

Способы понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов

Статья посвящена различным способам понижения дисперсии оценки стоимости погодного опциона на примере модели на основе среднесуточной температуры.

Ключевые слова: погодные опционы, стохастическая модель, оценивание стоимости опционов, метод Монте-Карло, статистическое моделирование, уменьшение дисперсии.

1. Введение

Цены на традиционные базовые активы формируются под воздействием экономических, политических и локальных факторов, в большинстве случаев отражая потребности, ожидания и мнения людей. Однако есть еще один, неподвластный человеческому влиянию, важный фактор — погодные условия. По оценкам специалистов, погода, прямо или косвенно, воздействует на 70% всего мирового бизнеса. Именно стремление человека уменьшить зависимость финансовой сферы от стихии привело к возникновению и развитию погодных финансовых инструментов (см., например, (Бейден, Смирнова, 2006; Михайлова, 2003)), которые естественно называть контрактами на характер изменения погоды или просто погодными контрактами.

Разница между погодными контрактами и страхованием состоит в том, что второе предлагает защиту от редких событий, имеющих большой отрицательный эффект, а первые позволяют хеджировать от непрерывных (и потенциально небольших) изменений риск-факторов.

Изменения погоды влияют на цену некоторых активов не напрямую, а через спрос на этот товар. Сильнее всего этому эффекту подвержен энергетический сектор. Люди начинают обогревать свои дома потому, что становится холодно, а не потому, что электричество дешевое. Это подтверждают и статистические исследования: корреляция между температурой и ценой на товар не очень значительна, но если сопоставить объем продаж (спрос на товар) с температурой, то корреляция становится чувствительной. Погодные контракты чаще являются инструментом для хеджирования рисков объемов, чем ценовых рисков.

Целью настоящей работы является применение различных методов понижения дисперсии оценки стоимости погодного опциона и сравнительный анализ экспериментальных результатов. Работа построена следующим образом.

Во втором разделе приведен краткий анализ производных ценных бумаг на погоду, основная терминология, а также особенности и принципы ценообразования погодных фьючерсов и опционов. В третьем разделе дан краткий обзор существующих методов моделирования изменения температуры и определены этапы построения оценки стоимости погодного опциона. В четвертом разделе приводится базовая модель расчета стоимости погодного опциона, исследованная в статье (Alaton et al., 2002). В данной статье рассматривался подход

к ценообразованию на основе модели «возвращения к среднему», который адаптирован к процессу ценообразования на погодные финансовые инструменты. В пятом разделе для базовой модели приводятся основанные на методе Монте-Карло формулы для моделирования траектории процесса изменения среднесуточной температуры и строится соответствующая оценка стоимости погодного контракта. В шестом разделе рассматриваются различные способы понижения дисперсии оценки, такие как: метод выделения главной части, метод симметричных выборок и метод квазислучайных последовательностей.

В седьмом разделе обсуждаются особенности погодного опциона на зимний месяц. Так как в базовой модели рассматриваются изменения температуры в столице Швеции, учитываемая климатические особенности Стокгольма в зимние месяцы, формулы для расчета можно упростить и получить приближенную формулу для стоимости опциона. Далее значения, полученные по упрощенным формулам, используются для проведения сравнительного анализа результатов вычислительного эксперимента. В восьмом разделе приведены результаты вычислительного эксперимента. Рассмотрены оценки стоимости опционов, полученные классическим методом Монте-Карло, оценки с использованием методов понижения дисперсии, и значения стоимости погодных опционов, полученные по приближенной формуле. В последнем разделе сделаны выводы по полученным численным результатам.

2. Основные погодные финансовые инструменты

К настоящему моменту стандартизированы несколько индексов, учитывающих те или иные погодные факторы. Это стандартные температурные «индекс обогрева» *HDD* (Heating Degree Days) и «индекс охлаждения» *CDD* (Cooling Degree Days). Реже используются индексы на другие погодные факторы: количество осадков (rainfall, precipitation), уровень осадков и толщина снежного покрова (snowfall, snow depth), относительная влажность (relative humidity), скорость ветра и уровень охлаждения ветром (wind speed, wind chill).

