

Г. М. Гамбаров, Е. Л. Румянцев

## Развитие методов статистического анализа ликвидности банковского сектора

*Целью данной статьи является развитие методов оценки уровня ликвидности банковского сектора с использованием новой индикаторной переменной, именуемой структурной ликвидностью. Приводятся подробные математические выводы о влиянии политики рефинансирования Банка России на уровень корреспондентских счетов и, как следствие, на уровень структурной ликвидности. Также предлагается модель для определения необходимых изменений в денежном предложении со стороны Центрального банка с целью таргетирования процентной ставки межбанковского кредитования. Модель включает развитый аппарат фильтрации и предлагает некоторые асимптотические оценки политики таргетирования.*

### 1. Введение

В настоящее время статистический анализ динамики банковской ликвидности, а также планирование операций Центрального банка на его основе является одним из краеугольных вопросов практической реализации процентной политики. В предыдущей работе [Гамбаров (2007)] было показано, что ключевым параметром определения объемов рефинансирования и/или стерилизации ликвидности служит понятие «структурная ликвидность». В данной статье предлагается построение структурной модели денежного рынка с оценкой взаимосвязи между процентной ставкой и структурной ликвидностью.

Приведем несколько экономических определений, на которые в дальнейшем следует опираться при построении модели формирования структурной ликвидности.

**Определение 1.** *Дневная структурная ликвидность (SL)* — это сумма уровня остатков на корреспондентских счетах кредитных организаций на начало дня и величины изменения остатков на корреспондентских счетах кредитных организаций в течение дня, за исключением изменения, обусловленного операциями Банка России, проведенными в данный день.

Таким образом, показатель *SL* формируется посредством суммирования остатков средств кредитных организаций на начало дня, автономных факторов ликвидности и операций Банка России, расчеты по которым приходится на текущий день.

**Определение 2.** *Сбалансированный уровень структурной ликвидности* — это уровень структурной ликвидности, при котором процентная ставка достигает середины коридора краткосрочных процентных ставок, где роль верхней и нижней границ играют минимальная ставка прямого РЕПО и ставка по депозитам *tom-next* соответственно.

**Определение 3.** *Лаговые операции* — это операции, предоставление денег по которым происходит с задержкой в несколько дней.

## 2. Формирование дневной структурной ликвидности

Рассмотрим последовательно несколько периодов (дней) с точки зрения Центрального банка, чтобы понять, как формируется дневная структурная ликвидность.

Пусть в момент времени  $t = 0$  сумма всех корреспондентских счетов коммерческих банков равна  $LA(0)$  (*loro account*). Положим также, что величина обязательств Центрального банка равна  $CBLO$  (*central bank lag operations*), из них в следующем периоде будет выплачено  $CBLO(1)$ . Величину обязательств кредитных организаций положим равной  $R$  (*return*), из которых в следующем периоде будет возвращено  $R(1)$ .

Рассмотрим первый период  $t = 1$ . Центральный банк может совершать два типа операций:

1) *дневные операции* (*day operations, CBDO*), расчет по которым (предоставление денег кредитным организациям) происходит в течение дня;

2) заключать договоры по *операциям с лагом*, расчет по которым происходит в следующих периодах. Так как система корреспондентских счетов замкнута по отношению к коммерческим банкам данной страны, влияния от предоставления межбанковских кредитов попросту нет (так как суммарный корсчет останется неизменным). Также следует учесть объем возвращенных кредитными организациями денег Центральному банку.

Итак, состояние агрегированного корреспондентского счета на конец первого периода, или, что то же самое, на начало второго, равно:

$$LA(1) = LA(0) + CBDO(1) + CBLO(1) - R(1), \quad (1)$$

где  $LA(t)$  — величина остатков на корреспондентских счетах кредитных организаций в конце  $t$ -го периода;

$CBDO(t)$  — величина, на которую меняются остатки на корсчетах за счет дневных операций Центрального банка;

$CBLO(t)$  — выплаты по лаговым операциям, заключенным ранее  $t$ -го периода;

$R(t)$  — объем возвращенных денег.

Согласно определению 1

$$SL(1) = LA(0) + \Delta LA(1) - CBDO(1),$$

где  $\Delta LA(t) = LA(t) - LA(t - 1)$ .

С учетом (1) окончательно получаем:

$$SL(1) = LA(0) + CBLO(1) - R(1). \quad (2)$$

Из (1) и (2) для произвольного периода времени имеем:

$$LA(t) = LA(t - 1) + CBDO(t) + CBLO(t) - R(t), \quad (3)$$

$$SL(t) = LA(t - 1) + CBLO(t) - R(t). \quad (4)$$

Аналогично (3) для периода  $(t - 1)$  получаем:

$$LA(t - 1) = LA(t - 2) + CBDO(t - 1) + CBLO(t - 1) - R(t - 1).$$

Подставив данное выражение в (4), получим разностное уравнение для  $SL(t)$ :

$$SL(t) = SL(t - 1) + CBDO(t - 1) + CBLO(t) - R(t). \quad (5)$$

Последнее уравнение с помощью уравнения (3) может быть преобразовано подстановкой  $CBLO(t) - R(t)$  к виду

$$SL(t) = SL(t - 1) + \Delta LA(t) - \Delta CBDO(t). \quad (6)$$

**Замечание.**

В наших рассуждениях негласно использовались два предположения:

- 1) величина возврата — это не дневная банковская операция;
- 2) операции, возврат денег по которым происходит в день предоставления кредита, не учитываются.

Поясним вышеизложенное на следующих примерах.

**Пример 1.** Предположим, что  $R(t)$  — дневная банковская операция. Рассмотрим такой случай. Центральный банк предоставляет только лаговые кредиты, возврат денег по которым происходит в момент получения кредита. Из (3) имеем:

$$LA(t) = LA(t - 1) + CBLO(t) - R(t) = LA(t - 1).$$

Если  $R(t)$  — дневная банковская операция, то

$$SL(t) = LA(t - 1) + \Delta LA(t) - CBDO(t) + R(t) = LA(t - 1) + R(t) = \\ = LA(t - 2) + R(t) = SL(t - 1) - R(t - 1) + R(t),$$

откуда

$$\Delta SL(t) = \Delta R(t).$$

Последнее равенство показывает: несмотря на то что выданные кредиты погашаются в тот же день, структурная ликвидность может меняться в зависимости от величины выданных кредитов. Более того, увеличивая величину выдаваемых кредитов, можно увеличивать структурную ликвидность. Но в нашем предположении кредиты возвращаются в день выдачи, а значит, они не должны влиять на изменение структурной ликвидности. Отсюда следует, что  $R(t)$  — не дневная банковская операция.

