical Measures // *The Annals of Probability*. 1990. № 18(2). P. 851–869.

- Giudici P. Applied Data Mining, Statistical Methods for Business and Industry. Wiley, 2003.
- Goin J. E. ROC curve estimation and hypothesis testing: Applications to breast cancer detection // *The Journal of the Pattern Recognition Society*. 1982. № 15. P. 263–269.
- Granger C., Patton A., Terasvirta T. Common Factors in Conditional Distributions for Bivariate Time Series // *Journal of Econometrics*. 2006. № 132. P. 43–57.
- Granger C., Pesaran M. Economic and Statistical measures of Forecast Accuracy // *Journal of Forecasting*. 2000. № 19. P. 537–560.
- Green W. Econometric Analysis. Prentice Hall, 2002.
- Griep C., De Stefano M. Standard & Poor's Official Response to the Basel Committee's Proposal // *Journal of Banking and Finance*. 2001. № 25(1). P. 149–170.
- Grossman R., O'Shea S., Bonelli S. Bank Loan and Bond Recovery Study: 1997–2000 / Fitch Loan Products Special Report. 2001.
- Gupton G. M., Finger C. C., Bhatia M. CreditMetrics: Technical document. J. P. Morgan and Co, 1997.
- Hamilton D., Cantor R., Ou S. Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers / Moody's Investors Services. 2002.
- Hanley A., McNeil B. A method of comparing the area under ROC curves derived from the same cases // *Diagnostic Radiology*. 1983. № 148. P. 839–843.
- Hansen A., Lunde P. A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)? // *J. Appl. Econom.* 2005. № 20. P. 873–889.
- Hao H. Is the Structural Approach More Accurate than the Statistical Approach in Bankruptcy Prediction? / Queen's School of Business. 2006. Working Paper.
- Hasbrouck J. Empirical Market Microstructure / Oxford University Press. 2007.
- Hasbrouck J. Trades, Quotes, Inventories and Information // *Journal of Financial Economics*. 1988. № 22. P. 229–252.
- Hasbrouck J., Sofianos G. The Trades of Market Makers: An Empirical Analysis of NYSE Specialists // *Journal of Finance*. 1993. № 48(5). P. 1565–1593.
- Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. H. The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction. Springer, 2001.
- Hu Y, Perraudin W. The dependence of recovery rates and defaults. Mimeo: Birbeck College, 2002.
- Huggins R. On the statistical analysis of capture experiments // *Biometrika*. 1989. № 76. P. 133–140.
- Hull J. C. Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, 2005.
- Karlis D., Kostaki A. Bootstrap Techniques for Mortality Models // *Biometrical Journal*. 2002. № 44(7). P. 850–866.
- Kohavi R., Provost F. Glossary of Terms. Editorial for the Special Issue on Applications of Machine Learning and the Knowledge Discovery Process // *Machine Learning*. 1998. № 30(2/3). P. 271–274.
- Kwiatkowski D., Phillips P., Schmidt P., Shin Y. Testing the Null Hypothesis of Stationary against the Alternative of a Unit Root // *Journal of Econometrics*. 1992. № 54. P. 159–178.
- Libby R. Ratios and the Prediction of Failure: Some Behavioral Evidence // *Journal of Accounting Research*. 1975. Spring. P. 150–161.
- Libby R., Trotman K. T., Zimmer I. Member Variation, Recognition of Expertise, and Group Performance // *Journal of Applied Psychology*. 1987. № 72. P. 81–87.

Madhavan A., Smidt S. A Bayesian model of Intraday Specialist Pricing // *Journal of Financial Economics*. 1991. № 30. P. 99–134.

Madhavan A., Sofianos G. An Empirical Analysis of the NYSE Specialist Trading // *Journal of Financial Economics*. 1997. № 48. P. 189–210.

Merton R. Analytical Optimal Control Theory as Applied to Stochastic and Non-Stochastic Economics: Ph. D. diss.. Massachusetts Institute of Technology, 1970.

Merton R. On the pricing of contingent claims and the Modigliani-Miller theorem // *Journal of Financial Economics*. 1977. № 5(2). P. 241–249.

Merton R. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates // *The Journal of Finance*. 1974. № 29. P. 449–470.

Mester L. Whats the Point of Credit Scoring? // Federal Reserve Bank of Philadelphia. Business Review. 1997. P. 3–16.