По аналогии с другими финансовыми инструментами, погодные финансовые контракты могут быть оформлены как опционы или фьючерсы: опционы страхуют от роста или падения температуры (или другого фактора), фьючерсы фиксируют прибыли и расходы сторон. На биржах торгуются погодные фьючерсы и опционы *call* и *put*. Далее напомним основные понятия, относящиеся к температурным погодным инструментам.

Температура в k -ый день T_k определяется как среднее арифметическое между минимальной и максимальной температурой, зарегистрированной на метеостанции в данный день:

$$T_k = (T_k^{\max} + T_k^{\min}) / 2 .$$

Индексы *HDD* и *CDD* рассчитываются в предположении, что температура 65° по Фаренгейту (18° по Цельсию) является границей между необходимостью обогрева или охлаждения. Потребность в энергии на эти цели приблизительно пропорциональна отклонению температуры от 65°F .

Индексы *HDD* и *CDD* в k -ый день определяются по разнице между зафиксированной температурой и 65°F . Если она положительна (отрицательна), то индекс *CDD* (*HDD*) в рассматриваемый день приравнивается к этой разнице (абсолютной величине разности), в противном случае он равен нулю:

$$CDD_k = \max(T_k - 65, 0), \quad HDD_k = \max(65 - T_k, 0). \quad (1)$$

Индексы HDD и CDD за n дней (за период) определяются как сумма каждодневных величин:

$$C_n = \sum_{k=1}^n CDD_k, \quad H_n = \sum_{k=1}^n HDD_k. \quad (2)$$

Если температура измеряется в градусах Цельсия, то в качестве границы обычно принимается 18°C .

Указанные индексы являются основой для инструментов управления погодными рисками. Цены фьючерсного контракта, а также исполнения опциона выражаются в терминах индекса HDD или CDD за указанный период. Для установления расчетной цены по производному погодному инструменту (т.е. фактического значения индекса по истечении срока действия контракта) берутся официальные данные оговоренной в контракте метеорологической станции.

Выплата по фьючерсному контракту определяется, исходя из разницы между ценой, по которой контракт был заключен, и расчетной ценой, которая становится известной по истечении срока действия контракта. Эта разница умножается на оговоренную в контракте фиксированную ставку пересчета (т.е. стоимостную оценку единицы индекса). Таким образом, номинальная стоимость фьючерсного контракта равна его текущей цене, выраженной в единицах индекса HDD или CDD , умноженной на стоимостную оценку единицы индекса.

При заключении опционных контрактов оговариваются страйковая цена K и ставка пересчета ρ . Например, по опциону $call$ на индекс HDD выплата χ в день t_n , следующий за днем исполнения, будет равна:

$$\chi = \{\rho \cdot \max(H_n - K, 0)\}. \quad (3)$$

Иногда оговаривается и ограничение на максимальную выплату MB . В этом случае выплата по опциону $call$ на индекс HDD рассчитывается по формуле:

$$\chi = \min\{\rho \cdot \max(H_n - K, 0), MB\}.$$

Стоимость же опциона будет равна ожидаемой величине выплаты, дисконтированной к дате расчета по банковской процентной ставке r . Основная математическая задача, возникающая при использовании погодных контрактов, состоит в оценивании справедливой стоимости опциона.

3. Ценообразование на основе моделирования погоды

Для прогнозирования изменения температуры обычно применяются эконометрические модели GARCH, ARFIMA, FBM, ARFIMA-FIGARCH, Bootstrap. Перечисленные модели позволяют отказаться от предположений о независимости волатильности от своих предыдущих значений и учесть их корреляционную зависимость. Существенной характеристикой, например, GARCH моделей является их свойство реагирования на любые наблюдае-

мые изменения соответствующего временного ряда и быстрое восстановление после сильных колебаний.

Среди факторов, влияющих на установление цены контракта на погоду, можно выделить прогнозируемый тренд изменений погоды на основе исторических данных о погоде с учетом сезонных колебаний. Кроме того, поскольку рынок погодных инструментов является производным рынком, он испытывает влияние со стороны других рынков. Действующие подходы (методы) ценообразования используют исторические погодные данные, на основе которых делается оценка вероятностей будущих прогнозных значений температуры. Общее описание метода, основанного на математическом моделировании погоды, выглядит так:

- сбор исторических данных о погоде;
- создание статистической модели погоды;
- моделирование возможных сценариев погоды в будущем (метод Монте-Карло);
- определение величины выплаты по опциону для каждого сценария;
- усреднение этих величин;
- дисконтирование к дате расчета.