**Пример 2.** Показано, что  $R(t)$  — не дневная банковская операция. Предположим, что в расчет принимаются операции, по которым возврат денег происходит в день предоставления кредита. Тогда предположим дополнительно, что Центральный банк предоставляет только такие не лаговые кредиты. Из (3) имеем:

$$LA(t) = LA(t - 1) + CBDO(t) - R(t) = LA(t - 1).$$

А из определения структурной ликвидности:

$$SL(t) = LA(t - 1) + \Delta LA(t) - CBDO(t) = LA(t - 1) - R(t) = LA(t) - R(t) = SL(t - 1) + R(t - 1) - R(t),$$

откуда

$$\Delta SL(t) = -\Delta R(t).$$

Из рассуждений **примера 1** должно следовать, что или  $R(t)$  — дневная банковская операция, или не следует учитывать операции, возврат денег по которым происходит в день предоставления кредита. Очевидно, что первое не удовлетворяет нашему представлению об  $R(t)$ .

Отдельно отметим, что согласно (б) дневная структурная ликвидность может оказаться отрицательной. Экономически это означает, что возврат денег Центральному банку превышает сумму средств, которой располагает банковский сектор. Именно такая ситуация сложилась в начале текущего финансово-экономического кризиса, когда большие объемы покупки банками иностранной валюты приводили к снижению доступных рублевых средств, в результате чего банки были вынуждены прибегать к рефинансированию в Центральном банке для восполнения собственных корреспондентских счетов.

### 3. Межбанковская процентная ставка MosPrime и ее связь с дневной структурной ликвидностью

Индикативная ставка предоставления рублевых кредитов (депозитов) на московском межбанковском рынке MosPrime Rate-Moscow Prime Offered Rate рассчитывается Национальной валютной ассоциацией (НВА). НВА формирует MosPrime на основе ставок размещения рублевых кредитов (депозитов), объявляемых ведущими российскими банками — операторами межбанковского рынка.

Структурная ликвидность является индикатором формирования однодневной межбанковской процентной ставки MosPrime0N, которая ежедневно публикуется в 12.30 по московскому времени. Согласно работе [Гамбаров (2007)] предполагается, что между ставкой MosPrime0N и уровнем дневной структурной ликвидности имеется корреляционная связь (будем считать, что это утверждение верно и для MosPrime0N, тем более что движение процентных ставок денежного рынка сонаправлено). Точнее будет сказать, что значение структурной ликвидности в момент  $(t - 1)$  оказывает влияние на значение ставки процента в момент  $t$ . Далее, чтобы не возникло путаницы с индексами времени, будем ставить в соответствие структурной ликвидности  $SL(t)$  ставку процента  $MosPrime(t)$ , понимая, что это значение относится к началу следующего периода. Это сделано для удобства и отражает тот факт, что ставка процента связана с предыдущим значением структурной ликвидности. Проще говоря, мы сдвинули значение ставок на один период назад.

Будем предполагать две регрессионные модели: линейную и параболическую, которые отображены на рис. 1.

$$MosPrime(t) = \alpha(t)SL(t) + \beta(t) + \omega(t), \quad (7)$$

$$MosPrime(t) = \alpha(t)SL^2(t) + \beta(t)SL(t) + \gamma(t) + \omega(t), \quad (8)$$

где  $\omega(t)$  — ошибка модели регрессии,  $\omega(t) \in N(0; D_\omega(t))$ .

### 4. Применение фильтра Калмана

Чтобы читатель смог получить представление о назначении фильтра Калмана, приведем цитату из журнала GPS World (1997), а также схему, изображенную на рис. 2, которая отражает процесс формирования данных и их обработку.

«Представим себе некоторую систему, состояние которой в любой момент времени однозначно характеризуется определенным набором величин (например, координаты, скорости, уровни напряжения и т. д.), как правило, недоступных для непосредственного определения. Говоря терминами векторной алгебры, эти величины являются элементами вектора состояния системы, отнесенного к заданному моменту времени. Кроме того, имеется ряд переменных, некоторым образом связанных с состоянием системы, которые можно измерить с заданной точностью; такие величины составляют вектор измерений, относящихся к определенному моменту времени. Алгоритм фильтра Калмана позволяет в реальном времени построить оптимальную оценку состояния системы, основываясь на измерениях, неизбежно содержащих погрешности; при этом вектор измерений рассматривается в качестве многомерного выходного сигнала системы, отягощенного шумом, а вектор состояния — неизвестный многомерный сигнал, подлежащий определению. Условием оптимальности построенной оценки состояния является минимум ее среднеквадратической ошибки». «Указанный критерий признан наиболее общим; доказано, что применение множества других подобных условий (например, среднее арифметическое некоторой непрерывно возрастающей, симметричной функции такой, как абсолютная величина) приводит к тому же решению (функция модуля не обладает непрерывной производной, что существенно затрудняет ее применение в алгоритмах минимизации)».

#### 4.1. Случай линейной регрессии

Основу фильтра Калмана составляет пара уравнений (6) и (7), которые необходимо преобразовать к следующему виду:

$$SL(t+1) = SL(t) + v(t), v(t) \in N(E_v(t); D_v(t)), \quad (9)$$

$$\text{MosPrime}(t) = \alpha(t)SL(t) + \omega(t), \omega(t) \in N(E_\omega(t); D_\omega(t)), \quad (10)$$

где  $v(t) = \Delta_t LA - \Delta_t CBDO$  — случайная величина, а коэффициент  $\beta(t)$  внесен в математическое ожидание случайной величины  $\omega(t)$ , т. е.  $E\omega(t) = E_\omega(t) = \beta(t)$ .

Из (7) следует, что

$$E_\omega(t) = \beta(t).$$

Предположим, что величины  $v(t)$  попарно независимы, т. е.  $\forall t, s = \overline{0, t-1}$  таких, что  $k \neq s$ , выполняется  $\text{cov}\{v(t-s), v(t-k)\} = 0$ , а также определены значения  $E_v(t)$  и  $D_v(t)$ . Как показано в разд. 6, это предположение оправданно.