Metz C. E., Kronman H. B. Statistical significance tests for binormal ROC curves // *Journal of Mathematical Psychology*. 1980. № 22. P. 218–243.

Miller M. H., Modigliani F. Dividend policy, growth, and the valuation of shares // *Journal of Business*. 1961. № 34. P. 411–433.

Miller M. H., Modigliani F. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment // *American Economic Review*. 1958. № 48. P. 261–297.

Norris J., Pollock K. Including model uncertainty in estimating variances in multiple capture studies // *Environmental and Ecological Statistics*. 1996. № 3. P. 235–244.

Oka C. Anticipating arrears to the IMF: early warning systems / IMF. 2003. Working paper.

Provost F., Fawcett T., Kohavi R. The Case Against Accuracy Estimation for Comparing Classifiers / In Proceedings of the Fifteenth International Conference on Machine Learning, (ICML-98). 1998.

Rabe-Hesketh S., Skrondal A. Generalized Latent Variable Modeling. Chapman and Hall, 2004.

Rabe-Hesketh S., Skrondal A. Multilevel and Longitudinal Modeling using Stata. STATA press, 2005.

Rabe-Hesketh S., Skrondal A., Pickles A. Maximum Likelihood estimation of limited and discrete dependent variable models with nested random effects // *Journal of Econometrics*. 2005. № 128(2). P. 301–323.

Rabe-Hesketh S., Skrondal A., Pickles A. Reliable estimation of generalized linear mixed models using adaptive quadrature // *Stata Journal*. 2002. № 2(1). P. 1–21.

Rodriguez P., Rodriguez A. Understanding and Predicting Sovereign Debt Rescheduling: A Comparison of the Areas under Receiver Operating Characteristic Curves // *Journal of Forecasting*. 2006. № 25. P. 459–479.

Saunders A. Financial institutions management. Irwin, 1997.

Schröder B., Richter O. Are habitat models transferable in space and time? // *Journal of Nature Conservation*. 1999. № 8. P. 195–205.

Schwarz G. Estimating the dimension of a model // *The Annals of Statistics*. 1978. № 6. P. 461–464.

Shimko D. Credit Risk Models and Management. Risk Books, 2004.

Shleifer A., Vishny R. W. Liquidation Values and Debt Capacity: A Market Equilibrium Approach // *Journal of Finance*. 1992. № 47(4). P. 1343–1366.

Tilling K., Sterne J. Capture-recapture models including covariate effects // *American Journal of Epidemiology*. 1999. № 149. P. 392–400.

Tilling K., Sterne J., Wolfe C. Estimation of incidence of stroke using a capture-recapture model including covariates // *International Journal of Epidemiology*. 2001. № 30. P. 1351–1359.

Tsay R. *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, 2002.

Treacy W. F., Carey M. Credit Risk Rating Systems at Large U. S. Banks // *Journal of Banking and Finance*. 2000. № 24(1-2). P. 167–201.

Van de Castle K., Keisman D. Suddenly Structure Mattered: Insights into Recoveries of Defaulted // *Standard and Poor's Corporate Ratings*. 2000. 24 May.

Van der Laan M., Bryan J. Gene expression analysis with the parametric bootstrap // *Biostatistics*. 2001. № 2(4). P. 445–461.

Vapnik V. *Statistical Learning Theory*. Wiley, 1998.

Varma P., Cantor R. Determinants of Recovery Rates on Defaulted Bonds and Loans for North American Corporate Issuers: 1983-2003 // *Journal of Fixed Income*. 2005. № 14(4). P. 29–44.

Vassalou M., Xing Y. Default Risk in Equity Returns // *The Journal of Finance*. 2004. № LIX(2). P. 831–868.

Zwane E., Van der Heijden P. Implementing the parametric bootstrap in capture-recapture models with continuous covariates. // *Statistics and Probability Letters*. 2003. № 65. P.121–125.

Zwane E., Van der Pal-de Bruin, Van der Heijden P. The multiple-record systems estimator when registrations refer to different but overlapping populations // *Statistics in Medicine*. 2004. № 23. P. 2267–2281.

Zweig M. H., Campbell G. Receiver-operating characteristic (ROC) plots: a fundamental evaluation tool in clinical medicine // *Clinical chemistry*. 1993. № 39(8). P. 561–577.