4. Модель «возвращения к среднему» (mean reversing)

Существуют разные подходы к ценообразованию на основе моделирования погоды, в частности, модель «возвращения к среднему», используемая для оценки стоимости опционов на ценные бумаги на основе процентных ставок, может быть применена к процессу ценообразования на погодные финансовые инструменты, поскольку для температурных рядов не характерны резкие скачки значений (VanderMarck, 2000). В отличие от модели с процентными ставками, параметры задачи ценообразования погодных финансовых инструментов определяются не по данным о соответствующих ликвидных инструментах (в связи с их отсутствием), а по историческим сведениям о погоде.

Далее изложим подход, который применяется в (Alaton et al., 2002) для построения стохастического процесса, описывающего изменение температуры. В этой статье рассматривались данные, соответствующие реальным изменениям температуры в столице Швеции.

Пусть T_t означает среднесуточную температуру, а t — время, измеряемое в днях ($t = 1, 2, \dots, 365$). Хотя температура является непрерывной функцией от времени, при решении прикладных задач допускается подобная дискретизация. В качестве детерминированной модели, описывающей среднюю климатическую температуру T_t^m , используется модель, учитывающая общую тенденцию (линейный тренд) и сезонную характеристику:

$$T_t^m = A + Bt + C \sin(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Параметры модели A, B, C, ω, φ оцениваются на основе многолетних статистических наблюдений.

Пусть $T_{t_0} = x$. Стохастическая модель, описывающая изменение среднесуточной температуры, имеет следующий вид:

$$dT_t = \left\{ \frac{dT_t^m}{dt} + a(T_t^m - T_t) \right\} dt + \sigma_t dW_t, \quad t > t_0. \quad (5)$$

Здесь W_t — стандартный винеровский процесс; σ_t — детерминированная ступенчатая функция, характеризующая квадратическую вариацию среднесуточной температуры (σ_t принимает постоянные значения в течение календарных месяцев). Температура не может увеличиваться (или уменьшаться) в течение длительного периода времени. Следовательно, стохастический процесс, описывающий изменение температуры, должен обладать так называемым свойством «возвращения к среднему»: температура имеет тенденцию возвращаться к определенному среднему климатическому уровню T_t^m . Данное свойство определяется детерминистским компонентом уравнения, величина которого зависит от расстояния между текущей температурой и среднеклиматическим уровнем. Параметр a характеризует скорость возвращения к среднему. Решение стохастического уравнения (5) имеет вид:

$$T_t = (x - T_s^m) e^{-a(t-s)} + T_t^m + \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau)} \sigma_\tau dW_\tau.$$

На основании 40-летних статистических наблюдений температуры в Стокгольме были оценены параметры предложенной модели и получены следующие результаты. Детерминированная модель среднесуточной температуры:

$$T_t^m = 5.97 + 6.57 \cdot 10^{-5} t + 10.4 \sin\left(\frac{2\pi}{365} t - 2.01\right) \quad (6)$$

и оценки параметров:

$$\hat{a} = 0.237, \sigma_{\text{январь}} = 3.41, \sigma_{\text{фев}} = 2.97, \sigma_{\text{март}} = 2.29, \sigma_{\text{апр}} = 1.98, \sigma_{\text{май}} = 2.00, \sigma_{\text{июнь}} = 1.96, \sigma_{\text{июль}} = 1.69, \sigma_{\text{авг}} = 1.60, \sigma_{\text{сентя}} = 1.85, \sigma_{\text{окт}} = 2.38, \sigma_{\text{нояб}} = 2.62, \sigma_{\text{дек}} = 3.30. \quad (7)$$

Для так называемых безарбитражных рынков проблема их «полноты» допускает вполне исчерпывающее решение в терминах единственности мартингалных мер (Ширяев, 1998). Рынок для погодных контрактов — типичный пример неполного рынка. Сложность ценообразования погодных контрактов заключается в том, что торговля самим базовым активом просто невозможна. Кроме того, рынок погодных инструментов является производным, и он испытывает влияние со стороны других рынков. Для решения проблемы «полноты» рынка в модель, рассматриваемую в (Alaton et al., 2002), вводится дополнительный параметр λ :

$$dT_t = \left\{ \frac{dT_t^m}{dt} + a(T_t^m - T_t) - \lambda \sigma_t \right\} dt + \sigma_t dV_t. \quad (8)$$