Пусть  $\hat{SL}(t)$  — линейная несмещенная оценка  $SL(t)$ , а  $SL^*(t)$  — ее экстраполированное значение. Ошибку оценивания определим как разность  $SL(t)$  и  $\hat{SL}(t)$ :

$$\overline{SL}(t) = SL(t) - \hat{SL}(t).$$

Построим аналог фильтра Калмана в предположении, что имеется априорная информация о начальном положении системы, т. е.  $D\{SL(t_0)\} < \infty$ , и что  $D\{SL(t)\} \neq 0$ , а также положим

$$E\{SL(t_0)\omega(t)\} = 0 \text{ и } E\{SL(t_0)v(t)\} = 0.$$

Фильтр Калмана:

- среднеквадратическое оптимальное экстраполированное значение:

$$SL^*(t+1) = \hat{SL}(t) + E_v(t); \quad (11)$$

- среднеквадратическая оптимальная оценка:

$$\hat{SL}(t) = SL^*(t) + K(t)(\text{MosPrime}(t) - \alpha(t)SL^*(t) - E_w(t)); \quad (12)$$

- ошибка экстраполяции (дисперсия):

$$P^*(t+1) = \bar{P}(t) + D_v(t); \quad (13)$$

- коэффициент усиления:

$$K(t) = P^*(t)\alpha(t)(\alpha^2(t)P^*(t) + D_w(t))^{-1}; \quad (14)$$

- дисперсия ошибки  $\bar{SL}(t) = SL(t) - \hat{SL}(t)$ :

$$\bar{P}(t) = P^*(t) - \alpha(t)K(t)P^*(t); \quad (15)$$

- начальные условия для рекуррентных формул (1), (3):

$$\hat{SL}(t_0) = E\{SL(t_0)\} \text{ и } \bar{P}(t_0) = D\{SL(t_0)\}.$$

#### 4.2. Определение коэффициентов линейной регрессии

В задаче определения коэффициентов линейной регрессии невозможно просто воспользоваться методом наименьших квадратов, так как прямая  $r(SL)$  должна иметь неположительный наклон, а при достаточно малом шаге скольжения это условие может не выполняться (рис. 3).

Отрицательность наклона следует из экономического смысла кривой и может быть легко пояснена на следующем примере.

**Пример.** Предположим, что Центральный банк решает увеличить денежную массу и хочет это сделать только дневными операциями. Тогда  $\Delta LA(t) = \Delta CBDO(t)$ , и политика рефинансирования Банка России в данном случае не оказывает влияния на изменение структурной ликвидности. Если же изменение денежной массы включает лаговые операции — а в реальной экономике, как правило, так и происходит, — то структурная ликвидность, очевидно, будет увеличиваться за счет прироста корреспондентских счетов.

В то же время увеличение денежной массы у кредитных организаций снизит ставку процента по предоставлению кредитов. Отсюда немедленно следует, что  $\frac{dr}{dSL} < 0$ , и, следовательно, прямая  $r(SL)$  имеет отрицательный наклон.

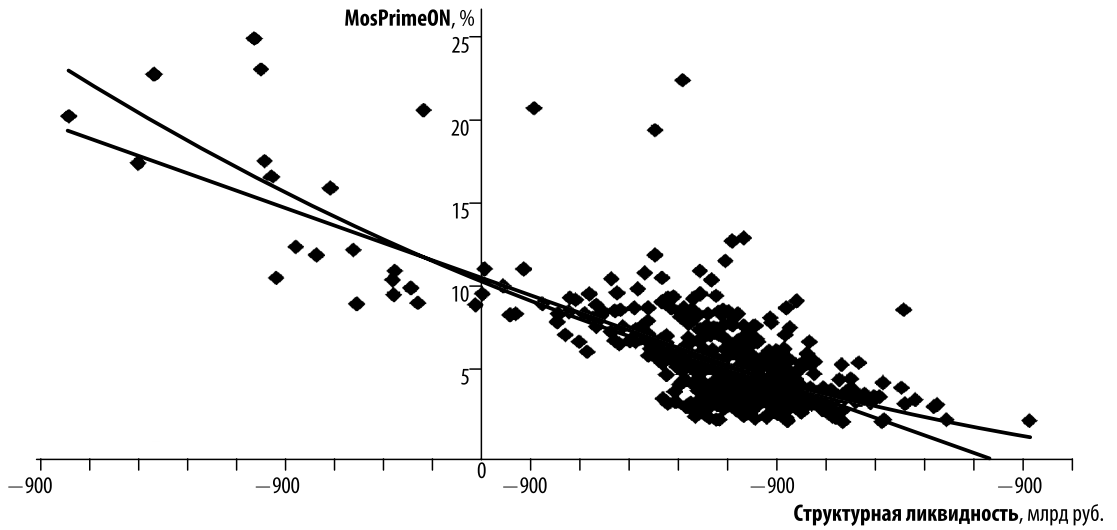


Рис. 1. Зависимость ставки процента MosPrimeON от структурной ликвидности

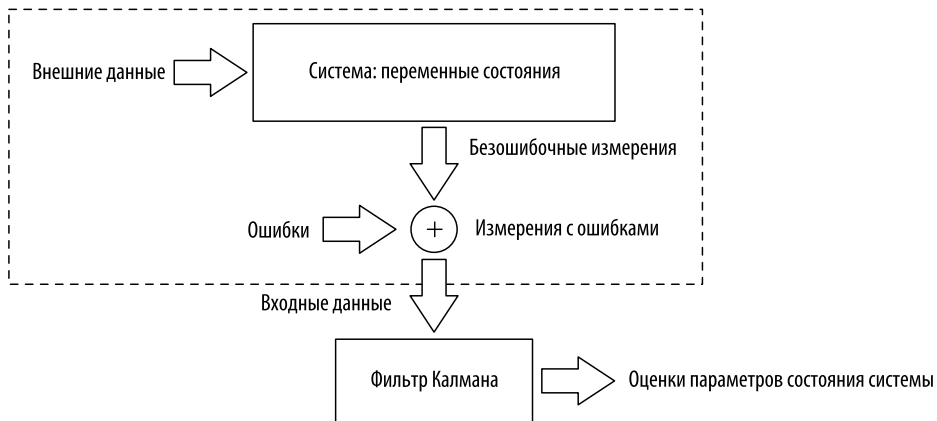


Рис. 2. Принципиальная схема формирования данных

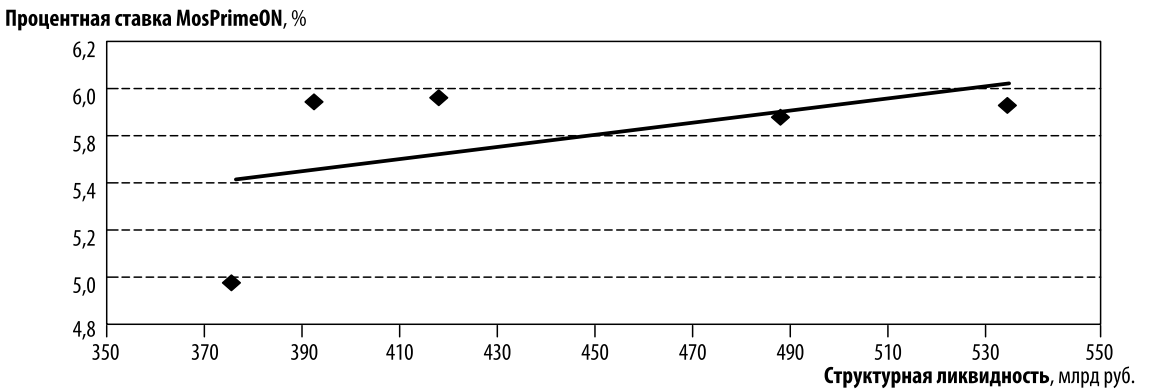


Рис. 3. Пример положительного наклона кривой  $r(SL)$

(зависимость ставки процента MosPrimeON от структурной ликвидности в период с 27.02.2007 г. по 05.03.2007 г.)

