

Д. Фантаццини

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

Проблематика копула-функций, их свойств, способов подбора под конкретные исходные данные, оценивания, прикладных возможностей крайне скупо представлена в мировой специальной литературе и почти никак — в отечественной. При этом уже существуют впечатляющие примеры их прикладного использования в ситуациях, когда построение, статистическое оценивание и анализ многомерных распределений вероятностей оказывается необходимым инструментом исследования, а использование для таких задач модели многомерного нормального (гауссовского) закона не отражает специфики имеющихся исходных статистических данных. Есть основания утверждать, что модели, основанные на копула-функциях, окажутся особенно востребованными в прикладных эконометрических исследованиях, посвященных задачам оценки, анализа и управления финансовыми и страховыми рисками, доходностями разных финансовых инструментов. Предлагаемый в данном номере журнала материал является, по существу, фрагментом готовящегося к изданию учебника С. А. Айвазяна и Д. Фантаццини «Методы эконометрики. Продвинутый уровень».

Перевод на русский язык осуществлен А. В. Кудровым под научной редакцией С. А. Айвазяна.

Ключевые слова: многомерное распределение, эллиптические копула-функции, архимедовы копула-функции, иерархические копула-функции.

JEL classification: C69, C49.

Содержание

Введение

1. Копула-функции

- 1.1. Определения и основные свойства
- 1.2. Плотности копула-функций
- 1.3. Эмпирические приложения в статистическом пакете *R*: двумерные границы Фреше–Хёффдинга и копула-функция, отвечающая случаю независимости

2. Эллиптические копула-функции

- 2.1. Обзор
- 2.2. Нормальная копула-функция
- 2.3. *T* копула-функция (копула Стьюдента)
- 2.4. Численные примеры: оценивание эллиптических копула-функций
- 2.5. Эмпирические приложения в статистическом пакете *R*: эллиптические копула-функции

3. Архимедовы копула-функции

- 3.1. Основные понятия и определения
- 3.2. Некоторые однопараметрические двумерные архимедовы копула-функции
- 3.3. Многомерные перестановочные архимедовы копула-функции
- 3.4. Вложенные архимедовы копула-функции
- 3.5. Моделирование наблюдений из архимедовых копула-функций
- 3.6. Эмпирические приложения в статистическом пакете *R*: архимедовы копула-функции

Список литературы

Введение

Доказательства того, что не все совместные распределения экономических характеристик могут быть описаны при помощи многомерного нормального закона, широко представлены в различных работах, начиная с (Mills, 1927). Наиболее распространенными статистиками, позволяющими охарактеризовать степень отклонения от нормального распределения, являются коэффициенты эксцесса и асимметрии. Последние исследования показывают, что для финансовых данных также наблюдается отклонение их совместного распределения от многомерного нормального закона, а именно, отклонение в форме зависимостей компонент анализируемого многомерного признака. Один из таких примеров — асимметрия зависимостей доходностей рыночных активов, которая больше в периоды спада на рынке, чем в периоды рыночного роста, см. (Erb et al., 1994; Longin, Solnik, 2001; Ang, Chen, 2002; Patton, 2004, 2006a, б) и др.

Основной вывод этих статей заключается в том, что многомерное нормальное распределение не является хорошей моделью для описания совместного распределения многих экономических и финансовых переменных. Это приводит к проблеме поиска более адекватных многомерных моделей. Теория копула-функций — один из возможных способов ее решения.

Начало теории копула-функций было положено работами (Hoeffding, 1940) и (Sklar, 1959), но статистическое моделирование с использованием копула-функций в приложениях появилось относительно недавно и относится к концу 1990-х гг. Количество статистических исследований на тему копула-функций увеличивается достаточно быстро, см. (Wang, 1998; Frees, Valdez, 1998; Embrechts et al., 1999). Сегодня копула-функции успешно применяются в финансах и страховании, биостатистике (например, (Lambert, Vandenhende, 2002)), гидрологии (например, (Zhang, Singh, 2006)) и климатологии (например, (Salvadori, De Michele, 2007)). Среди учебников по теории копула-функций следует отметить (Joe, 1997) и (Nelsen, 1999), где представлено введение в теорию, тогда как в (Cherubini et al., 2004) и (Malevergne, Sornette, 2006) излагается использование техники копула-функций в финансовых приложениях.

Копула-функция является функцией, агрегирующей всю информацию относительно структуры зависимости между компонентами случайного вектора. Когда в качестве компонент копула-функции берутся частные функции распределения, которые необязательно принадлежат одному и тому же семейству распределений, получаем многомерную функцию распределения. Как следствие, эта теория позволяет достаточно гибко моделировать структуру зависимости между различными переменными, которые могут иметь разные частные распределения.

Несмотря на то что теория копула-моделей исследована относительно полно, проблема оценивания и статистические выводы для копула-моделей, в определенном контексте, все еще требуют дальнейших исследований, см. (Genest, Favre, 2007). За последние годы предложены различные методы оценивания параметров копула-функций, начиная с параметрических (Jondeau, Rockinger, 2003; Patton, 2004, 2006a, б; Fantazzini, 2009б), полупараметрических (Genest et al., 1995; Breymann et al., 2003; Fantazzini, 2010), и заканчивая непараметрическими методами (Fermanian, Scaillet, 2003). Более того, недавние исследования направлены на исследование «смеси» указанных выше методов, которые позволили бы сэкономить время на вычислениях (Boqué et al., 2000; Marshal, Zeevi, 2002; Cherubini et al., 2004).

В данной статье будет представлен некоторый обзор теории копула-функций, основные методы оценивания, а также сделана попытка ответить на, вероятно, самый важный вопрос теории копула-функций: как следует подбирать корректную копула-функцию?

1. Копула-функции

1.1. Определения и основные свойства

С помощью копула-функций описываются законы многомерного распределения вероятностей. Они определяются частными одномерными распределениями анализируемого многомерного закона и характером зависимостей, существующих между компонентами рассматриваемой многомерной случайной величины.

Определение 1. Функция $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ от n переменных, определенная на единичном гиперкубе $I^n = [0, 1]^n$ (т.е. $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$), называется *копула-функцией*, если она обладает следующими свойствами:

- 1) область значений функции — единичный интервал $[0, 1]$;
- 2) если $u_i = 0$ по крайней мере для одного $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$;
- 3) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ для любых $u_i \in [0, 1]$;
- 4) $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является n -возрастающей функцией в том смысле, что для всех $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ с $a_i \leq b_i$ справедливо неравенство:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0,$$

где $u_{j1} = a_j$ и $u_{j2} = b_j$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Например, если $n = 2$, четвертое свойство принимает следующий вид: для всех $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in [0, 1]^2$ с $a_i \leq b_i$ имеем,

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_1+i_2} C(u_{1i_1}, u_{2i_2}) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i_1=1}^2 [(-1)^{i_1+1} C(u_{1i_1}, u_{21}) + (-1)^{i_1+2} C(u_{1i_1}, u_{22})] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (-1)^2 C(u_{11}, u_{21}) + (-1)^3 C(u_{11}, u_{22}) + (-1)^3 C(u_{12}, u_{21}) + (-1)^4 C(u_{12}, u_{22}) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow C(u_{11}, u_{21}) - C(u_{11}, u_{22}) - C(u_{12}, u_{21}) + C(u_{12}, u_{22}) \geq 0, \end{aligned}$$

где $u_{j1} = a_j$ и $u_{j2} = b_j$ при $j \in \{1, 2\}$. Таким образом, свойство 4 равносильно тому, что

$$C(a_1, a_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(b_1, b_2) \geq 0. \tag{1}$$

Следовательно, (1) можно интерпретировать как:

$$P(0 \leq u_1 \leq a_1, 0 \leq u_2 \leq a_2) - P(0 \leq u_1 \leq a_1, 0 \leq u_2 \leq b_2) - \\ - P(0 \leq u_1 \leq b_1, 0 \leq u_2 \leq a_2) + P(0 \leq u_1 \leq b_1, 0 \leq u_2 \leq b_2) \geq 0.$$

Теперь сформулируем теорему Склара, которая показывает роль копула-функций в описании многомерных распределений вероятностей.

Теорема 1 (теорема Склара). Пусть $H(\cdot)$ — n -мерная функция распределения с частными распределениями F_1, \dots, F_n . Тогда существует n -мерная копула-функция $C(\cdot)$ такая, что для всех действительных x_1, \dots, x_n :

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (2)$$

Если все частные функции распределения непрерывны, то копула-функция определена единственным образом; в противном случае $C(\cdot)$ определена единственным образом лишь на области определения $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_n$, где Ran — область значений частных функций распределения. Обратно, если $C(\cdot)$ — копула-функция, а F_1, \dots, F_n — функции распределения, то функция $H(\cdot)$, определяемая выражением (2), является совместной функцией распределения с частными распределениями F_1, \dots, F_n .

Доказательство. См. (Sklar, 1959, 1996; Joe, 1997; Nelsen, 1999).

Последнее утверждение теоремы представляет большой интерес в задаче моделирования многомерных функций распределения, поскольку из него следует, что можно связывать вместе любые n ($n \geq 2$) одномерных функций распределения разного типа (не обязательно из одного семейства), используя любую копула-функцию, для того чтобы получить двумерные или многомерные функции распределения.

Следствие. Пусть $F_1^{(-1)}(\cdot), \dots, F_n^{(-1)}(\cdot)$ — обратные (в обобщенном смысле) функции частных распределений. Тогда для каждого (u_1, \dots, u_n) из единичного n -мерного куба существует единственная копула-функция $C: [0,1] \times \dots \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ такая, что

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)). \quad (3)$$

Доказательство. См. теорему 2.10.9 в (Nelsen, 1999).

Таким образом, копула-функция — это такая функция, которая, с использованием знания об одномерных частных распределениях, позволяет получить многомерную функцию распределения, поскольку функция распределения случайного вектора полностью описывает его вероятностную структуру, куда, в частности, входит структура зависимости его компонент. Копула-функции дают возможность разделить описание распределения случайного вектора на две части: частные распределения компонент и структура их зависимостей.

Перечислим кратко варианты использования результатов теоремы Склара и рассмотренного следствия:

- извлечение копула-функций из хорошо известных многомерных распределений, например, из многомерного нормального распределения, из многомерного распределения Стьюдента и т. д.;
- конструирование новых многомерных распределений, связывая произвольные одномерные распределения при помощи некоторой копула-функции;
- в то время как соотношение (2) обычно служит отправной точкой в задаче моделирования, соотношение (3) является теоретическим инструментом для получения копула-функции из многомерной функции распределения.

Следует отметить, что для дискретных распределений копула-функции имеют не столь простую форму, как в случае непрерывных распределений. Покажем это на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим две одинаковые кости, на которых выпадают два числа X_1 и X_2 из множества $\{1, 2, \dots, 6\}$. Предположим, что мы знаем значение X_1 и можем делать ставки на значения X_2 , которые выпадают на второй кости. Важным вопросом является следующий: существует ли взаимосвязь или зависимость между этими двумя случайными величинами, т. е. возможно ли получить некоторую информацию относительно значений X_2 , зная X_1 . Мы знаем, что каждая случайная величина полностью описывается своей функцией распределения $F_i(x) = P(X_i \leq x)$. В нашем случае мы имеем $F_1(\cdot) = F_2(\cdot) = F(\cdot)$.