Параметр λ называется рыночной ценой риска. Здесь $(V_t, t \geq 0)$ — Q -винеровский процесс, Q — мартингалная мера, характеризуемая рыночной ценой риска λ . Пусть F_t — σ -алгебра, описывающая предысторию процесса, определяемого уравнением (8), до момента t включительно (события из F_t интерпретируются как «информация», доступная наблюдению до момента t включительно). Тогда на момент времени t стоимости опционов *call* и *put* на индекс *HDD* будут равны соответственно (t_n — последний день контракта)

$$c(t) = e^{-r(t_n-t)} E^Q \left[\max \{H_n - K, 0\} \middle| F_t \right] \text{ и } p(t) = e^{-r(t_n-t)} E^Q \left[\max \{K - H_n, 0\} \middle| F_t \right],$$

где для подсчета H_n по формулам (1) и (2) в качестве T_k берутся значения, полученные из решения уравнения (8). Здесь и далее для простоты считаем, что ставка пересчета $\rho = 1$.

5. Моделирование возможных сценариев погоды по методу Монте-Карло

В численных приложениях финансовой математики, в частности, при вычислении стоимости опционов, метод Монте-Карло является одним из основных (Boyle et al., 1997; Glasserman, 2003; Niederreiter, 1992; Richard et al., 2004). Моделирование температуры методом Монте-Карло основано на дискретизации уравнения (8):

$$T_j = T_j^m - T_{j-1}^m + aT_{j-1}^m + (1 - a)T_{j-1} - \lambda\sigma_j + \sigma_j\varepsilon_{j-1}, \tag{9}$$

где $\{\varepsilon_j\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение. Далее в расчетах для моделирования стандартного нормального распределения используется следующий способ (Ермаков, Михайлов, 1982). Пусть α_1, α_2 — две независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной в интервале (0; 1). Тогда две независимые реализации стандартно нормально распределенной случайной величины можно представить в следующем виде:

$$\xi_1 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \sin(2\pi\alpha_2), \quad \xi_2 = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos(2\pi\alpha_2). \tag{10}$$

По формуле (9) моделируются N независимых траекторий возможных сценариев изменения температуры. На рисунке 1 приведены графики среднесуточной температуры, определенной по формуле (6), и одной траектории возможной среднесуточной температуры, смоделированной по формуле (9).

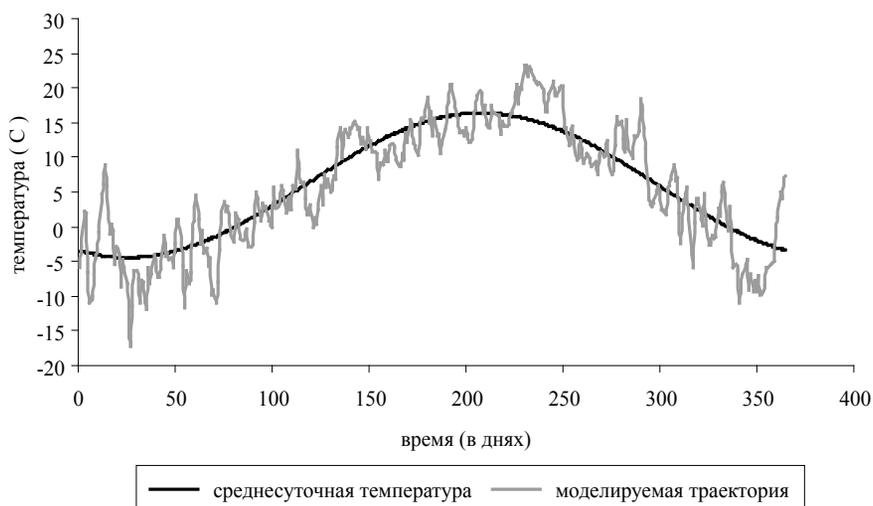


Рис. 1. Графики среднесуточной температуры

Способы понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов

Далее определяются величины выплат по опциону для каждого сценария. Например, выплата по опциону *call* на индекс *HDD* определяется как

$$\chi = \max \{ H_n - K, 0 \}, \text{ где } H_n = \sum_{i=1}^n \max \{ 18 - T_i, 0 \}. \quad (11)$$

Выплаты усредняются и дисконтируются к дате расчета:

$$\tilde{c}(t) = \frac{e^{-r(t_n-t)}}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i. \quad (12)$$

Естественно, что $\tilde{c}(t)$ является несмещенной оценкой для стоимости рассматриваемого опциона.