Развитие методов статистического анализа ликвидности банковского сектора

Далее будем действовать аналогично методу наименьших квадратов. Положим:

$$E\omega(t) = 0, \tag{16}$$

$$D\omega(t) = \sigma^2. \tag{17}$$

Введем обозначения:

$$r(t) \mapsto x(t), \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \mapsto \vec{y}(t), \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(1) \\ \dots \\ x(t) \end{pmatrix}, \vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} SL(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Исходная задача примет вид:

$$x(i) = \vec{Z}'(i)\vec{y}(i) + \omega(i), \forall i = \overline{1, t},$$

или в обобщенной форме:

$$\vec{X}(t) = Z'(t)\vec{y}(t) + \vec{W}(t), \tag{18}$$

где  $Z(t) = (\vec{Z}(1) \dots \vec{Z}(t))$ ;

$$\vec{W}(t) = \begin{pmatrix} \omega(1) \\ \dots \\ \omega(t) \end{pmatrix}.$$

Оптимальную оценку  $\vec{y}(t)$  будем искать в линейном виде

$$\vec{y}(t) = B(t)\vec{X}(t), \tag{19}$$

где  $B(t) = \begin{pmatrix} \vec{b}'_1(t) \\ \vec{b}'_2(t) \end{pmatrix}$ ;

$$\vec{b}'_i(t) = (\vec{b}_i(1) \dots \vec{b}_i(t)).$$

Из условия несмещенности оценки ( $E\{\vec{y}(t)\} = \vec{y}(t)$ ) и уравнений (16), (18) следует:

$$E\{\vec{y}(t)\} = E\{B(t)\vec{X}(t)\} = B(t)Z'(t)\vec{y}(t) = \vec{y}(t),$$

или окончательно

$$B(t)Z'(t) = I. \tag{20}$$

Используя (18), (20), имеем:

$$\begin{aligned} D\{\vec{y}(t)\} &= E\{B(t)\vec{X}(t) - \vec{y}(t)\}^2 = E\{B(t)\vec{X}(t) - B(t)Z'(t)\vec{y}(t)\}^2 = \\ &= E\{B(t)(Z'(t)\vec{y}(t) + \vec{W}(t)) - B(t)Z'(t)\vec{y}(t)\}^2 = B(t)E\{\vec{W}(t)\vec{W}'(t)\}B'(t), \end{aligned}$$

где  $E\{\vec{W}(t)\vec{W}'(t)\} = \sigma^2 I$ .

Тогда для дисперсий коэффициентов регрессии получаем следующие уравнения:

$$D\{\hat{\alpha}(t)\} = \sigma^2 \vec{b}'_1(t) \vec{b}_1(t), \tag{21}$$



$$D\{\hat{\beta}(t)\} = \sigma^2 \bar{b}'_2(t) \bar{b}_2(t). \quad (22)$$

Условие неположительного наклона запишется следующим образом:

$$\hat{\alpha}(t) = \bar{b}'_1(t) \bar{X}(t) \leq 0. \quad (23)$$

Обозначим через  $U(t) = \{(\alpha(t), \beta(t)) = (\bar{b}'_1(t) \bar{X}(t), \bar{b}'_2(t) \bar{X}(t)) | B(t) Z'(t) = I, \bar{b}'_1(t) \bar{X}(t) \leq 0\}$  множество допустимых значений коэффициентов регрессии  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Из условий (20)—(23) получаем постановку задачи.

**Задача 1:**

$$D\{\hat{\alpha}(t)\}, D\{\hat{\beta}(t)\} \rightarrow \min, \alpha(t), \beta(t) \in U(t).$$

Используя тот факт, что у нас нет ограничений, накладываемых одновременно на  $\bar{b}_1$  и  $\bar{b}_2$ , можно разделить задачу 1 на две независимые задачи и решать их отдельно.

*Задача 1а:*

$$D\{\hat{\alpha}(t)\} \rightarrow \min, \quad \bar{b}'_1(t) \bar{X}(t) \leq 0, \quad (24)$$

$$\bar{b}'_1(t) \bar{S}L(t) = 1, \quad (25)$$

$$\bar{b}'_1(t) \bar{I}(t) = 0. \quad (26)$$

*Задача 1б:*

$$D\{\hat{\beta}(t)\} \rightarrow \min, \quad \bar{b}'_2(t) \bar{S}L(t) = 0, \quad (27)$$

$$\bar{b}'_2(t) \bar{I}(t) = 1. \quad (28)$$

Ограничения (25)—(28) непосредственно следуют из (20).

Задачи 1а, б в точности соответствуют задаче Лагранжа и могут быть решены аналитически. Приведем пример для задачи 1а. Построим функцию Лагранжа с учетом (24)—(26):

$$L = \alpha_0 \sigma^2 \bar{b}'_1(t) \bar{b}'_1(t) + \alpha_1 \bar{b}'_1(t) \bar{X}(t) + \lambda_1 (\bar{b}'_1(t) \bar{S}L(t) - 1) + \lambda_2 \bar{b}'_1(t) \bar{I}(t),$$

где  $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$  и  $\alpha_0 + \alpha_1 + |\lambda_1| + |\lambda_2| > 0$ .

Из теоремы Лагранжа следует, что в точке минимума должны выполняться условия:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{b}_1(t)} = 0, \quad (29)$$

$$\alpha_1 \bar{b}'_1(t) \bar{X}(t) = 0, \quad (30)$$

$$\bar{b}'_1(t) \bar{S}L(t) = 1, \bar{b}'_1(t) \bar{I}(t) = 0. \quad (31)$$

Решив систему (29)—(31), получаем значение  $\hat{\alpha}(t)$ . Заметим, что задача имеет точное решение, но ответ здесь не приводится ввиду его громоздкости. Аналогично решается задача 1б и определяется  $\hat{\beta}(t)$ .