Однако в общем случае одномерная функция распределения не дает нам никакой информации относительно совместного распределения двумерной случайной величины (X_1, X_2) . Правда, в нашем случае предполагается независимость (X_1, X_2) , поэтому совместное распределение (X_1, X_2) имеет вид:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F(x_1) \cdot F(x_2).$$

Для того чтобы получить полное описание (X_1, X_2) , мы использовали два элемента: частные распределения и тип взаимосвязи (в нашем случае — независимость). Возможность разделения между частными распределениями и зависимостью — это именно то, что утверждает теорема Склара. Поскольку мы рассматриваем дискретные частные распределения, то копула-функция будет определена единственным образом только на $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2$. В случае независимости имеем:

$$C\left(\frac{i}{6}, \frac{j}{6}\right) = \frac{i}{6} \cdot \frac{j}{6}, \quad i, j = 1, \dots, 6.$$

Любая копула-функция, удовлетворяющая этому ограничению, является подходящей: например, $C(u, v) = u \cdot v$ будет естественным выбором.

Важное свойство, которым обладают все копула-функции — это инвариантность относительно строго возрастающих преобразований случайных величин (см. приведенную ниже теорему 2).

Теорема 2. Рассмотрим n случайных величин X_1, \dots, X_n , зависимость между которыми определяется копула-функцией $C(\cdot)$. Если преобразования $T_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ определяются строго возрастающими функциями (т. е. $\partial_x T_i > 0$), то структура зависимости случайных величин $T_1(X_1), \dots, T_n(X_n)$ определяется той же самой копула-функцией $C(\cdot)$.

Доказательство. См. (Schweizer, Wolff, 1976, 1981), для двумерного случая — (Malevergne, Sornette, 2006).

Последнее утверждение означает, что *строго возрастающие преобразования не меняют структуру зависимости*. Это значит, что при заданных частных распределениях сохраняется структура зависимости, которая определяется копула-функцией.

Более того, можно показать, что любая копула-функция ограничена так называемыми границами Фреше–Хёффдинга:

$$W(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M(u_1, \dots, u_n),$$

где

$$W(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0), \quad M(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n).$$

В качестве примера рассмотрим две равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины U_1 и U_2 . Если $U_1 = U_2$, то эти две случайные величины имеют копула-функции вида

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_1 \leq u_2) = \min(u_1, u_2)$$

и называются абсолютно зависимыми.

Ту же самую копула-функцию можно получить, если взять $X_2 = T(X_1)$, где $T(\cdot)$ — монотонно возрастающее преобразование. Такие случайные величины X_1 и X_2 называются *комонотонными*. Прямо противоположным понятию комонотонности является *противомонотонность* случайных величин. В качестве примера возьмем равномерные случайные величины (U_1, U_2) , для которых $U_2 = 1 - U_1$. Копула-функция случайного вектора (U_1, U_2) равна

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - U_1 \leq u_2) = P(U_1 \leq u_1, 1 - u_2 \leq U_1) = u_1 + u_2 - 1 \text{ при } u_1 + u_2 > 1.$$

В противном случае она равна нулю (рис. 1).

В двумерном случае границы Фреше–Хёффдинга являются копула-функциями, но для случаев большей размерности нижняя граница Фреше–Хёффдинга W уже не является n -возрастающей (см. свойство 4 в Определении 1). Однако, неравенство в левой части нельзя улучшить, поскольку для любого фиксированного u из единичного n -куба существует $C(\cdot)$ такая, что $W(u) = C(u)$, см. доказательство теоремы 2.10.12 в (Nelsen, 1999).

Копула-функции равномерно непрерывны и (почти всюду) дифференцируемы по каждому из аргументов — см. теоремы 2.2.4 и 2.2.7 в (Nelsen, 1999). Более детальная информация относительно этих и других свойств приведена в (Joe, 1997; Nelsen, 1999, 2006).

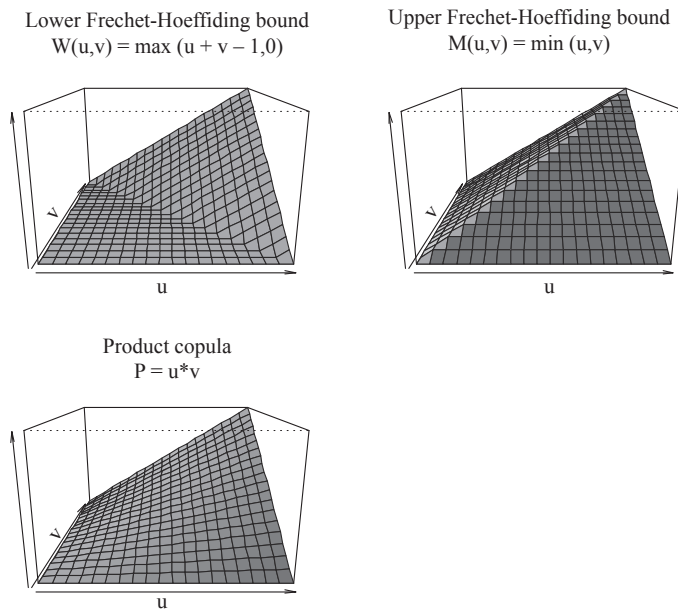


Рис. 1. Графики копула-функций W и M , а также копула-функция P , соответствующая независимым случайным величинам

1.2. Плотности копула-функций

Для копула-функций, аналогично функциям распределения, можно определить понятие плотности. В частности, плотность $c(u_1, u_2, \dots, u_n)$, ассоциированная с копула-функцией $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$, определяется соотношением

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}.$$

Плотность может быть использована для того, чтобы определить так называемые *абсолютно непрерывную* A_C и *сингулярную* S_C компоненты копула-функции $C(\cdot)$:

$$A_C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_n} \frac{\partial^n C(s_1, s_2, \dots, s_n)}{\partial s_1 \dots \partial s_n} ds_1 \dots ds_n,$$

$$S_C(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(u_1, u_2, \dots, u_n) - A_C(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Копула-функция, для которой $C(\cdot) = A_C(\cdot)$ на I^n , называется *абсолютно непрерывной*. В противном случае копула-функция называется *сингулярной*.

Существуют копула-функции, которые имеют как абсолютно непрерывную, так и сингулярную компоненты. Например, копула-функция $P = u_1 u_2 u_3$ является абсолютно непрерывной, поскольку

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

$$\frac{\partial C(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} = 1$$

и для любого $(u_1, u_2, u_3) \in I^3$ имеем:

$$A_C(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \int_0^{u_3} \frac{\partial C(s_1, s_2, s_3)}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} ds_1 ds_2 ds_3 = u_1 u_2 u_3 = P.$$

Более того, применяя следствие теоремы Склара и рассматривая непрерывные случайные величины, можно видеть, что плотность копула-функции $c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ ассоциирована с плотностью совместной функции распределения $H(\cdot)$, обозначенной как $f_H(\cdot)$, следующим образом (каноническое представление):

$$f_H(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n [C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))]}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{i=1}^n f_i(x_i),$$

где

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i(x_i)}. \tag{4}$$

1.3. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: двумерные границы Фреше–Хёффдинга и копула-функция, отвечающая случаю независимости

Если необходимо изобразить линии уровня двумерных границ Фреше–Хёффдинга и копула-функции, соответствующей случаю независимости, то для этого можно использовать следующий R код (результаты представлены на рис. 2):

```
library (fCopulae)
# Generate Grid:
N = 50; uv = grid2d (x = (0:N)/N); u = uvx; v = uvv
# Compute Frechet and Product Copulae:
W = matrix (apply (cbind (u+v-1, 0), 1, max), ncol = N+1)
Pi = matrix (u*v, ncol = N+1)
M = matrix (apply (cbind (u, v), 1, min), ncol = N+1)
# Create Perspective Plots:
persp (z = W, theta = -40, phi = 30, main = "Lower Frechet",
cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
persp (z = Pi, theta = -40, phi = 30, main = "Pi Copula",
cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
persp (z = M, theta = -40, phi = 30, main = "Upper Frechet",
cex = 0.5, ticktype = "detailed", col = "steelblue")
```



```
# Create Contour Plots:
contour (W, xlab = "u", ylab = "v", main = "Lower Frechet")
contour (Pi, xlab = "u", ylab = "v", main = "Pi Copula")
contour (M, xlab = "u", ylab = "v", main = "Upper Frechet")
```

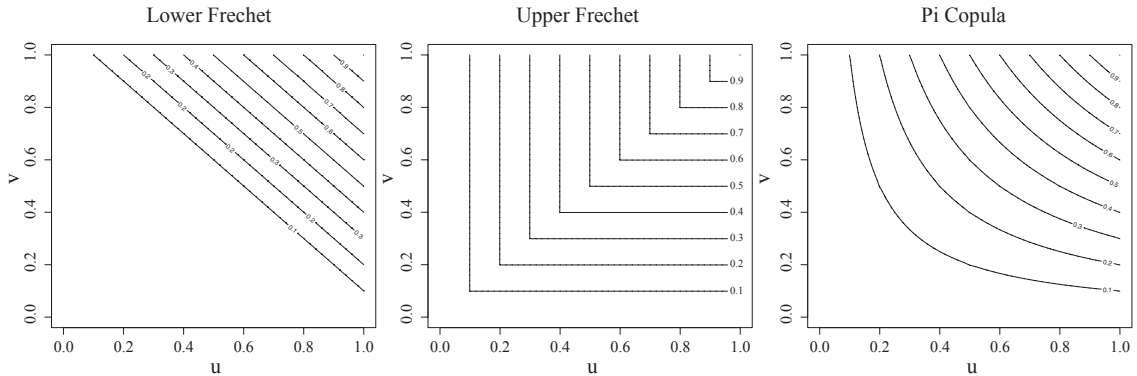


Рис. 2. Графики линий уровня двумерных границ Фреше–Хёффдинга и копула-функции, отвечающей случаю независимости

2. Эллиптические копула-функции

2.1. Обзор

Класс эллиптических распределений включает, главным образом, класс симметричных распределений, который весьма популярен в актуарной математике, страховании и финансах. Этот класс включает интересные примеры многомерных распределений, и многие из них имеют некоторые общие свойства с многомерным нормальным распределением. Они позволяют моделировать многомерные экстремальные события, формируя зависимость, не совпадающую с зависимостью многомерного нормального распределения, и использовать распределение с большим эксцессом, чем эксцесс нормального распределения. Кроме того, с их помощью можно моделировать феномен «тяжелых хвостов», который часто наблюдается для финансовых данных, см. (Embrechts et al., 1999; Schmidt, 2002).

Эллиптические копула-функции — это попросту копула-функции многомерных распределений эллиптического типа. Если следовать работе (Fang et al., 1987), то эллиптические распределения определяются следующим образом.

Определение 2 (эллиптические распределения). Пусть \mathbf{X} есть n -мерный случайный вектор и $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная и неотрицательно определенная матрица. Если существует $\mu \in \mathbb{R}^n$ и функция $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что характеристическая функция $\mathbf{X} - \mu$ имеет вид

$$\phi_{\mathbf{X}-\mu}(t) = \exp(it^T \mu) \psi\left(-\frac{1}{2}t^T \Sigma t\right),$$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

для любого $t \in \mathbb{R}^n$, то \mathbf{X} называют случайным вектором, имеющим *распределение эллиптического типа* с параметрами μ, Σ .

Копула-функция $C(\cdot)$ называется *эллиптической*, если она отвечает распределению эллиптического типа. Функция плотности распределения эллиптического типа, если она существует, имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\gamma}{\sqrt{|\Sigma|}} g\left((\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

для некоторой функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, которая удовлетворяет условию: $\int_0^\infty g(x) dx < \infty$. Функцию $g(\cdot)$ называют оператором плотности распределения эллиптического типа или *генерирующей функцией*, см. (Fang et al., 1987). Нормирующая константа γ может быть определена явным образом с использованием перехода к полярным координатам, см. (Landsman, Valdez, 2003). В результате получим:

$$\gamma = \left(2\pi \int_0^\infty g(z) dz\right)^{-1}.$$

В качестве примеров распределений эллиптического типа следует привести нормальное распределение, распределение Коши и распределение Стьюдента, логистическое распределение, распределение Лапласа, распределение Котца и экспоненциальное распределение, см. табл. 1.