6. Способы понижения дисперсии оценки

Уменьшение дисперсии оценок, полученных по методу Монте-Карло, является важной задачей, т. к. это позволяет повысить эффективность вычислений. Общая теория снижения дисперсии в методе Монте-Карло приведена в монографии (Ермаков, Михайлов, 1982). В работах (Acworth et al., 1997; Boyle et al., 1997; Joy et al., 1996) различные методы понижения дисперсии использованы при оценивании стоимости производных ценных бумаг. В данном разделе предпринята попытка применения подобных методов к погодным производным инструментам. Далее рассмотрим некоторые возможные способы уменьшения дисперсии.

6.1. Метод выделения главной части (control variates)

С учетом формул (8) и (9) можно взять в качестве базовой величины стоимость опциона, определенную по средней температуре T^m . Выделим главную часть на основании средней температуры по региону T_i^m . Ежедневную среднесуточную температуру представим как сумму $T_i = T_i^m + \Delta t_i$. Значение H_n , вычисленное на основании средней температуры T_i^m , обозначим через $H_n^m = \sum_{i=1}^n \max \{ 18 - T_i^m, 0 \}$, а выплату по опциону как $\chi^m = \max \{ H_n^m - K, 0 \}$. Поскольку имеет место равенство

$$H_n = \sum_{i=1}^n \max \{ 18 - T_i, 0 \} = \sum_{i=1}^n \max \{ 18 - T_i^m, 0 \} + \Delta H_n = H_n^m + \Delta H_n, \quad \Delta H_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i,$$

$$\text{где } \Delta_i = \begin{cases} -\Delta t_i, & \text{если } 18 > T_i^m \text{ и } \Delta t_i < 18 - T_i^m; \\ -(18 - T_i^m), & \text{если } 18 > T_i^m \text{ и } \Delta t_i \geq 18 - T_i^m; \\ 0, & \text{если } 18 \leq T_i^m \text{ и } \Delta t_i \geq 18 - T_i^m; \\ 18 - T_i, & \text{если } 18 \leq T_i^m \text{ и } \Delta t_i < 18 - T_i^m, \end{cases}$$

то далее достаточно исследовать величину ΔH_n .

Выплату по опциону можно представить в виде суммы выплат по средней температуре и $\Delta\chi$: $\chi = \chi^m + \Delta\chi = \max\{H_n^m - K, 0\} + \Delta\chi$, где

$$\Delta\chi = \begin{cases} \Delta H_n, & \text{если } H_n^m \geq K; \\ 0, & \text{если } H_n^m < K \text{ и } H_n^m + \Delta H_n < K; \\ H_n^m + \Delta H_n - K, & \text{если } H_n^m < K \text{ и } H_n^m + \Delta H_n \geq K. \end{cases}$$

Далее $\Delta\chi$ оценивается по методу Монте-Карло. При этом заметим, что, в отличие от оценки (12), методом Монте-Карло оцениваются приращения $\Delta\chi$, которые имеют малые (относительно χ) значения. Стоимость опциона будет равна усредненному значению выплат, дисконтированному к моменту оценивания. Поэтому можно ожидать снижения дисперсии оценки.

6.2. Метод симметричных выборок (antithetic variates)