Таким образом, получено уравнение линейной регрессии (расчет приводится в книге [Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. (1984)]), описывающее зависимость процентной ставки от структурной ликвидности с остаточной дисперсией, равной

$$\hat{\sigma}^2(t) = \frac{S(\hat{y}(t))}{t-2},$$

где  $S(\hat{y}(t)) = \sum_{i=1}^t (x(i) - \hat{\alpha}(t)SL(i) - \hat{\beta}(t))^2$ .

Заметим, что  $\hat{\sigma}^2(t)$  является достаточной оценкой для  $\sigma^2$ . Далее, согласно (9), (10) поставим задачу фильтрации в виде:

$$SL(t+1) = SL(t) + v(t+1), v(t) \in N(E_v(t); D_v(t)),$$

$$\text{MosPrime}(t) = \hat{\alpha}(t)SL(t) + \omega(t), \omega(t) \in N(\hat{\beta}(t); \hat{\sigma}^2(t))$$

и решим ее, используя рекуррентные уравнения (11)—(15).

### **4.3. Применение субоптимальной нелинейной фильтрации в случае параболической регрессии**

Будем искать зависимость процентной ставки  $r$  рынка межбанковского кредитования от структурной ликвидности  $SL$  в виде параболической регрессии:

$$r = a_t \cdot SL^2 + b_t \cdot SL + c_t + \omega_t,$$

где для  $\omega_t$  имеет место  $E\omega_t = 0, D\omega_t = \sigma^2$ .

Для упрощения расчетов диагонализировать матрицу

$$A_t = Z_t Z_t'$$

где  $Z_t = (z_1 \dots z_i)$ ,  $z_i = \begin{pmatrix} SL_i^2 \\ SL_i \\ 1 \end{pmatrix}$ , чего всегда можно добиться с помощью ортогональных многочленов Чебышева.

Тогда искомая оценка  $\hat{y}_t = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_t \\ \hat{\beta}_t \\ \hat{\alpha}_t \end{pmatrix}$  будет иметь вид:

$$\hat{y}_{t,j} = \frac{\sum_{i=1}^t a_j(SL_i) x_i}{\sum_{i=1}^t a_j^2(SL_i)}$$

где  $a_j(SL_i)$  — многочлен Чебышева степени  $j-1, j = \overline{1,3}$ .

А искомая параболическая регрессия примет вид

$$r = \alpha_t \cdot a_3(SL) + \beta_t \cdot a_2(SL) + \gamma_t a_1(SL) + \omega_t.$$

Для  $j = 1$ :

$$a_1(SL_i) \equiv 1.$$

Для  $j = 2$ :

$$a_2(SL_i) = SL_i - \overline{SL}_t,$$

где  $\overline{SL}_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t SL_k.$

Для  $j = 3$ :

$$a_3(SL_i) = (SL_i - \overline{SL}_t) \left( SL_i - \overline{SL}_t - \frac{s_3(t)}{s_2(t)} \right) - s_2(t),$$

где  $s_2, s_3$  рассчитываются заранее по формуле:

$$s_k(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t (SL_k - \overline{SL}_t)^k.$$

Подробный вывод этих формул можно найти в [Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. (1984)] .

Итак, окончательное уравнение кривой  $r(SL)$  будет иметь вид:

$$r_t = \hat{\alpha}_t SL_t^2 + \left( \hat{\beta}_t - \hat{\alpha}_t \left( 2\overline{SL}_t + \frac{s_3(t)}{s_2(t)} \right) \right) SL_t + \hat{\alpha}_t \left( \overline{SL}_t^2 + \overline{SL}_t \frac{s_3(t)}{s_2(t)} - s_2(t) \right) - \hat{\beta}_t \overline{SL}_t + \hat{\gamma}_t + \omega_t \quad (32)$$

с остаточной дисперсией:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{y}_t)}{n-3},$$

где  $S(\hat{y}_t) = \sum_{i=1}^t (x_i - a_t \cdot SL^2 - b_t \cdot SL - c_t)^2.$

Далее согласно разделу 4.1 поставим задачу фильтрации в виде:

$$SL(t+1) = SL(t) + v(t+1), v(t) \in N(E_v(t); D_v(t)), \quad (32.1)$$

$$\text{MosPrime}(t) = a(t)SL^2(t) + b(t)SL(t) + \omega(t), \omega(t) \in N(c; \hat{\sigma}^2), \quad (32.2)$$

где  $a(t), b(t), c(t)$  определяются из (32).

Как видно из уравнения (32.2), фильтр Калмана, построенный ранее, в данном случае неприменим. Построим расширенный фильтр Калмана. Предположим, что для  $SL(t)$  имеется некоторая опорная траектория  $SL^o(t)$  такая, что  $E\{[SL(t) - SL^o(t)]^2\} < 1$  (т. е. достаточно точно аппроксимирующая процесс  $SL(t)$ ). Проведем линеаризацию уравнения (32.2), разложив нелинейность в правой части около опорного значения  $SL^o(t)$  и отбросив члены второго и более высоких порядков:

$$\text{MosPrime}(t) = a(t)SL^{\circ 2}(t) + b(t)SL^{\circ}(t) + (2a(t)SL^{\circ}(t) + b(t))(SL(t) - SL^{\circ}(t)) + \omega(t) = U(t)SL(t) + \tilde{\omega}(t),$$

где  $U(t) = 2a(t)SL^{\circ}(t) + b(t);$   
 $E\{\tilde{\omega}(t)\} = c - a(t)SL^{\circ 2}(t).$

Таким образом, задача фильтрации свелась к предыдущей, и можно смело применять фильтр Калмана, построенный нами ранее. Осталось лишь определить, что следует брать в качестве  $SL^{\circ}(t)$ . В [Миллер, Панков (2002)] предлагается в качестве опорной траектории брать прогноз  $SL^*(t)$  (среднеквадратическое оптимальное экстраполированное значение). Окончательно постановка задачи фильтрации и сам фильтр будут выглядеть следующим образом:

$$SL(t + 1) = SL(t) + v(t + 1), v(t) \in N(E_v(t); D_v(t)),$$

$$\text{MosPrime}(t) = U(t)SL(t) + \tilde{\omega}(t), \tilde{\omega}(t) \in N(c - a(t)SL^{\circ 2}(t); \sigma^2),$$

$$SL^{\circ}(t) = SL^*(t);$$

- среднеквадратическое оптимальное экстраполированное значение:

$$SL^*(t + 1) = \hat{SL}(t) + E_v(t); \tag{33}$$

- среднеквадратическая оптимальная оценка:

$$\hat{SL}(t) = SL^*(t) + K(t)(\text{MosPrime}(t) - U(t)SL^*(t) - E_{\tilde{\omega}}(t)); \tag{34}$$