Таблица 1. Список генерирующих функций $g(t)$ и нормирующих констант γ для некоторых копула-функций эллиптического типа

Распределение	Генератор	Константа
Нормальное	e^{-t^2}	$(2\pi)^{-1}$
Коши	$(1+2t)^{-3/2}$	$(2\pi)^{-1}$
Стьюдента	$\left(1 + \frac{2t}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-2}{2}}$	$(2\pi)^{-1}$
Логистическое	$e^t(1+e^{-t})^{-2}$	π^{-1}
Лапласа	$e^{-\sqrt{ t }}$	$(2\pi)^{-1}$
Котца	$e^{-rt/2}$	$r(2\pi)^{-1}$
Экспоненциальное	$e^{-r(t/2)^s}$	$sr^{1/s} (2\pi\Gamma(1/s))^{-1}$

Отметим, что в некоторых работах используются иные определения генерирующих функций $g(\cdot)$, где $t/2$ заменено на t , что влияет на значение нормирующих констант γ .

Пример 2. Рассмотрим двумерный случай. Предположим, что $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad |\Sigma| = 1 - \rho^2, \quad -1 < \rho < 1.$$

Тогда \mathbf{X} имеет функцию плотности распределения

$$f_{\rho}(x, y) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2}} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой Склара, двумерная копула-функция эллиптического типа имеет вид:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{F_g^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_g^{-1}(u_2)} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2}\right) dx dy. \quad (5)$$

Далее более детально рассмотрим две наиболее распространенные копула-функции эллиптического типа, а именно, нормального распределения и распределения Стьюдента.

2.2. Нормальная копула-функция

Копула-функция двумерного нормального распределения с коэффициентом корреляции ρ может быть вычислена из уравнения (5) при $g = e^{-t/2}$ и $\gamma = 1 / (2\pi)$:

$$C^{Normal}(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right) dx dy,$$

что может быть представлено в виде:

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi^2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho),$$

где $\Phi^2(\cdot)$ обозначает функцию двумерного нормального распределения с единичными дисперсиями компонент, корреляцией ρ и нулевым средним значением, а $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция для одномерного стандартного нормального распределения.

В общем случае многомерная нормальная копула-функция определяется следующим образом:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi^n(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n); \Sigma),$$

где $\Phi^n(\cdot, \dots, \cdot; \Sigma)$ — это n -мерная нормальная функция распределения с нулевыми средними значениями и ковариационной матрицей Σ .

Плотность нормальной копула-функции может быть получена из уравнения (4) с использованием канонического представления:

$$c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) = \frac{f^{Gaussian}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{Gaussian}(x_i)} = \frac{(2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x)}{\prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} x_i^2)} = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \xi\right),$$

где $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$ — вектор, компонентами которого являются значения обратной функции для стандартного одномерного гауссовского распределения в точках $u_i = \Phi(x_i)$, $i = 1, \dots, n$; \mathbf{I} — единичная матрица.

Представим основные шаги алгоритма моделирования нормальной копула-функции (более детальное описание моделирования копула-функции см. в (Cherubini et al., 2004; McNeil et al., 2005)):

- найти разложение Холецкого \mathbf{A} для корреляционной матрицы Σ ;
- смоделировать из стандартного нормального распределения n независимых случайных величин $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$;
- взять $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{z}$;
- вычислить компоненты $u_i = \phi(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $\phi(\cdot)$ — одномерное стандартное нормальное распределение.

В результате получим вектор $(u_1, \dots, u_n)^T$, являющийся реализацией случайного вектора из n -мерной гауссовской копула-функции.

2.3. T копула-функция (копула Стьюдента)

Копула-функция для двумерного распределения Стьюдента с корреляцией ρ может быть получена из формулы (5) при

$$g = \left(1 + \frac{2t}{\nu}\right)^{\frac{-\nu-2}{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}.$$

Для T копула-функции справедливо соотношение:

$$C^{t-copula}(u_1, u_2; \rho, \nu) = T^2(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2); \rho, \nu),$$

где $T^2(\cdot, \cdot; \rho, \nu)$ — функция распределения двумерного распределения Стьюдента с корреляцией ρ и ν степенями свободы; $t_v^{-1}(\cdot)$ — обратная функция одномерного распределения Стьюдента. При $\nu \rightarrow \infty$ копула-функция Стьюдента сходится к нормальной копула-функции, а при $\nu \rightarrow 1$ сходится к копула-функции распределения Коши.

В общем случае многомерная T копула-функция определяется следующим образом:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma, \nu) = T^n(t^{-1}(u_1), t^{-1}(u_2), \dots, t^{-1}(u_n); \Sigma, \nu),$$

а плотность T копула-функции может быть получена из уравнения (4) и канонического представления:

$$c(t_v(x_1), \dots, t_v(x_n)) = |\Sigma|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right]^n \frac{\left(1 + \frac{\xi^T \Sigma^{-1} \xi}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\xi_i^2}{2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

где $\xi = (t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))^T$ — вектор, компонентами которого являются значения обратной функции распределения Стьюдента в точках $u_i = t_v(x_i)$.

Приведем алгоритм моделирования наблюдений, подчиняющихся распределению с T копула-функцией:

- найти разложение Холецкого \mathbf{A} матрицы Σ ;
- смоделировать n независимых случайных величин из стандартного нормального распределения, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$;
- смоделировать случайную величину s из χ_ν -распределения, не зависящую от \mathbf{z} ;
- определить вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z}$;
- положить $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}} \mathbf{y}$;
- определить компоненты $u_i = t_v(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, где $t_v(\cdot)$ — одномерное стандартное распределение Стьюдента с ν степенями свободы.

Вектор $(u_1, \dots, u_n)^T$ смоделирован из n -мерной T копула-функции.

Нормальная и T копула-функции весьма популярны при анализе финансовых данных, поскольку они позволяют моделировать портфели высокой размерности, являясь при этом относительно легко оцениваемыми. Кроме того, они позволяют генерировать наблюдения при помощи относительно простых алгоритмов. На рисунке 3 представлены графики плотностей некоторых эллиптических копула-функций, построенных с использованием функции `fcopulae` из пакета R .

Обобщение: сгруппированные T копула-функции. Сгруппированные T копула-функции впервые были предложены в работах (Daul et al., 2003) и (Demarta, McNeil, 2005). Калибровка таких копула-функций не сложнее, чем калибровка T копула-функций, но для первых имеется возможность определять различные структуры зависимости для подгрупп компонент вектора из T копула-функции.

Пусть $\mathbf{Z} \in \mathbf{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, где \mathbf{R} — ковариационная матрица размерности $n \times n$ с единичными диагональными элементами. Далее рассмотрим случайную величину U , равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$ и не зависящую от \mathbf{Z} . Пусть через $G_\nu(\cdot)$ обозначена функция распределения случайной величины $\sqrt{\nu} / \chi_\nu^2$, где χ_ν^2 — случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с ν степенями свободы. Кроме того, задано разбиение множества $1, \dots, n$ на m подмножеств с размерами s_1, \dots, s_m (т.е. $s_1, \dots, s_m \geq 1$, $s_1 + \dots + s_m = n$) и для каждого $k = 1, 2, \dots, m$ задано число степеней свободы ν_k . Возьмем $W_k = G_{\nu_k}^{-1}(U)$, $k = 1, \dots, m$, и $\mathbf{Y} = (W_1 Z_1, \dots, W_1 Z_{s_1}, W_2 Z_{s_1+1}, \dots, W_2 Z_{s_1+s_2}, \dots, W_m Z_n)$. Случайная величина \mathbf{Y} имеет так называемое сгруппированное t -распределение. Наконец, определим

$$\mathbf{U} = (t_{\nu_1}(Y_1), \dots, t_{\nu_1}(Y_{s_1}), t_{\nu_2}(Y_{s_1+1}), \dots, t_{\nu_2}(Y_{s_1+s_2}), \dots, t_{\nu_m}(Y_n)).$$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

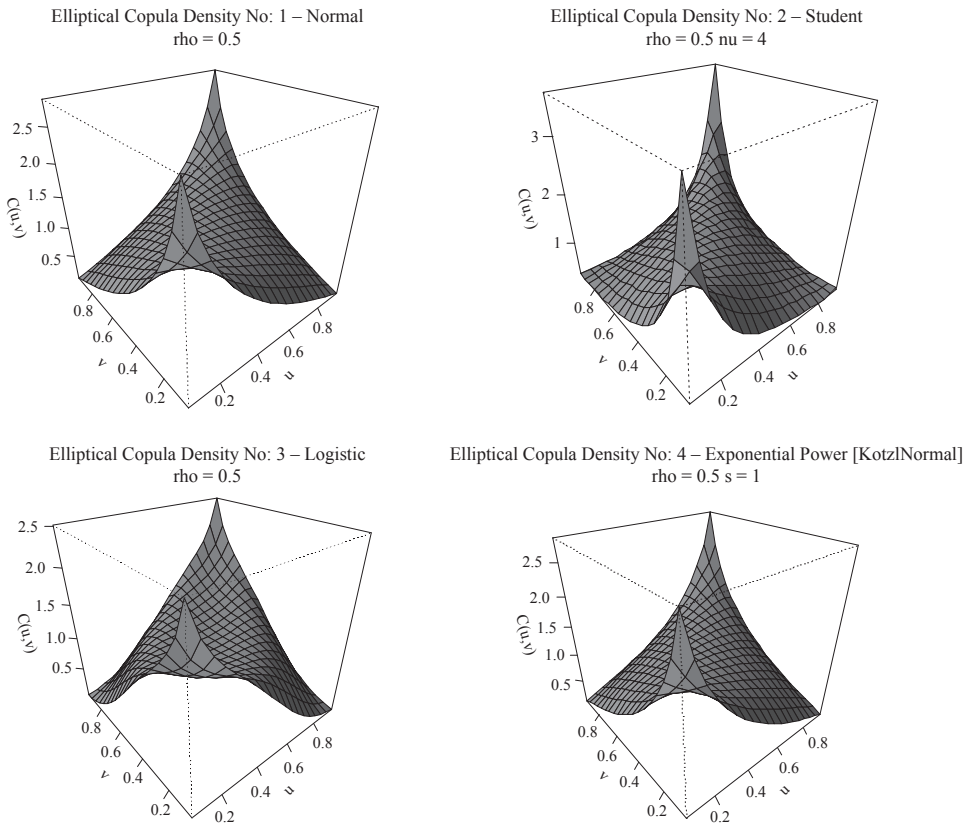


Рис. 3. Плотности эллиптических копула-функций: нормальное распределение, распределение Стьюдента, логистическое и экспоненциальное распределение. Параметры указаны над соответствующими им графиками

Случайный вектор \mathbf{U} имеет распределение на $[0,1]^n$, а его компоненты имеют равномерное распределение на $[0,1]$. Будем называть распределение вектора \mathbf{U} сгруппированной T копула-функцией.