Метод симметричных выборок является одним из самых простых и наиболее популярных методов понижения дисперсии. Идея метода основана на следующем очевидном факте: если случайная величина ε имеет стандартное нормальное распределение, то случайная величина $-\varepsilon$ также будет стандартно нормальна. Пусть выплата χ по опциону *call* на индекс *HDD* определяется по формуле (11), а среднесуточная температура моделируется по формуле (9). В выражении (9) заменим ε_j на $-\varepsilon_j$ и получим новую траекторию, выплаты по которой обозначим через $\tilde{\chi}$. Величины $\chi, \tilde{\chi}$ имеют одинаковое распределение и являются несмещенными оценками выплаты по опциону. Данный метод позволяет без дополнительных вычислительных затрат удвоить объем моделируемых данных, поэтому при его применении можно ожидать снижения дисперсии за счет увеличения количества усредняемых величин. В качестве несмещенной оценки стоимости опциона возьмем усредненное значение, т. е. среднее арифметическое значений выплат χ и $\tilde{\chi}$, дисконтированное к моменту оценивания. В этом случае формула (12) имеет вид $\tilde{c}(t) = \frac{e^{-r(t_n-t)}}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i + \tilde{\chi}_i}{2}$. При помощи несложных рассуждений можно убедиться, что имеет место неравенство:

$$Var\left(\frac{\chi_i + \tilde{\chi}_i}{2}\right) < Var(\chi_i).$$

6.3. Квазислучайные последовательности

Техника использования в методах Монте-Карло детерминированных последовательностей вместо случайных приводит к квази Монте-Карло методам. Эти детерминированные последовательности (квазислучайные последовательности) более равномерно рассеяны в рассматриваемых областях, чем случайные последовательности. Использование таких последовательностей позволяет улучшить скорость сходимости оценок. Количественной мерой качества квазислучайных последовательностей служит так называемое отклонение (dis-

Способы понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов

сгерансу) последовательности (см., например, (Соболь, 1973; Кейперс, Нидеррейтер, 1985)). Примером последовательностей с «хорошим» равномерным распределением (low-discrepancy sequences) могут служить последовательности Холтона, Соболя, Нидеррейтера, Коробова (Niederreiter, 1992). В настоящей работе в качестве квазислучайной последовательности использована последовательность Коробова (см., например, (L'Esuyer, Lemieux, 2000)). Для получения последовательности (длины m) равномерно распределенных по Коробову точек пространства размерности d используется следующая формула:

$$P_m = \left\{ \frac{i}{m} (1, a, a^2, \dots, a^{d-1}) \bmod 1, i = 0, 1, \dots, m-1 \right\}.$$

Здесь a — целое число, взаимно простое с m .

Так как для моделирования одной возможной траектории по формуле (9) требуется n независимых реализаций величины, имеющей стандартное нормальное распределение, то, согласно формулам (10), необходимо n независимых реализаций случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0; 1)$. Поэтому для моделирования одной траектории среднесуточной температуры необходима случайная точка единичного куба пространства размерности n ($d = n$), а для усреднения выплат по N траекториям необходима квазислучайная последовательность длины N ($m = N$).

Далее был произведен вычислительный эксперимент, построена оценка по методу Монте-Карло и применены три метода понижения дисперсии. В разделе 8 для сравнительного анализа приведены численные значения стоимости опциона на зимний месяц по модели «возвращения к среднему». Эти значения получены с учетом климатических особенностей по формулам, приведенным в разделе 7.

7. Стоимость погодного опциона на зимний месяц

Так как в базовой модели рассматриваются изменения температуры в столице Швеции, учитывая климатические особенности Стокгольма в зимние месяцы, формулы для расчета можно упростить и получить приближенную формулу для стоимости опциона. Можно предположить, что в зимние месяцы в Стокгольме температура не выше 18°C , т. е. вероятность события $\max\{18 - T_t, 0\} = 0$ ничтожно мала. Следовательно

$$H_n = \sum_{k=1}^n HDD_k = 18n - \sum_{i=1}^n T_i.$$

Пусть $[t_1; t_n]$ — месяц, на который определен опцион, где t_1 и t_n — первый и последний дни месяца, t — время заключения контракта и, следовательно, момент оценивания стоимости опциона, $t < t_1$. Значение квадратической вариации, соответствующее месяцу оценивания, обозначим через σ_t , значение в контрактный месяц обозначим через σ_j . При вышеуказанном предположении можно показать (Alaton et al., 2002), что H_n имеет нормальное распределение $N(\mu_n; \delta_n)$:

$$\mu_n = E^Q [H_n | F_t] = 18n - \sum_{i=1}^n E^Q [T_i | F_t],$$

$$E^Q [T_s | F_t] = (T_t - T_t^m) e^{-a(s-t)} + T_s^m - \frac{\lambda}{a} (\sigma_i - \sigma_j) e^{-a(s-t)} + \frac{\lambda \sigma_i}{a} e^{-a(s-t)} - \frac{\lambda \sigma_j}{a},$$