- ошибка экстраполяции (дисперсия):

$$P^*(t + 1) = \bar{P}(t) + D_v(t); \tag{35}$$

- коэффициент усиления:

$$K(t) = P^*(t)U(t)(U^2(t)P^*(t) + D_{\tilde{\omega}}(t))^{-1}; \tag{36}$$

- дисперсия ошибки  $\bar{SL}(t) = SL(t) - \hat{SL}(t):$

$$\bar{P}(t) = P^*(t) - U(t)K(t)P^*(t). \tag{37}$$

## 5. Результаты

Анализ данных проводился по выборке с 31 января 2007 г. по 4 февраля 2009 г. Дни, относительно которых отсутствовали данные по ставке MosPrime overnight, были исключены. Совокупность данных была разбита на две категории: налоговые и неналоговые дни. Такой шаг был сделан в связи с тем, что процентная ставка по межбанковскому кредитованию имеет тенденцию к росту в предналоговые и налоговые дни.

Для того чтобы определить принадлежность дня к классу налоговых дней, в некоторой окрестности (обычно 1, 2 дня) отчетных налоговых дат анализировалась величина изменения процентной ставки.

Если величина изменения оказывалась больше заранее установленного порога, то такая дата относилась к классу налоговых дней. Разумеется, отчетная налоговая дата автоматиче-

ски причисляется к классу налоговых дней, чтобы множество налоговых дней не было пустым при любом пороговом значении.

Были рассмотрены: налог на прибыль, единый социальный налог, подоходный налог и налог на добавленную стоимость. Для каждой выборки был построен свой фильтр Калмана, конечные данные были снова объединены. Также для каждой выборки использовался метод скользящего среднего, т.е. выборка содержала фиксированное число элементов, равное шагу скольжения. Например, при шаге скольжения 5 выборка всегда содержит последние 5 значений параметров. Такая последовательность действий придумана для того, чтобы фильтрованные значения отстояли не слишком далеко по модулю от фактических значений структурной ликвидности. Можно было бы в подразделе 3.1 поставить задачу Лагранжа с ограничением типа

$$\left(\hat{SL}(t) - SL(t)\right)^2 \leq C^2,$$

где  $C$  — константа, ограничивающая степень отклонения фильтрованных значений, но такая задача сводится к решению системы  $2t$  уравнений, где каждое уравнение является уравнением выше 7-го порядка, что, конечно, затрудняет решение задачи явно выписать значение коэффициентов регрессии.

На рис. 4 сравниваются реальные и фильтрованные значения структурной ликвидности.

Развитие методов статистического анализа ликвидности банковского сектора

Структурная ликвидность, млрд руб.

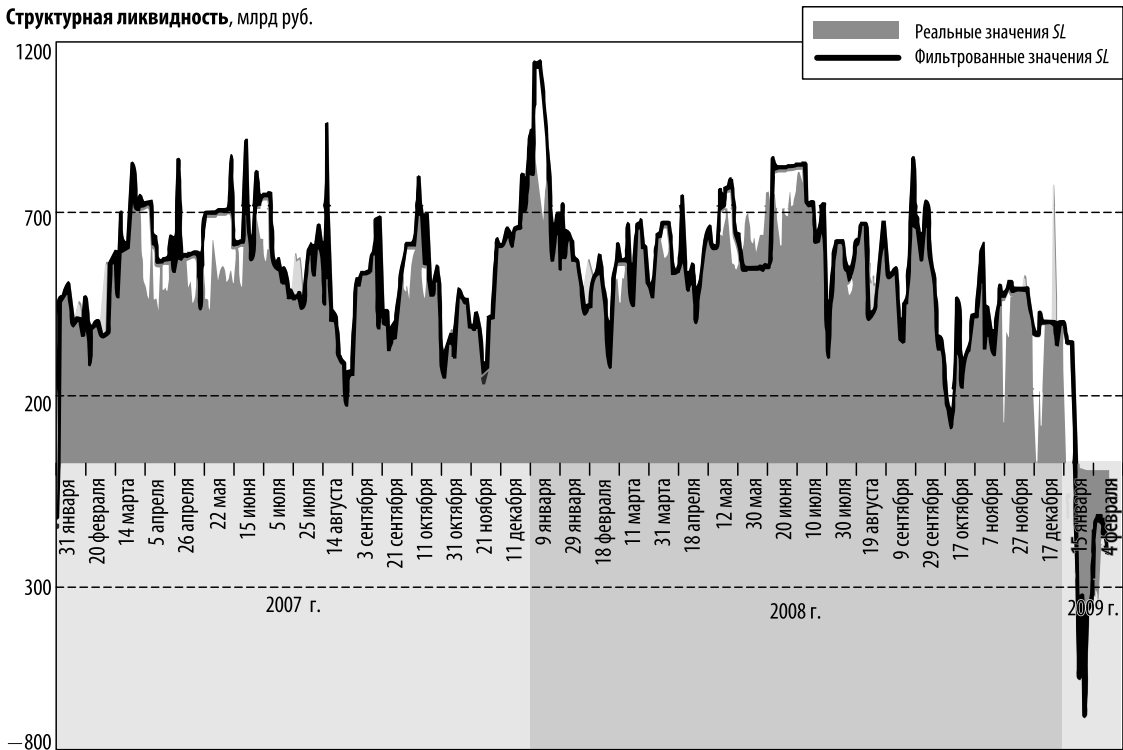


Рис. 4. Фильтрация линейной регрессии с шагом 5 (по оси абсцисс откладываются даты наблюдений)

Фильтрация параболической регрессии дала худшие результаты по сравнению с линейной. Такое заключение опирается на критерий удаленности фильтрованных значений структурной ликвидности от реальных значений. Следует отметить, что параболическая регрессия имеет смысл, когда шаг достаточно велик для того, чтобы можно было попасть на убывающую ветвь параболы (это хорошо видно на рис. 1). Конечный результат показан на рис. 5.

Структурная ликвидность, млрд руб.