Отметим, что (Y_1, \dots, Y_{s_1}) имеет многомерное T -распределение с ν_1 степенями свободы, и для $k = 1, \dots, m-1$ вектор $(Y_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, \dots, Y_{s_1+\dots+s_k})$ имеет многомерное T -распределение с ν_{k+1} степенями свободы. Соответствующее распределение подвектора вектора \mathbf{U} представляет собой T копула-функцию с ν_{k+1} степенями свободы, для $k = 0, \dots, m-1$. Для сгруппированной T копула-функции нет простого выражения для плотности. Однако существует весьма полезная аппроксимация для автокорреляции (в предположении ее постоянства), полученная в работе (Daul et al., 2003):

$$\rho_{ij}(z_i, z_j) \approx \sin(\pi \tau_{ij}(u_i, u_j) / 2),$$

где i и j принадлежат различным группам, а τ_{ij} — парный коэффициент ранговой корреляции Кендалла. Эта аппроксимация позволяет производить оценку параметров методом максимального правдоподобия независимо для каждой подгруппы. В работе (Fantazzini,

2009а) представлено обобщение модели из (Daul et al., 2003), в котором рассматривается динамическая структура корреляционной матрицы \mathbf{R}_t .

2.4. Численные примеры: оценивание эллиптических копула-функций

Нормальная копула-функция. Выше было показано, как, применяя теорему Склара и используя соотношение между функцией распределения и ее плотностью, можно получить плотность нормальной (гауссовской) копула-функции:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \frac{f^{Gaussian}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{Gaussian}(x_i)} = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \xi_t^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \xi_t\right],$$

где $\xi = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$, а $u_i = \Phi(x_i)$; логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l^{Gaussian}(\theta) = -\frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \xi_t^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \xi_t.$$

Если логарифмическая функция правдоподобия дифференцируема по параметрам θ , а решение уравнений $\partial_\theta l(\theta) = 0$ дает точку глобального максимума функции $l(\theta)$, можно получить оценку максимального правдоподобия для ковариационной матрицы $\hat{\theta}_{ML} = \hat{\Sigma}$ гауссовской копула-функции:

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma^{-1}} l^{Gaussian}(\theta) = \frac{T}{2} \Sigma - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \xi_t \xi_t^T = 0,$$

а, следовательно,

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t \xi_t^T,$$

т.е. получаем классическую оценку для ковариационной матрицы. Следовательно, в качестве приближенной оценки корреляционной матрицы можно использовать матрицу:

$$\hat{\mathbf{R}} = (\text{diag } \hat{\Sigma})^{-1/2} \hat{\Sigma} (\text{diag } \hat{\Sigma})^{-1/2}. \tag{6}$$

T копула-функция. Плотность T копула-функции равна:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n; \Sigma) = \frac{f^{Student}(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{i=1}^n f_i^{Student}(x_i)} = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2}) \left[\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \right]^n \left(1 + \frac{\xi_t^T \Sigma^{-1} \xi_t}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\xi_{it}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}},$$

а логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

$$l^{Student}(\theta) = -T \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} - nT \ln \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| - \frac{\nu+n}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{\xi_t^T \Sigma^{-1} \xi_t}{\nu} \right) + \frac{\nu+1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\xi_{it}^2}{\nu} \right).$$

В случае T копула-функции невозможно получить аналитическое выражение для оценки максимального правдоподобия, поэтому необходимо использовать численные алгоритмы максимизации функции правдоподобия. Однако в случае большой размерности T копула-функции такие алгоритмы являются слишком затратными по времени. В связи с этим предлагаются альтернативные алгоритмы, многошаговые параметрические или полупараметрические подходы. Рассмотрим три наиболее часто применяемых метода: первый из них предложен в работе (Boqué et al., 2000) и основан на процедуре рекурсивной оптимизации для корреляционной матрицы; второй представлен в работе (Marshall, Zeevi, 2002) и базируется на использовании оценки ранговой корреляции Кендалла; третий является смешанным параметрическим методом и основан на методах моментов и максимального правдоподобия (Chen et al., 2004).

Метод 1 (Boqué et al., 2000).

1) Используя эмпирические функции одномерных частных распределений, преобразуем $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$, $t = 1, \dots, T$, к приблизительно равномерно распределенным $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$.

2) Для каждого значения степени свободы ν из рассматриваемого интервала значений оцениваем корреляционную матрицу R_ν :

а) для каждого фиксированного t ($t = 1, \dots, T$) положим:

$$\xi_t = (t_\nu^{-1}(\hat{u}_{1t}), \dots, t_\nu^{-1}(\hat{u}_{nt}))^T;$$

б) пусть $\hat{\Sigma}$ — корреляционная матрица для гауссовской копула-функции, оцениваемая по формуле (6), положим $\hat{\Sigma}_{\nu,1} = \hat{\Sigma}$;

в) пусть $\hat{\Sigma}_{\nu,k+1}$ удовлетворяет следующей рекурсивной схеме:

$$\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} = \frac{\nu+n}{T\nu} \sum_{t=1}^T \xi_t \xi_t^T \left(1 + \xi_t^T \hat{\Sigma}_{\nu,k}^{-1} \xi_t / \nu \right)^{-1};$$

г) перемасштабируем элементы матрицы следующим образом:

$$\left(\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,j} = \frac{\left(\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,j}}{\sqrt{\left(\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{i,i} \left(\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} \right)_{j,j}}},$$

в результате получим, в частности, единичные диагональные элементы;

д) повторяем шаги в)–г) до тех пор, пока $\hat{\Sigma}_{\nu,k+1} = \hat{\Sigma}_{\nu,k}$, и положим $\hat{\Sigma}_\nu = \hat{\Sigma}_{\nu,k}$.

3) Оценим ν путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности T копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1,t}, \dots, \hat{u}_{n,t}; \hat{\Sigma}_{\nu}, \nu).$$

Метод 2 (Marshall, Zeevi, 2002).

Предыдущая процедура является вычислительно трудоемкой в случае большой обучающей выборки. Более того, она может давать неустойчивые результаты в ситуациях, когда существует k ($k \geq 1$), для которого матрица $\hat{\Sigma}_{\nu,k}$ близка к вырожденной. Для преодоления этой проблемы в работе (Marshall, Zeevi, 2002) предлагается следующий алгоритм:

- 1) Используя эмпирические функции одномерных частных распределений, преобразуем $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$, $t = 1, \dots, T$ к приблизительно равномерно распределенным $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$.
- 2) Оценим $\hat{\Sigma}$ с использованием непараметрической оценки рангового коэффициента Кендалла (Lindskog et al., 2002):

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \hat{\tau}_{ij}\right), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Как указано в работах (Lindskog, 2000; Genest et al., 1995), если имеется два временных ряда X_t и Y_t , $t = 1, \dots, T$, то состоятельной оценкой коэффициента Кендалла будет:

$$\hat{\tau}_{i,j} = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{i < j} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)], \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\text{где } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

- 3) Оценим ν путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности T копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{nt}; \hat{\Sigma}; \nu).$$

Метод 3 (Chen et al., 2004).

- 1) Используя эмпирические или параметрически оцененные функции одномерных частных распределений, преобразуем $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$, $t = 1, \dots, T$ к приблизительно равномерно распределенным $(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}, \dots, \hat{u}_{nt})$.
- 2) Пусть $\hat{\mathbf{R}}$ — корреляционная матрица для гауссовской копула-функции, оцененной с использованием уравнения (6). Положим $\hat{\Sigma}_{Gaussian} = \hat{\mathbf{R}}$.

- 3) Оценим ν путем максимизации логарифмической функции правдоподобия плотности T копула-функции:

$$\hat{\nu} = \arg \max_{\nu} \sum_{t=1}^T \ln c^{Student}(\hat{u}_{1t}, \dots, \hat{u}_{nt}; \hat{\Sigma}_{Gaussian}; \nu).$$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

4) Пусть $\xi_{vt} = (t_v^{-1}(\hat{u}_{1t}), \dots, t_v^{-1}(\hat{u}_{nt}))^T$. Наконец, используя уравнение (6), вычислим:

$$\hat{\Sigma}_{Student} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_{vt} \xi_{vt}^T.$$

Здесь также могла быть применена итеративная процедура, но авторы работы (Chen et al., 2004) не делали этого. Однако после первого шага разница между фактической ковариационной матрицей и ее оценкой весьма мала.

2.5. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: эллиптические копула-функции

В модуль «fCopulae» входит множество интересных функций, позволяющих исследовать эллиптические функции. Приведем некоторые команды:

<i>fCopulae</i> функция	Описание
ellipticalList	список доступных эллиптических копула-функций
ellipticalParam	установка параметров по умолчанию
ellipticalRange	диапазон допустимых значений коэффициента корреляции
ellipticalCheck	проверка принадлежности коэффициента корреляции допустимому диапазону

Для функции распределения и плотностей имеются следующие команды:

<i>fCopulae</i> функция	Описание
rellipticalCopula	моделирование наблюдений из эллиптической копула-функции
pellipticalCopula	вычисление значения эллиптической копула-функции
dellipticalCopula	вычисление значения плотности эллиптической копула-функции
rellipticalSlider	график случайных величин, смоделированных из эллиптической копула-функции
pellipticalSlider	график функции распределения
dellipticalSlider	график функции плотности

Если необходимо изобразить график функции плотности и линий уровня нормальной копула-функции, нужно использовать следующие команды (результат см. на рис. 4):

```
# Generate the 2D Grid:
N = 50; x = (0:N)/N; uv = grid2d (x); u = uv$x; v = uv$y
# Compute the Normal Copula Density:
c. uv = dellipticalCopula (u, v, rho = 3/4, type = "norm", output = "list")
# Create a Perspective Plot:
persp (c. uv, theta = -40, phi = 30, ticktype = "detailed", col = "steelblue",
main = "Normal Copula Density", cex = 0.5)
# Create a Contour Plot:
contour (c. uv, nlevels = 20, main = "Normal Copula Density", cex = 0.5)
```

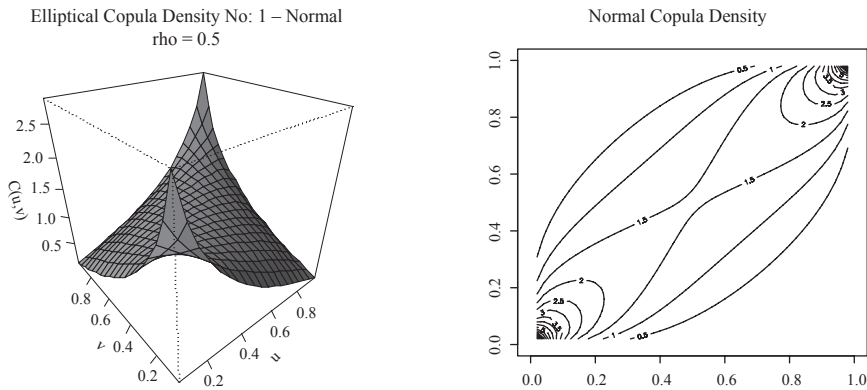


Рис. 4. График плотности нормальной копула-функции и ее линий уровня

Для представления о графике эллиптической копула-функции и ее плотности при различном выборе параметров рекомендуем воспользоваться «слайдером» функций:

```
# Start Slider for Perspective Distribution Plots:
pellipticalSlider ()
11cm!
# Start Slider for Perspective Density Plots:
dellipticalSlider ()
```

В случае, если необходимо оценить эллиптические копула-функции и сгенерировать соответствующие им наблюдения, можно использовать следующий код:

```
# Estimation of 100 Samples:
est = NULL
for (i in 1:100)
R = ellipticalCopulaSim (n = 100, rho = 0.6, param = 4, type = "t")
ans = ellipticalCopulaFit (R, type = "t")
ans=ans$par
est = rbind (est, ans)
# Print the Result:
for (i in 1:2) print (c ( mean = mean (est [, i]), sd = sd (est [, i])))
# Make a kernel density of the 100 estimates
dens1=density (est [,1]) plot (dens1,main="kernel density of estimated Rho")
dens2=density (est [,2]) plot (dens2,main="kernel density of estimated NU")
```

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

3. Архимедовы копула-функции

3.1. Основные понятия и определения

Архимедовы копула-функции обеспечивают аналитическую гибкость и широкий спектр различных мер зависимости. По следующим причинам эти копула-функции могут быть использованы в широком диапазоне приложений:

- Архимедовы копула-функции могут быть представлены в явном аналитическом виде, в отличие от семейства эллиптических копула-функций, которые определяются в неявной форме.