$$\delta_n^2 = Var [H_n | F_t] = \sum_{i=1}^n Var [T_{t_i} | F_t] + 2 \sum_{i < j} Cov [T_{t_i}, T_{t_j} | F_t],$$

$$Cov [T_s, T_u | F_t] = e^{-a(u-s)} Var [T_s | F_t],$$

$$Var [T_s | F_t] = \frac{1}{2a} (\sigma_i^2 - \sigma_j^2) e^{-2a(s-t)} - \frac{\sigma_i^2}{2a} e^{-2a(s-t)} + \frac{\sigma_j^2}{2a}, \quad 0 \leq t \leq s \leq u,$$

при этом T_t^m берется из формулы (6), а значения параметров — из формулы (7).

Стоимость опциона *call* на индекс *HDD* можно определить по следующей формуле:

$$c(t) = e^{-r(t_n-t)} E^Q [\max \{H_n - K, 0\} | F_t] = e^{-r(t_n-t)} \left((\mu_n - K) \Phi(-\alpha_n) + \frac{\delta_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha_n^2}{2}} \right), \quad (13)$$

где $\alpha_n = (K - \mu_n) / \delta_n$ и Φ означает функцию распределения стандартного нормального закона.

8. Результаты вычислительного эксперимента

На основе модели (8) с помощью метода Монте-Карло строится оценка стоимости погодного опциона *call* на индекс *HDD*. Для этого моделируются возможные сценарии погоды для контрактного месяца по формуле (9) и затем определяются выплаты по формуле (11). Далее выплаты усредняются и дисконтируются к дате расчета по формуле (12). Количество моделируемых траекторий $N = 5000$, дисконтирование производится по ставке $r = 0.03$. При этом рыночная цена риска λ считается равной 0.08.

Рассмотрим опционы со следующими характеристиками, приведенными в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики опционов

Параметры	Опцион I	Опцион II	Опцион III
Метеостанция	Аэропорт	Аэропорт	Аэропорт
Индекс	<i>HDD</i>	<i>HDD</i>	<i>HDD</i>
Тип	<i>call</i>	<i>call</i>	<i>call</i>
Период	Февраль 2009	Февраль 2009	Февраль 2009
Страйковая цена	525	510	520
Макс. выплаты	200	200	200

Способы понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов

В таблице 2 приведены основные результаты эксперимента.

Таблица 2. Результаты расчетов

	Опцион I	Опцион II	Опцион III
Стоимость опциона по формуле (13), f	19.3943	22.2987	20.3657
Метод Монте-Карло			
Оценка опциона, sx	19.5282	21.4622	20.0572
$sig3$	0.4145	0.4115	0.4133
Ошибка $ f - sx $	0.1339	0.8365	0.3085
Метод выделения главной части			
Оценка опциона, sx	19.7696	21.9814	20.4068
$sig3$	0.3753	0.4677	0.4633
Ошибка $ f - sx $	0.4621	0.3173	0.0412
Метод симметричных выборок			
Оценка опциона, sx	19.3937	21.6804	20.1767
$sig3$	0.0255	0.0543	0.0349
Ошибка $ f - sx $	0.0006	0.6183	0.1890
Метод квази Монте-Карло			
Оценка опциона, sx	19.5501	21.9387	20.3491
$sig3$	0.3267	0.3261	0.3268
Ошибка $ f - sx $	0.1558	0.3600	0.0166

Примечание. $sig3 = 3\sqrt{Dsx / N}$ (Dsx — выборочная дисперсия оценки), т.е. $|c(t) - sx| < sig3$ — доверительный интервал для оценки («правило трех сигм»).

На рисунке 2 приведена динамика построенных для опциона I оценок при изменении количества моделируемых траекторий N .



Рис. 2. Динамика оценок стоимости опциона по N

На следующем рисунке приведена динамика значений $sig3$ для опциона I при изменении количества моделируемых траекторий.