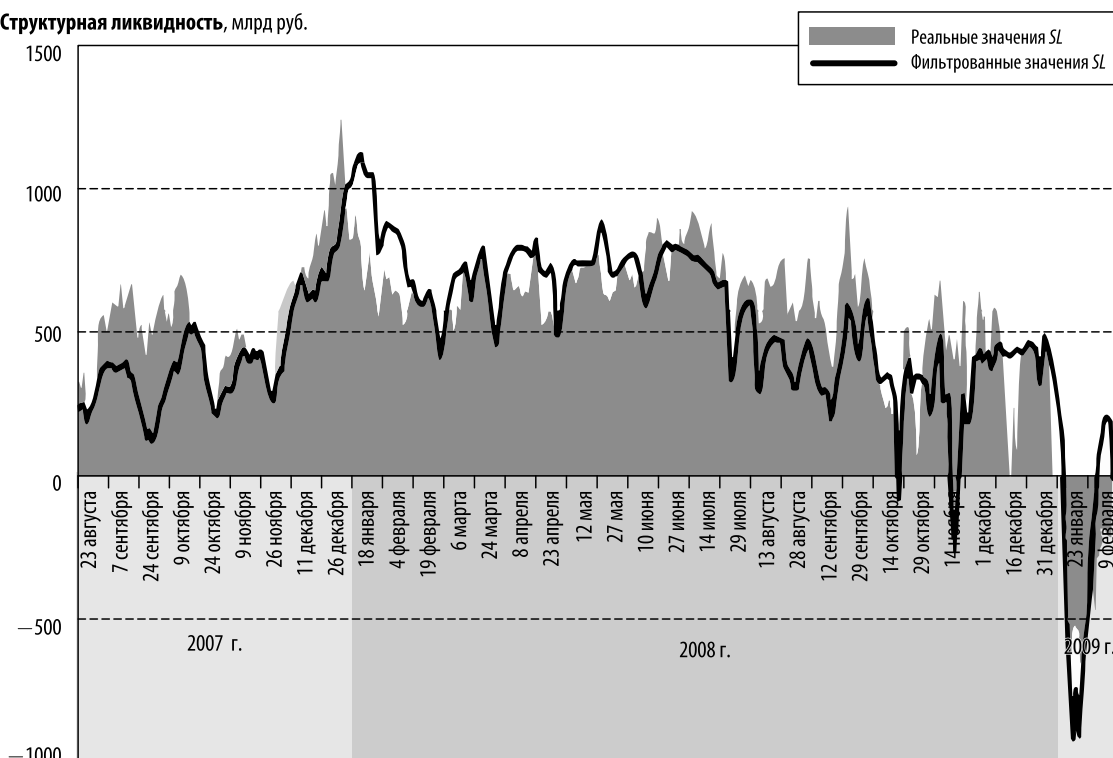


Рис. 5. Фильтрация параболической регрессии с шагом 150

Располагая фильтрованными значениями и уравнением (7), можно с большей точностью определить необходимые изменения в структурной ликвидности, чтобы достичь желаемого уровня межбанковской процентной ставки.

Предположим, Центральный банк стремится провести таргетирование процентной ставки до уровня  $r_{tar}$ .

Рассмотрим следующую модель: пусть заданы  $\alpha(0)$ ,  $\beta(0)$ ,  $SL(0)$ ,  $\omega(0)$ . Определим с помощью фильтра значение  $SL(0)$ . Тогда необходимое изменение будет равно:

$$\Delta SL(1) = \frac{1}{k} \left( SL_{tar}(0) - \hat{SL}(0) \right), \quad k \geq 1,$$

где  $SL_{tar}(0) = \frac{r_{tar} - \beta(0)}{\alpha(0)}$ ;  $SL(1) = SL(0) + \Delta SL(1)$ .

После реализации такой политики будем считать, что

$$r(1) = \alpha(0)SL(1) + \beta(0) + \omega(0).$$

Далее алгоритм повторяется. Коэффициент  $k$  определяет агрессивность, с которой проводится политика таргетирования, и выбирается таким образом, чтобы не раскачивать рынок ставок. Смысл данного коэффициента может нести в себе и более глубокое экономическое объяснение (например, срок приспособления рынка МБК к политике Банка России). Этот вопрос остается открытым для дальнейшего изучения.

Покажем, что данный алгоритм удовлетворяет политике Центрального банка.

$$\begin{aligned} E\{r(t) - r_{tar}\} &= E\{\alpha(t-1)SL(t) + \beta(t-1) + \omega(t-1) - \alpha(t-1)SL_{tar}(t-1) - \beta(t-1)\} \leq \\ &\leq |\alpha(t-1)|E\{SL(t) - SL_{tar}(t-1)\} = \\ &= |\alpha(t-1)|E\left\{SL(t-1) + \frac{1}{k}\left(SL_{tar}(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right) - SL_{tar}(t-1)\right\} = \\ &= |\alpha(t-1)|E\left\{SL(t-1) - \frac{1}{k}\hat{SL}(t-1) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)SL_{tar}(t-1)\right\} = \\ &= |\alpha(t-1)|E\left\{\left(1 - \frac{1}{k}\right)SL(t-1) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)SL_{tar}(t-1) + \frac{1}{k}SL(t-1) - \frac{1}{k}\hat{SL}(t-1)\right\} \leq \\ &\leq |\alpha(t-1)|\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)E\{SL(t-1) - SL_{tar}(t-1)\} + \frac{1}{k}E\left\{SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right\}\right]. \end{aligned}$$

Так как  $\hat{SL}(t)$  — несмещенная оценка  $SL(t)$ , то

$$E\left\{SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right\} = 0.$$

Из постановки модели вытекает

$$SL(t) = SL(t-1) + \Delta SL(t) = SL(t-1) + \frac{1}{k}\left(SL_{tar}(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right),$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} E\{SL(t-1) - SL_{tar}(t-1)\} &= E\left\{SL(t-2) + \frac{1}{k}\left(SL_{tar}(t-2) - \hat{SL}(t-2)\right) - SL_{tar}(t-1)\right\} = \\ &= E\left\{\left(1 - \frac{1}{k}\right)SL(t-2) + \frac{1}{k}\left(SL_{tar}(t-2) - \hat{SL}(t-2)\right) + \frac{1}{k}SL_{tar}(t-2) - SL_{tar}(t-1)\right\} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)E\{SL(t-2)\} + \frac{1}{k}|SL_{tar}(t-2)| + |SL_{tar}(t-1)| = \dots \\ &\dots = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{t-1} E\{SL(0)\} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{t-2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{i-1} |SL_{tar}(t-i-1)| + |SL_{tar}(t-1)|. \end{aligned}$$

Значит,

$$E\{r(t) - r_{tar}\} \leq |\alpha(t-1)|\left[\left(1 - \frac{1}{k}\right)^t E\{SL(0)\} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{t-2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^i |SL_{tar}(t-i-1)| + \left(1 - \frac{1}{k}\right)|SL_{tar}(t-1)|\right].$$