- Архимедовы копула-функции допускают относительно простое построение, включая вычислительную реализацию (см. табл. 2).

- Многие параметрические семейства копула-функций принадлежат этому классу.

- Архимедовы копула-функции не ограничены обязательным наличием радиальной симметрии, что свойственно случаю нормальной копула-функции или общему случаю эллиптических копула-функций. Это является преимуществом, т. к. во многих финансовых и страховых приложениях наблюдается более сильная зависимость между большими убытками, чем между большими доходами.

Двумерные архимедовы копула-функции могут быть определены следующим образом.

Определение 3. Рассмотрим непрерывную, строго убывающую и выпуклую функцию $\varphi(u)$ с неотрицательными значениями, определенную при $u \in [0,1]$ и удовлетворяющую условию $\varphi(1) = 0$. Определим псевдообратную функцию $\varphi^{[-1]}(t)$ соотношением:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{для } 0 \leq t < \varphi(0); \\ 0 & \text{для } t \geq \varphi(0), \end{cases}$$

где $\varphi^{-1}(t)$ — обычная обратная функция к функции $\varphi(u)$.

Тогда функцию $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, определенную как:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)], \tag{7}$$

называют архимедовой копула-функцией с генератором $\varphi(\cdot)$. Более того, если $\varphi(0) = \infty$, то псевдообращение дает обычную обратную функцию (т. е. $\varphi^{[-1]}(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$), а $\varphi(\cdot)$ и $C(\cdot)$ в этом случае называют строгим генератором и строгой архимедовой копула-функцией, соответственно (в противном случае они называются нестрогими), см. рис. 5.

В работе (Nelsen, 1999) представлен список из 22 однопараметрических двумерных архимедовых копула-функций. Этот список вместе с генерирующими функциями $\varphi(\cdot)$ и соответствующими диапазонами параметра α воспроизведен в табл. 2.

Копула-функции с номерами 3–6, 9, 10, 12–14, 17, 19, 20, 22 являются строгими копула-функциями, тогда как копула-функции с номерами 1 и 16 — строгие только для $\alpha > 0$. Остальные копула-функции из табл. 2 не являются строгими. Некоторые из архимедовых копула-функций имеют специальные названия. Например, копула-функцию под номером 1 называют копула-функцией Клейтона, под номером 4 — копула-функцией Гумбеля,

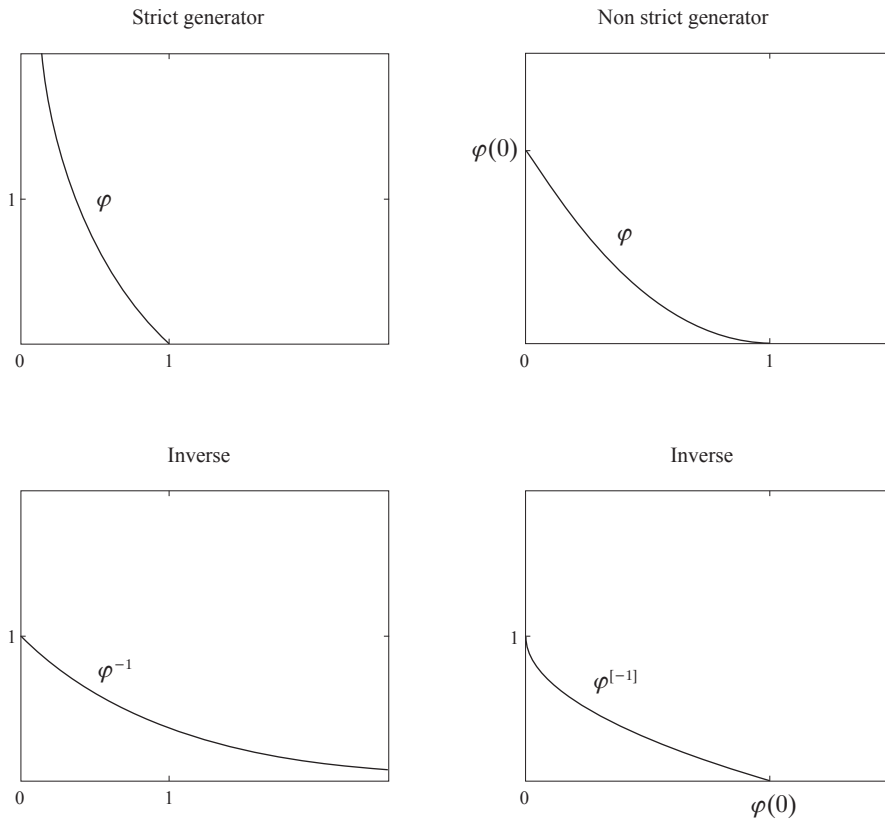


Рис. 5. Строгие и нестрогие генераторы и их обращения

а под номером 5 — копула-функцией Франка. Учитывая, что последние три копула-функции довольно популярны, они будут рассмотрены ниже более подробно.

Таблица 2. Список архимедовых копула-функций

Номер	$C_\alpha(u, v)$	Генератор $\varphi_\alpha(t)$	Диапазон параметра α
1	$\max([u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}, 0)$	$(t^{-\alpha} - 1) / \alpha$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
2	$\max(1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$(1-t)^\alpha$	$[1, \infty)$
3	$\frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \alpha(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$
4	$\exp(-[(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha})$	$(-\ln t)^\alpha$	$[1, \infty)$
5	$-\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
6	$1 - [(1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha - (1-u)^\alpha(1-v)^\alpha]^{1/\alpha}$	$-\ln[1 - (1-t)^\alpha]$	$[1, \infty)$
7	$\max(\alpha uv + (1-\alpha)(u+v-1), 0)$	$-\ln[\alpha t + (1-\alpha)]$	$(0, 1]$
8	$\max\left(\frac{\alpha^2 uv - (1-u)(1-v)}{\alpha^2 - (\alpha-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right)$	$\frac{1-t}{1 + (\alpha-1)t}$	$[1, \infty)$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

Окончание табл. 2

Номер	$C_\alpha(u, v)$	Генератор $\varphi_\alpha(t)$	Диапазон параметра α
9	$uv \exp(-\alpha \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \alpha \ln t)$	$(0, 1]$
10	$uv[1 + (1 - u^\alpha)(1 - v^\alpha)]^{-1/\alpha}$	$\ln(2t^{-\alpha} - 1)$	$(0, 1]$
11	$\max([u^\alpha v^\alpha - 2(1 - u)^\alpha(1 - v)^\alpha]^{1/\alpha}, 0)$	$\ln(2 - t^\alpha)$	$(0, \frac{1}{2}]$
12	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\alpha + (v^{-1} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-1}$	$(t^{-1} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$
13	$\exp(1 - [(1 - \ln u)^\alpha + (1 - \ln v)^\alpha - 1]^{1/\alpha})$	$(1 - \ln t)^\alpha - 1$	$(0, \infty)$
14	$(1 + [(u^{-1/\alpha} - 1)^\alpha + (v^{-1/\alpha} - 1)^\alpha]^{1/\alpha})^{-\alpha}$	$(t^{-1/\alpha} - 1)^\alpha$	$[1, \infty)$
15	$\max(\{1 - [(1 - u^{1/\alpha})^\alpha + (1 - v^{1/\alpha})^\alpha]^{1/\alpha}, 0\})$	$(1 - t^{1/\alpha})^\alpha$	$[1, \infty)$
16	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\alpha}), S = u + v - 1 - \alpha(u^{-1} + v^{-1} - 1)$	$(\alpha t^{-1} + 1)(1 - t)$	$[0, \infty)$
17	$\left(1 + \frac{[(1 + u)^{-\alpha} - 1][(1 + v)^{-\alpha} - 1]}{2^{-\alpha} - 1}\right)^{-1/\alpha} - 1$	$-\ln \frac{(1 + t)^{-\alpha} - 1}{2^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
18	$\max(1 + \alpha / \ln[e^{\alpha/(u-1)} + e^{\alpha/(v-1)}], 0)$	$e^{\alpha/(u-1)}$	$[2, \infty)$
19	$\alpha / \ln(e^{\alpha/u} + e^{\alpha/v} - e^\alpha)$	$e^{\alpha/t} - e^\alpha$	$[0, \infty)$
20	$[\ln(\exp(u^{-\alpha}) + \exp(v^{-\alpha}) - e)]^{-1/\alpha}$	$\exp(t^{-\alpha}) - e$	$(0, \infty)$
21	$1 - (1 - \{\max([1 - (1 - u)^\alpha]^{1/\alpha} + [1 - (1 - v)^\alpha]^{1/\alpha} - 1, 0)\}^\alpha)^{1/\alpha}$	$1 - [1 - (1 - t)^\alpha]^{1/\alpha}$	$[1, \infty)$
22	$\max\left(\left[1 - (1 - u^\alpha)\sqrt{1 - (1 - u^\alpha)^2} - (1 - v^\alpha)\sqrt{1 - (1 - v^\alpha)^2}\right]^{1/\alpha}, 0\right)$	$\arcsin(1 - t^\alpha)$	$(0, 1]$

Д. Фантазини

Плотность архимедовых копула-функций может быть вычислена по формуле:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

или, если генератор $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируем,

$$c_\varphi(u_1, u_2) = \frac{(\varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)])''}{(\varphi^{[-1]}[\varphi(u_1)])' (\varphi^{[-1]}[\varphi(u_2)])'}$$

Это означает, что, зная генератор $\varphi(\cdot)$, его обратную функцию $\varphi^{[-1]}(\cdot)$, ее первую и вторую производные, можно получить архимедову копула-функцию и ее плотность. Однако, за исключением некоторых простых случаев, плотности копула-функций оцениваются с использованием таких программ, как *Maple* или *Mathematica*.

3.2. Некоторые однопараметрические двумерные архимедовы копула-функции

Копула-функция Клейтона. Семейство копула-функций Клейтона было впервые предложено в работе (Clayton, 1978). Рассмотрим генератор $\varphi(t) = (t^{-\alpha} - 1) / \alpha$ с $\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. Тогда $\varphi^{-1}(t) = (1+t)^{-1/\alpha}$. Используя (7), получим:

$$C^{Clayton}(u_1, u_2; \alpha) = \max \left[(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, 0 \right].$$

Если $\alpha > 0$, то $\varphi(0) = \infty$ и вышеприведенное выражение для копула-функции примет вид:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha},$$

а плотность копула-функции Клейтона будет равна:

$$c(u_1, u_2) = (1 + \alpha)(u_1 u_2)^{-\alpha-1} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}-2}.$$

Отметим, что в отличие от случая $\alpha > 0$, при $-1 \leq \alpha < 0$ копула-функция Клейтона не является строгой, поскольку $\varphi(0) = 1/\alpha$. При $\alpha \rightarrow 0$ получим копула-функцию, отвечающую случаю независимости, а при $\alpha \rightarrow \infty$ — копула-функцию, соответствующую комонотонности. При $\alpha = -1$ получим нижнюю границу Фреше–Хёффдинга. Таким образом, копула-функция позволяет интерполировать промежуточные структуры зависимости между противомонотонностью, комонотонностью и независимостью.