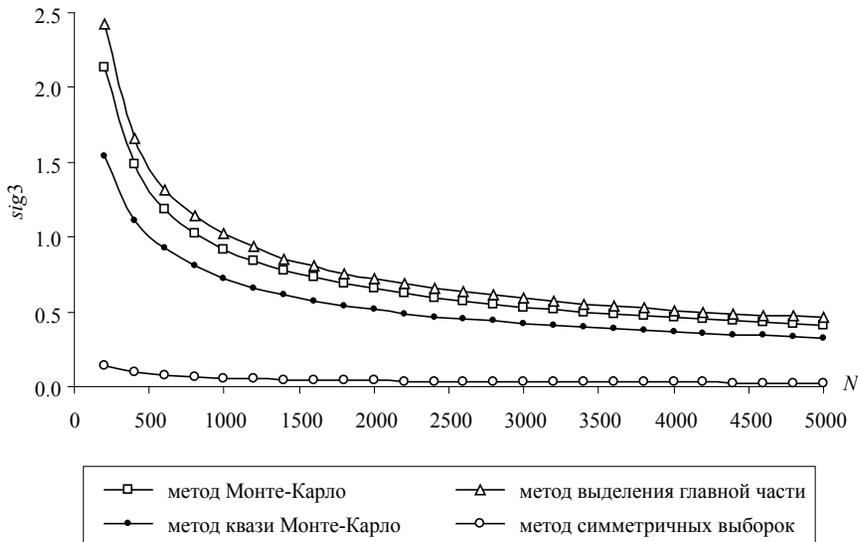


Рис. 3. Динамика по N значений $sig3$

9. Заключение

В настоящей работе предпринята попытка применения различных методов понижения дисперсии при оценивании стоимости погодных опционов на примере опциона *call* на индекс *HDD*.

При этом в качестве базовой использовалась модель на основе моделирования среднесуточной температуры из работы (Alaton et al., 2002). Результаты вычислительного эксперимента показали, что среди трех рассмотренных способов понижения дисперсии наилучшим оказался метод симметричных выборок. Недостаточная эффективность метода квазислучайных последовательностей объясняется большим значением конструктивной размерности алгоритма, т.е. чем больше величина размерности, тем хуже «качество» квазислучайных последовательностей. Наихудшим из рассмотренных методов оказался метод выделения главной части. Как видно из табл. 2 и рис. 3, результаты вычислений здесь хуже, чем результаты применения метода Монте-Карло (без понижения дисперсии). Это объясняется большим разбросом значений ΔH_n .

Автор выражает глубокую благодарность проф. Э. Л. Пресману за замечания и советы, способствовавшие улучшению работы.

Список литературы

- Бейден С., Смирнова Н. (2006). Погодные деривативы в электроэнергетике. *ЭнергоРынок*, 3.
 Ермаков С. М., Михайлов А. Г. (1982). *Статистическое моделирование*. М.: Наука.

Кейперс Л., Нидеррейтер Г. (1985). *Равномерное распределение последовательностей*. М.: Наука.
Михайлова П. А. (2003). Сколько стоит вчерашний снег: Экзотические фьючерсы — настоящее и будущее. *Банковское обозрение*, июль.

Соболь И. М. (1973). *Численные методы Монте-Карло*. М.: Наука.

Ширяев А. Н. (1998). *Основы стохастической финансовой математики. Т. 2*. М.: ФАЗИС.

Acworth P., Broadie M., Glasserman P. (1997). A comparison of some Monte Carlo and quasi Monte Carlo methods for option pricing. In: *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo method for scientific computing*. N. Y.: Springer-Verlag.

Alaton P., Djehiche B., Stillberger D. (2002). On modeling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9 (1), 1–20.

Boyle P., Broadie M., Glasserman P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (8-9), 1267–1321.

Glasserman P. (2003). *Monte Carlo methods in financial engineering*. Series: Stochastic Modelling and Applied Probability, 53. Springer.

Joy C., Boyle P. P., Tan K. S. (1996). Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance. *Management Science*, 42, 926–938.

L'Ecuyer P., Lemieux C. (2000). Variance reduction via lattice rules. *Management Science*, 46, 1214–1235.

Niederreiter H. (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 63. Philadelphia, SIAM.

Richard T. J., Manfredo M. R., Sanders D. R. (2004). Pricing weather derivatives. *American Journal of Agricultural Economics*, 86 (4), 1005–1017.

VanderMarck P. (2000). Dealing with data. *Weather Risk. Special Risk Professional Supplement. Risk Professional*, 2/9 November.