В том случае, когда  $|SL_{tar}(t)| \leq C$  и  $|\alpha(t)| \leq \alpha, \forall t$ , осуществляя предельный переход в предыдущем неравенстве при  $t \rightarrow \infty$ , получаем:

$$E\{|r(t) - r_{tar}\}| \leq \alpha C \left(2 - \frac{1}{k}\right), t \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Используя предположение о том, что  $E\{SL(t)\omega(t-1)\} = 0$ , неравенство Коши—Буняковского

$$|\text{cov}\{\xi, \eta\}|^2 \leq D\xi D\eta \text{ и тот факт, что } D\{SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\} = \bar{P}(t-1),$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{D\{r(t) - r_{tar}\} - D_{\omega}(t-1)}{\alpha^2(t-1)} &= \frac{D\{\alpha(t-1)SL(t) + \beta(t-1) + \omega(t-1)\} - D_{\omega}(t-1)}{\alpha^2(t-1)} = D\{SL(t)\} = \\ &= D\left\{SL(t-1) + \frac{1}{k}\left(SL_{tar}(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right)\right\} = D\left\{SL(t-1) - \frac{1}{k}\hat{SL}(t-1)\right\} = \\ &= D\left\{\left(1 - \frac{1}{k}\right)SL(t-1) + \frac{1}{k}\left(SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right)\right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 D\{SL(t-1)\} + \frac{1}{k^2} D\left\{SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right\} + \\ &+ \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{cov}\left\{SL(t-1), SL(t-1) - \hat{SL}(t-1)\right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 D\{SL(t-1)\} + \frac{1}{k^2} \bar{P}(t-1) + \\ &+ \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \left[D\{SL(t-1)\} - \text{cov}\left\{SL(t-1), \hat{SL}(t-1)\right\}\right] \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) D\{SL(t-1)\} + \frac{1}{k^2} \bar{P}(t-1) + \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) D^{\frac{1}{2}}\{SL(t-1)\} D^{\frac{1}{2}}\{\hat{SL}(t-1)\} = \dots \\ &\dots = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^t D\{SL(0)\} + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^t \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{i-1} \bar{P}(t-i) + \\ &+ \frac{2}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^t \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^{i-1} D^{\frac{1}{2}}\{SL(t-i)\} D^{\frac{1}{2}}\{\hat{SL}(t-i)\}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$D\{r(t) - r_{tar}\} \leq \alpha^2 \left( \bar{P} + 2k \left(1 - \frac{1}{k}\right) D^{\frac{1}{2}}\{SL\} D^{\frac{1}{2}}\{\hat{SL}\} \right) + D_{\omega}, t \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Подставив конкретные значения, получим:

$$E\{|r(t) - r_{tar}\}| \leq 1,5, D\{r(t) - r_{tar}\} \leq 4 \text{ при } k = 10.$$

Учитывая, что использовались грубые приближения, можно считать полученную оценку весьма удовлетворительной.



## 6. Преимущества и недостатки метода фильтрации

Заметим, что применяемый в данной статье метод фильтрации не является единственным инструментом прогнозирования. Среди моделей, получивших широкое признание, необходимо особо выделить модель GARCH. Как правило, эта модель задается регрессией между прогнозируемой величиной и измеряемыми параметрами с ошибкой, подчиненной GARCH-процессу. Например, для прогнозирования структурной ликвидности использовалось бы следующее уравнение

$$SL_t = \alpha \cdot r_t + \varepsilon_t,$$

где ошибка  $\varepsilon_t$  представляет собой GARCH-процесс.

Более подробно о модели GARCH можно прочесть в [Цыплаков А. (2003)]. В отличие от GARCH-метода, уравнения фильтрации не несут никакой информации о структуре ошибки регрессии и задаются законом изменения прогнозируемой величины со своей ошибкой и уравнением, которое определяет взаимосвязь между наблюдаемой величиной (в нашем случае это процентная ставка) и величиной, которую желательно измерить. В конечном счете, оба подхода основаны на том, что среднеквадратической оптимальной оценкой случайного вектора  $\xi$  при известном векторе наблюдений  $\eta$  является условное математическое ожидание  $E(\xi|\eta)$ , и отличаются лишь гипотезами, задающими связи на известные и измеряемые величины.

## 7. Дополнение

*Случайность выборки.* Проверим гипотезу случайности выборки  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ .

$$H_0: F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot \dots \cdot F(x_n),$$

где  $F(x)$  — некоторая функция распределения.

Тогда, следуя [Ивченко, Медведев (1984)], в качестве статистики рассмотрим функцию

$$T_n = T_n(\vec{X}) = \eta_1 + \dots + \eta_{n-1},$$

где  $\eta_i$  — число инверсий, образованных компонентой  $X_i$ .

При достаточно больших  $n$  критическая область задается следующим образом:

$$\Omega_{1\alpha} = \left\{ \left| t - \frac{n(n-1)}{4} \right| \frac{6}{n^2} > t_\alpha \right\},$$

где  $t = T_n$  — значение статистики числа инверсий в выборке;

$\alpha$  — уровень значимости;

$t_\alpha$  — квантиль, определяемый из условия  $\Phi(-t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ .

Здесь  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . Примем уровень значимости гипотезы независимости  $\alpha = 0,001$ , тогда  $t_\alpha = 3,3$ . Проверим параметры нашей модели на выборке с 15 января 2007 г. по 11 февраля 2009 г., предоставленной Центральным банком. Также в предположении, что случайные величины распределены нормально, будем сразу писать оптимальные оценки их математического ожидания

$$\hat{E}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i$$

и дисперсии

$$\hat{D}_t = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t (X_i - \hat{E}_t)^2;$$

$$v_t = \Delta_t LA - \Delta_t CBDO: n = 513, T_n = 65939.$$

Тогда

$$\left| t - \frac{n(n-1)}{4} \right| \frac{6}{n^{\frac{3}{2}}} = 0,14 < t_\alpha = 3,3,$$

и данные не противоречат исходной гипотезе.

## **8. Заключение**

В работе показано, что развитие классических методов статистического анализа для использования в задаче поиска сбалансированного уровня структурной ликвидности позволяет получить приемлемые результаты, которые можно использовать на практике. В то же время применение фильтра Калмана можно сочетать с расширением регрессионной модели и включением в нее дополнительных объясняющих переменных, что может послужить основой для проведения будущих исследований в данной сфере.

## **Список литературы**

- Браммер К. С., Зиффлинг Г. М.* Фильтр Калмана—Бьюси / пер. с нем. М.: Наука, 1982.
- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика: учеб. пособие для вузов, 1984.
- Гамбаров Г. М.* Показатель структурной ликвидности как индикатор процентной политики // *Прикладная эконометрика*. 2007. № 3. С. 3–10.
- Цыплаков А.* Модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://allmath.ru/highermath/probability/probability50/probability.htm>.
- Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
- Larry J. Levy* // *GPS World*. 1997. Sept.
- Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.