Копула-функция Гумбеля. Семейство копула-функций Гумбеля было впервые представлено в работе (Gumbel, 1960), но поскольку подробный анализ этого семейства был приведен в работе (Hougaard, 1986), то его иногда называют семейством Гумбеля–Хоугарда. Генератор этого семейства имеет вид: $\varphi(t) = (-\ln t)^\alpha$, где $\alpha \geq 1$. Обратная функция генератора равна $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{1/\alpha})$. Таким образом, копула-функции из этого семейства имеют вид:

$$C(u_1, u_2; \alpha) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right]^{1/\alpha} \right\}$$

с функцией плотности:

$$c(u_1, u_2; \alpha) = C(u_1, u_2) \cdot u_1^{-1} u_2^{-1} \left[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right]^{-2+1/\alpha} \times \\ \times [\ln u_1 \ln u_2]^{\alpha-1} \cdot \left\{ \left[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha \right]^{-1/\alpha} + \alpha - 1 \right\}.$$

При $\alpha = 1$ получаем копула-функцию, соответствующую случаю независимости; а при $\alpha \rightarrow \infty$ копула-функция Гумбеля $C(u_1, u_2; \alpha)$ стремится к копула-функции, отвечающей комонотонности. Таким образом, копула-функция Гумбеля интерполирует структуру зависимости, промежуточную между независимостью и абсолютной положительной зависимостью.

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

Копула-функция Франка. Впервые копула-функция Франка была представлена в работе (Frank, 1979), а более подробный ее анализ проведен в работе (Genest, 1987). Эта копула-функция имеет генератор:

$$\varphi(t) = \ln\left(\frac{e^{-\alpha} - 1}{e^{-\alpha t} - 1}\right).$$

Обратная функция этого генератора равна:

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^t(e^{-\alpha} - 1)),$$

а сама копула-функция и ее плотность имеют вид:

$$C(u_1, u_2; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1) \cdot (e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right),$$

$$c(u_1, u_2; \alpha) = \frac{-\alpha[e^{-\alpha} - 1]e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{\{[e^{-\alpha u_1} - 1][e^{-\alpha u_2} - 1] + e^{-\alpha} - 1\}^2}$$

для $\alpha \neq 0$.

При $\alpha = 0$ копула-функция Франка имеет вид копула-функции, отвечающей случаю независимости; а при $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\alpha \rightarrow +\infty$ копула-функция Франка принимает вид, соответственно, нижней и верхней границ Фреше–Хёффдинга.

Для того чтобы продемонстрировать различия между копула-функциями Клейтона, Гумбеля и Франка, на рис. 6 они представлены графически. Видно, что изображенные копула-функции имеют различный характер поведения в окрестностях точек (0,0) и (1,1). Например, копула-функция Гумбеля в окрестности (1,1) демонстрирует резкий рост, тогда как рост в окрестности точки (0,0) менее резок. Как будет показано далее, хорошим измерителем характера хвостов этих копула-функций является коэффициент «хвостовой зависимости». Копула-функция Гумбеля имеет «верхнюю хвостовую зависимость», копула-функция Клейтона — «нижнюю хвостовую зависимость», а копула-функция Франка не имеет хвостовой зависимости.

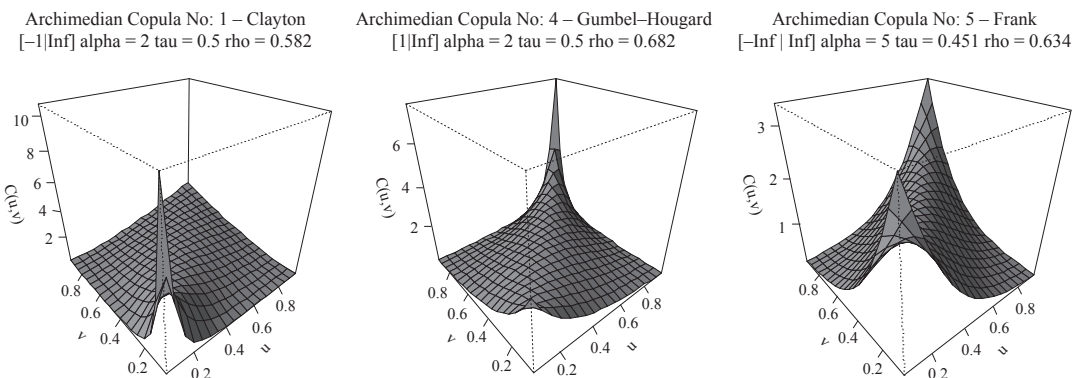


Рис. 6. Плотности копула-функций Клейтона, Гумбеля и Франка

3.3. Многомерные перестановочные архимедовы копула-функции

В работе (Nelsen, 2006) показано, что n -мерную копула-функцию для случая независимости можно записать в следующем виде:

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + (-\ln u_2) + \dots + (-\ln u_n)]).$$

Это наблюдение подсказывает возможность обобщения (7) на n -мерный случай:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n)]. \quad (7a)$$

Функции $C(\cdot)$ в (7a) называют *серийно-итеративными* функциями (Schweizer, Sklar, 1983), основанными на двумерной архимедовой копула-функции с генератором $\varphi(\cdot)$. Если положить $C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)]$, то для $n \geq 3$ получим следующее обобщение:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(C(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), u_n).$$

Двумерные архимедовы копула-функции обладают свойствами симметричности и ассоциативности (см. теорему 4.1.5 в (Nelsen, 2006)), а именно:

$$C(u, v) = C(v, u) \quad \forall u, v \in [0, 1] \quad (\text{симметричность}),$$

$$C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w)) \quad \forall u, v, w \in [0, 1] \quad (\text{ассоциативность}).$$

Копула-функции вида (7a) также известны как *перестановочные архимедовы копула-функции*: случайные величины X и Y называются *перестановочными*, если векторы (X, Y) и (Y, X) являются одинаково распределенными. В нашем случае перестановочность копула-функции эквивалентна ее симметричности (см. теорему 2.7.4 в (Nelsen, 2006)).

Для того чтобы $C(\cdot)$ была копула-функцией при $n \geq 3$, требуются некоторые дополнительные свойства функций $\varphi(\cdot)$ и $\varphi^{[-1]}(\cdot)$. Для этого понадобится следующее определение.

Определение 4. Неотрицательная функция $g(t)$ называется абсолютно монотонной на интервале J , если она непрерывна на этом интервале и имеет производные любого порядка, причем

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

для всех внутренних точек $t \in J$ и $k = 1, 2, \dots$.

Например, функция $g(t) = e^{-t}$, $t \in R$ является абсолютно монотонной, т.к. $g'(t) = -e^{-t}$, $g''(t) = e^{-t}$, ..., $g^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$, ...

Следует отметить, что если $g(t)$ абсолютно монотонна на $[0, \infty)$ и $g(c) = 0$ для некоторого $c > 0$, то $g(\cdot) \equiv 0$ на $[0, \infty)$. Более того, если псевдообратная функция $\varphi^{[-1]}(\cdot)$ генератора

архимедовой копула-функции $\varphi(\cdot)$ абсолютно монотонна, то на интервале $[0, \infty)$ функция $\varphi^{[-1]}(\cdot)$ положительна, функция $\varphi(\cdot)$ абсолютно монотонна и $\varphi^{[-1]}(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$.

Ниже приведем необходимое и достаточное условие, налагаемое на строгий генератор $\varphi(\cdot)$, для того чтобы функция (7а) была n -мерной копула-функцией при $n \geq 2$ (Kimberling, 1974).

Теорема 3. Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ — непрерывная и строго убывающая функция, такая, что $\varphi(0) = \infty$ и $\varphi(1) = 0$, а $\varphi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция для $\varphi(\cdot)$, $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ определяется соотношением (7а). Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы $C(\cdot)$ была n -мерной копула-функцией для всех $n \geq 2$, является требование абсолютной монотонности функции $\varphi^{-1}(\cdot)$ на $[0, \infty)$.

Доказательство. См. (Kimberling, 1974; Schweizer, Sklar, 1983; Alsina et al., 2005).

Однако требование абсолютной монотонности в вышеприведенном условии является весьма жестким, что приводит к ограничениям структуры зависимости. В работах (Genest, Rivest, 1993; Nelsen, 2005; Müller, Scarsini, 2005) было предложено заменить это условие более слабым, в котором для функции $\varphi(\cdot)$ требуется существование производных лишь до некоторого *конечного* порядка. Недавно в (McNeil, Nešlehová, 2009) представлено необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $\varphi(\cdot)$ обладала свойством n -монотонности (d -монотонности в терминах этой работы). Это условие показывает, что существуют n -мерные архимедовы копула-функции, не имеющие плотностей. Кроме того, из результатов работы следует существование точных нижних границ для множества всех n -мерных архимедовых копула-функций относительно так называемого конкордационного упорядочивания (для более детальной информации см. (McNeil, Nešlehová, 2009)).

Представленное выше многомерное обобщение архимедовых копула-функций является весьма ограничительным, поскольку в своей спецификации оно использует лишь один генератор, не зависящий от рассматриваемой размерности. Как следствие, все k -мерные частные распределения ($k < n$) имеют идентичный вид. Для того чтобы обеспечить большую гибкость, было предложено множество подходов, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

3.4. Вложенные архимедовы копула-функции

Построение полностью вложенных архимедовых копула-функций. Описание и исследование одного из обобщений для функций (7а) имеется в работах (Joe, 1997; Embrechts et al., 2003; Whelan, 2004; Savu, Tiede, 2009; McNeil, 2008). Структура такого обобщения для четырехмерного случая показана на рис. 7.

Узлы u_1 и u_2 связываются при помощи копула-функции $C_1(\cdot)$, узел u_3 связывается с $C_1(u_1, u_2)$ при помощи копула-функции $C_2(\cdot)$ и, наконец, узел u_4 связывается с $C_2(u_3, C_1(u_1, u_2))$ при помощи копула-функции $C_3(\cdot)$. Таким образом, четырехмерный случай требует трех двумерных копула-функций $C_1(\cdot)$, $C_2(\cdot)$ и $C_3(\cdot)$, генераторы которых равны $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ и $\varphi_3(\cdot)$ соответственно. Несмотря на то, что структура «связывания» довольно проста, ее выражение в виде аналитического уравнения является весьма непростой задачей:

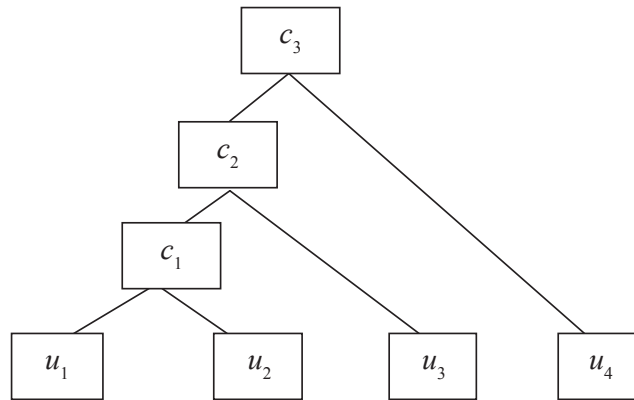


Рис. 7. Построение полностью вложенных архимедовых копула-функций

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_3(u_4, C_2(u_3, C_1(u_1, u_2))) = \\ = \varphi_3^{-1} \{ \varphi_3(u_4) + \varphi_3(\varphi_2^{-1} \{ \varphi_2(u_3) + \varphi_2(\varphi_1^{-1} \{ \varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2) \}) \}) \}.$$

Другими словами, пары (u_1, u_3) и (u_2, u_3) имеют одну и ту же копула-функцию $C_2(\cdot)$ с параметром зависимости α_2 , тогда как пары (u_1, u_4) , (u_2, u_4) и (u_3, u_4) имеют копула-функцию $C_3(\cdot)$ с параметром зависимости α_3 . В общем n -мерном случае:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{n-1}^{-1} (\varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2}^{-1} [\dots (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} [\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)] + \varphi_2(u_3)) \\ + \dots + \varphi_2(u_{n-1})] + \varphi_{n-1}(u_n)). \tag{8}$$

Эта копула-функция называется полностью вложенной архимедовой копула-функцией, поскольку получается путем пошагового увеличения размерности на единицу. Такая структура построения копула-функций является более общей, чем (7а). Кроме того, она обладает лишь частичной перестановочностью. Полностью вложенная архимедова копула-функция имеет $n(n-1)/2$ различных двумерных частных распределений, но только $n-1$ несовпадающих двумерных копула-функций со свободной спецификацией, остальные двумерные функции неявным образом определяются из структуры построения.

Выражение (8) будет n -мерной копула-функцией только тогда, когда, в дополнение к свойству абсолютной монотонности для обратных функций генераторов, «композиционная» функция $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1}$ будет иметь абсолютно монотонные первые производные для вложений всех уровней i .

Как оказывается, если все генераторы однотипны, степень зависимости, выражаемая параметром копула-функции, должна убывать с увеличением уровня вложения, т. е. $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1}$. Если же генераторы принадлежат разным семействам, то ограничения на параметры будут еще более жесткими, а список генераторов, которые могут быть связаны, не столь велик (более детальную информацию см., например, в (Whelan, 2004; Savu, Trede, 2009; McNeil, 2008)).

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

Построение частично вложенных архимедовых копула-функций. Построение частично вложенных архимедовых копула-функций — альтернативный способ обобщения многомерных копула-функций вида (7а). Эта структура связывания изначально была предложена в работе (Joe, 1997), а дальнейший подробный анализ представлен в (Whelan, 2004; McNeil et al., 2005; McNeil, 2008). Структура этого метода связывания представляет собой смесь структур, используемых при построении перестановочной и полностью вложенной копула-функций, и носит название *частично вложенной структуры*. Наименьшая размерность, для которой частично вложенная структура связывания дает копула-функции, равна четырем. Для нее:

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_3(C_1(u_1, u_2), C_2(u_3, u_4)) = \varphi_3^{-1}\{\varphi_3(\varphi_1^{-1}\{\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)\}) + \varphi_3(\varphi_2^{-1}\{\varphi_2(u_3) + \varphi_2(u_4)\})\}. \quad (9)$$

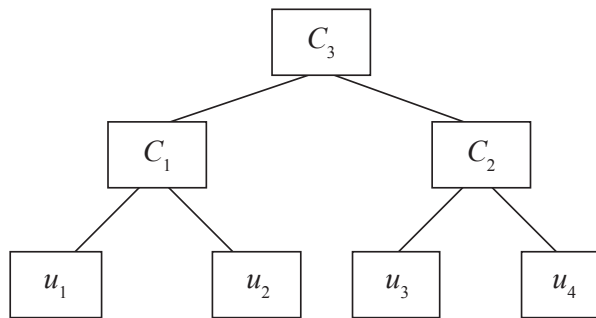


Рис. 8. Частично вложенные архимедовы копула-функции

Как и в предыдущих случаях, имеем громоздкие аналитические выражения, но весьма ясное описание: на первом шаге связываем пары (u_1, u_2) и (u_3, u_4) копула-функциями $C_1(\cdot)$ и $C_2(\cdot)$, генераторы которых равны φ_1 и φ_2 , соответственно. Эти две копула-функции связываются при помощи третьей копула-функции $C_3(\cdot)$. Случайные величины u_1 и u_2 являются перестановочными, так же, как u_3 и u_4 , но все другие пары перестановочными не являются. Однако пары (u_1, u_3) , (u_1, u_4) , (u_2, u_3) и (u_2, u_4) имеют копула-функцию $C_3(\cdot)$ (см. рис. 8). Для того чтобы получить n -мерную копула-функцию с использованием такого способа связывания, требуются ограничения, похожие на рассмотренные выше при построении полностью вложенных архимедовых копула-функций.

Общий случай: иерархически вложенные архимедовы копула-функции. Этот класс копула-функций впервые был предложен в работе (Joe, 1997), а в дальнейшем подробно изучался в (Whelan, 2004). В работе (Savu, Tiede, 2009) представлена первая попытка разработки иерархически вложенных архимедовых копула-функций в общем виде. Такая структура связывания является расширением структуры частичного вложения в том смысле, что участвующие в процедуре связывания копула-функции не обязательно двумерные.

Основная идея структуры связывания, предложенная в (Savu, Tiede, 2009), заключается в использовании иерархического вложения. При этом предполагается, что имеется L уровней, по n_l различных объектов на каждом уровне l (объектом может быть либо ко-

пула-функция, либо переменная). На уровне $l=1$ переменные u_1, \dots, u_n разбиваются на n_1 групп, в каждой из которых переменные связываются при помощи перестановочной архимедовой копула-функции. В свою очередь, на уровне $l=2$ эти копула-функции связываются при помощи n_2 копула-функций и т.д. Более формально, на уровне $l=1$ величины u_1, \dots, u_n связываются при помощи n_1 многомерных архимедовых копула-функций $C_{1,j}(\cdot)$, $j=1, \dots, n_1$, имеющих вид:

$$C_{1,j}(\mathbf{u}_{1,j}) = \varphi_{1,j}^{-1} \left(\sum_{\mathbf{u}_{1,j}} \varphi_{1,j}(\mathbf{u}_{1,j}) \right),$$

где $\varphi_{1,j}(\cdot)$ — генератор копула-функции $C_{1,j}(\cdot)$; $\mathbf{u}_{1,j}$ ($j=1, \dots, n_1$) — подмножество элементов u_1, \dots, u_n , связываемых при помощи $C_{1,j}(\cdot)$. Копула-функции $C_{1,1}(\cdot), \dots, C_{1,n_1}(\cdot)$ могут принадлежать разным семействам архимедовых копула-функций, таким как семейство Франка или Гумбеля. Копула-функции уровня $l=1$, в свою очередь, агрегируются при помощи копула-функций уровня $l=2$. В результате получаем n_2 обобщенных архимедовых копула-функций $C_{2,j}(\cdot)$, $j=1, \dots, n_2$, структура зависимости которых является частично перестановочной. Их компоненты — копула-функции предыдущего уровня. Более формально:

$$C_{2,j}(C_{2,j}) = \varphi_{2,j}^{-1} \left(\sum_{z \in C_{2,j}} \varphi_{2,j}(C_{z,j}) \right),$$

где $j=1, \dots, n_2$; $\varphi_{2,j}(\cdot)$ — генератор копула-функции $C_{2,j}(\cdot)$; $C_{2,j}$ — множество всех копула-функций уровня $l=1$, агрегируемых копула-функцией $C_{2,j}(\cdot)$. Далее продолжаем шаг за шагом до тех пор, пока не достигнем уровня L , на котором получим единственную иерархическую архимедову копула-функцию $C_{L,1}(\cdot)$.

В работе (Savu, Trede, 2009) используются несколько отличные от используемых в данной статье, но эквивалентные, обозначения: поскольку j -ая копула-функция l -го ($l=1, \dots, L$) уровня $C_{l,j}(\cdot)$ имеет в качестве аргументов $\mathbf{u}_{l,j}$, т.е. подмножество из u_1, \dots, u_n , элементы которого в качестве аргументов входят явным или неявным образом в $C_{l,j}(\cdot)$, или (что эквивалентно) аргументы $C_{l,j}(\cdot)$ (т.е. множество всех копула-функций уровня $l-1$, участвующих в $C_{l,j}(\cdot)$), то $C_{l,j}(C_{l,j})$ и $C_{l,j}(\mathbf{u}_{l,j})$ суть одно и то же.

Для того чтобы иметь хорошо определенную иерархию, число используемых на каждом уровне копула-функций должно убывать с увеличением уровня, т.е. $n_l < n_{l-1}$ для всех $l=2, \dots, L$, а на самом верхнем уровне должен использоваться лишь один агрегирующий объект $C_{L,1}(\cdot)$, т.е. $n_L = 1$. Кроме того, размерность используемых копула-функций на каждом следующем уровне должна увеличиваться. На самом верхнем уровне размерность $C_{L,1}(\cdot)$ равна размерности исходных данных n , т.е. $n_{L,1} = n$.

Пример 3. Четырехмерные частично вложенные архимедовы копула-функции, описанные в (9) (см. рис. 8), имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{2,1}(\mathbf{u}) &= C_{2,1}(u_1, u_2, u_3, u_4) = C_{2,1}(C_{1,1}(u_1, u_2), C_{1,2}(u_3, u_4)) = \\ &= \varphi_{2,1}^{-1} \left(\varphi_{2,1} \circ \varphi_{1,1}^{-1} [\varphi_{1,1}(u_1) + \varphi_{1,1}(u_2)] + \varphi_{2,1} \left(\varphi_{1,2}^{-1} [\varphi_{1,2}(u_3) + \varphi_{1,2}(u_4)] \right) \right). \end{aligned}$$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

Пример 4. Рассмотрим 9-мерную структуру, определяемую на рис. 9. Копула-функция для нее имеет вид:

$$C(u_1, \dots, u_9) = C_{4,1}(C_{3,1}(C_{2,1}(C_{1,1}(u_1, u_2), u_3, u_4), u_5, u_6), C_{2,2}(u_7, C_{1,2}(u_8, u_9))).$$

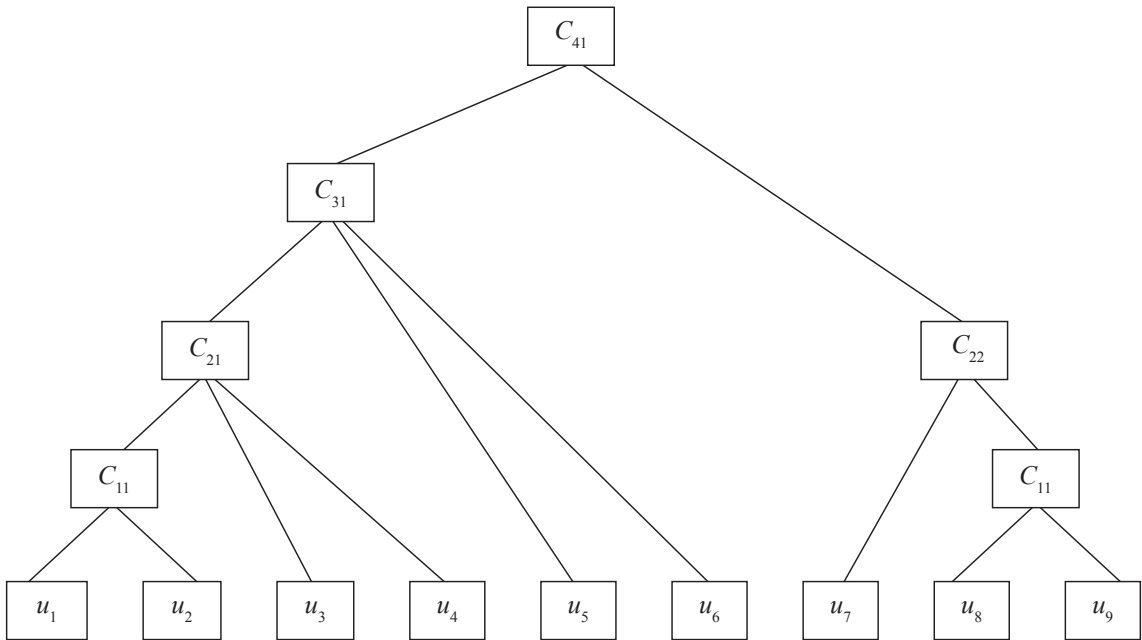


Рис. 9. Иерархически вложенная архимедова конструкция

В работе (Savu, Tiede, 2009) указаны некоторые условия для того, чтобы иерархическое вложение давало многомерную функцию распределения. Во-первых, требуется, чтобы все обратные функции генераторов $\varphi_{l,j}^{-1}(\cdot)$ были абсолютно монотонными. Во-вторых, для $l = 1, \dots, L$ и $j = 1, \dots, n_l$, $i = 1, \dots, n_{l+1}$ сложные функции $\varphi_{l+1,i}(\varphi_{l,j}^{-1}(\cdot))$ должны иметь абсолютно монотонные производные при всех $l = 1, 2, \dots, L$ и $j = 1, \dots, n_l$. В работе (Embrechts et al., 2003) показано, что в случае полного вложения копула-функций либо из семейства Гумбеля, либо семейства Клейтона степень зависимости, выраженная параметром α , должна убывать с увеличением уровня иерархических вложений. В примере 4 это означает, что $\alpha_{1,1} \geq \alpha_{2,1} \geq \alpha_{3,1} \geq \alpha_{4,1}$ и $\alpha_{1,2} \geq \alpha_{2,2} \geq \alpha_{4,1}$.

Если же агрегируемые копула-функции принадлежат разным семействам архимедовых копула-функций, то, как показано в (McNeil, 2008), две архимедовы копула-функции из двух различных семейств a и b могут быть иерархически вложены только в том случае, если производная «композиционной» функции $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$ является абсолютно монотонной. Вопрос о том, какие семейства копула-функций могут быть агрегированы, в некоторой степени рассмотрен в работе (Joe, 1997).

В силу достаточно сложной структуры иерархических копула-функций, их плотности задаются весьма непростыми выражениями. В (Savu, Tiede, 2009) используется рекурсивный подход для дифференцирования n -мерной копула-функции $C_{L,1}(\cdot)$ верхнего уровня по аргументам $\mathbf{u}_{L,1}$. А именно, в силу того, что

$$C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1}) = C_{L,1}(\mathbf{C}_{L,1}) = C_{L,1}(C_{L-1,1}, \dots, C_{L-1,n_{L-1}}) = C_{L,1}(C_{L-1,1}(\mathbf{C}_{L-1,1}), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(\mathbf{C}_{L-1,n_{L-1}})) = \\ = C_{L,1}(C_{L-1,1}(\mathbf{u}_{L-1,1}), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(\mathbf{u}_{L-1,n_{L-1}})),$$

плотность для $C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})$ может быть вычислена следующим образом:

$$c_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1}) = \frac{\partial^n C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \sum \frac{\partial^{n-i} C_{L,1}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial C_{L-1,1}^{k_1} \dots \partial C_{L-1,n_{L-1}}^{k_{n_{L-1}}}} \times \\ \times \prod_{r=1}^{n_{L-1}} \sum_{u=\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}} \frac{\partial^{|\sigma_1|} C_{L-1,r}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial \sigma_1} \dots \frac{\partial^{|\sigma_r|} C_{L-1,r}(\mathbf{u}_{L,1})}{\partial \sigma_r}, \tag{10}$$

где внешняя сумма берется по всем $k_1, \dots, k_{n_{L-1}} \in N \cup \{0\}$ таким, что $\max_j k_j \leq n_{L-1,j}$ и $\sum_{j=1}^{n_{L-1}} k_j = n - i$ для всех $i = 0, \dots, n - n_{L-1}$.

Вторая часть формулы включает в себя производные копула-функций уровня $L - 1$ с аргументами $\mathbf{u}_{L-1,j}$, $j = 1, \dots, n_{L-1}$. Суммирование во второй части производится по $r \in \{0, 1, \dots, n_{L-1}\}$ различным подмножествам $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ множества $\mathbf{u}_{L-1,r}$, а произведение берется по всем порядковым номерам копула-функций уровня $L - 1$.

Алгоритм нахождения плотности n -мерной копула-функции $C_{L,1}(\cdot)$ является рекурсивным: плотность для $C_{L,1}(\cdot)$ определяется через частные производные копула-функций $C_{L-1,1}(\cdot), \dots, C_{L-1,n_{L-1}}(\cdot)$, которые в свою очередь могут быть вычислены с использованием (10) для копула-функций, используемых на более низких уровнях. Рекурсивная процедура завершается на самом низком уровне, когда требуется найти частные производные (различных порядков) лишь стандартных архимедовых копула-функций.

В силу рекурсивной природы алгоритма нахождения плотности для $C_{L,1}(\cdot)$ количество вычислительных операций растет вместе с усложнением копула-функции. На практике для вычисления плотности иерархической n -мерной копула-функции приходится прибегать к компьютерным алгебраическим системам, таким как *Mathematica* или *R* (функция *D*). Нет необходимости упоминать про то, что время, необходимое для вычисления оценок максимального правдоподобия, растет вместе с ростом размерности n (более детально см. (Aas et al., 2009)).

Пример 5. Используя формулу (10), получим, что плотность четырехмерной иерархической архимедовой копула-функции, представленной на рис. 9, определяется соотношением:

$$\frac{\partial^4 C_{2,1}}{\partial u_1 \dots \partial u_4} = \frac{\partial^4 C_{2,1}}{\partial C_{1,1}^2 \partial C_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_4} + \frac{\partial^3 C_{2,1}}{\partial C_{1,1}^2 \partial C_{1,2}} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{1,1}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial u_3 \partial u_4} + \\ + \frac{\partial^3 C_{2,1}}{\partial C_{1,1} \partial C_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{1,2}}{\partial u_4} + \frac{\partial^2 C_{2,1}}{\partial C_{1,1} \partial C_{1,2}} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,1}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial u_3 \partial u_4}.$$

Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I

3.5. Моделирование наблюдений из архимедовых копула-функций

Прямое применение традиционных методов генерирования многомерных наблюдений, подчиняющихся заданному закону распределения, в принципе, возможно и к распределениям, описанным с помощью копула-функций, см. (Frees, Valdez, 1998; McNeil, 2008). К сожалению, эти методы оказываются чрезмерно трудоемкими в случае вложенных архимедовых копула-функций и многомерных перестановочных архимедовых копула-функций. Для последних моделирование наблюдений целесообразно проводить с использованием *метода условной инверсии*, который также можно использовать для любой копула-функции.

Если имеется копула-функция $C = C(u_1, \dots, u_n)$ (не обязательно архимедова), и необходимо сгенерировать наблюдения (u_1, \dots, u_n) n -мерного распределения случайного вектора (U_1, \dots, U_n) , копула-функция которого равна $C(\cdot)$, а частные распределения являются равномерными на отрезке $[0, 1]$, то можно воспользоваться *методом условного распределения*. Пусть $C_k(u_1, u_2, \dots, u_k) = C(u_1, u_2, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$, $k = 1, \dots, n$; при этом $C_1(u_1) = u_1$ и $C_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = C(u_1, \dots, u_n)$. Условное распределение U_k , $k = 2, \dots, n$ при заданных U_1, \dots, U_{k-1} равно:

$$C_k(u_k | u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) = \\ = C_k(u_1, u_2, \dots, u_k) / C_{k-1}(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}).$$

Приведем алгоритм моделирования:

- смоделировать n независимых равномерно распределенных случайных величин v_1, \dots, v_n ;
- положить $u_1 = v_1$;
- аналитически или с использованием численных методов найти обратные функции условных распределений $C_k(u_1, u_2, \dots, u_k)$ при $k = 2, \dots, n$.

Результатом этого алгоритма является вектор наблюдений (u_1, \dots, u_n) , смоделированный в соответствии с распределением $C(\cdot)$. Несмотря на то что моделирование с использованием условных распределений весьма элегантно, сама процедура может быть весьма трудоемкой с вычислительной точки зрения.

В случае архимедовых копула-функций, условное распределение U_k при заданных значениях U_1, \dots, U_{k-1} определяется теоремой 4.

Теорема 4. Пусть $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n))$ есть n -мерная архимедова копула-функция с генератором $\varphi(\cdot)$. Тогда для $k = 2, \dots, n$

$$C_k(u_k | u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) = \frac{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_k))}{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_{k-1}))}.$$

Доказательство. См. (Cherubini et al., 2004, с. 183).

В работе (Marshall, Olkin, 1988) предложен метод построения архимедовых копула-функций с использованием преобразования Лапласа и обратной к нему функции. Этот метод

особенно полезен, учитывая то, что каждое абсолютно монотонное отображение $[0, \infty]$ в $[0, 1]$ можно представить в терминах преобразования Лапласа и обратной к нему функции. Пусть $G(\cdot)$ — функция распределения на \mathbb{R}^+ такая, что $G(0) = 0$, а ее преобразование Лапласа–Стилтьеса определяется соотношением

$$\widehat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x), \quad t \geq 0.$$

Можно показать, что $\widehat{G}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ является непрерывной, абсолютно монотонной и строго убывающей функцией. Поэтому $\widehat{G}(\cdot)$ — хороший выбор для обратной функции генератора архимедовой копулы.

Как показано в работах (Frees, Valdez, 1998; Cherubini et al., 2004; McNeil et al., 2005), с использованием преобразования Лапласа–Стилтьеса можно предложить следующий алгоритм моделирования наблюдений из распределения, описанного многомерной архимедовой копула-функцией:

- смоделировать случайную величину V из распределения $G(\cdot)$ такого, что $\widehat{G}(\cdot)$ (преобразование Лапласа функции $G(\cdot)$) является обратной функцией генератора $\varphi(\cdot)$ копула-функции, из которой моделируются наблюдения. Например:

- для копула-функции Клейтона V имеет гамма-распределение $Ga(1/\alpha, 1)$, $\alpha > 0$, а $\widehat{G}(t) = (1+t)^{-1/\alpha}$; отметим, что $\widehat{G}^{-1} = (t^{-\alpha} - 1)$ отличается от генератора под номером 1 из табл. 2 лишь на константу;

- для копула-функции Гумбеля V имеет устойчивое распределение $St(1/\alpha, 1, \gamma, 0)$ с

$$\gamma = \cos^{\alpha}(\pi\alpha/2), \quad \alpha > 1 \text{ и } \widehat{G}(t) = \exp(-t^{1/\alpha});$$

- для копула-функции Франка V имеет дискретное распределение

$$P(V = k) = (1 - e^{-\alpha})^k / (k\alpha) \text{ при } k = 1, 2, \dots \text{ и } \alpha > 0.$$

- сгенерировать независимые одинаково распределенные случайные величины X_1, \dots, X_n .

- взять $u_i = \widehat{G}\left(-\frac{\ln X_i}{V}\right)$, $i = 1, \dots, n$.

Вектор $(u_1, \dots, u_n)^T$ смоделирован из n -мерной архимедовой копула-функции. Отметим, что для рассмотренных выше случаев алгоритм предполагает необходимость моделирования случайных величин из гамма-распределения, устойчивого распределения или дискретного распределения. Более подробную информацию см. в (Cherubini et al., 2004; Schoutens, 2003; McNeil et al., 2005; McNeil, 2008).

3.6. Эмпирические приложения в статистическом пакете R: архимедовы копула-функции

Для того чтобы вычислить значения функции распределения двумерной архимедовой копула-функции и ее плотности, необходимо воспользоваться некоторыми процедурами из модуля `fCopulae` в пакете R:

<i>fscopulae</i> функция	Описание
rarchmCopula	моделирование случайных величин из архимедовой копула-функции
parchmCopula	вычисление значения архимедовой копула-функции
darchmCopula	вычисление значения плотности архимедовой копула-функции
rarchmSlider	график наблюдений, смоделированных из архимедовой копула-функции
parchmSlider	график функции распределения
darchmSlider	график функции плотности
archmCopulaFit	оценка параметров архимедовой копула-функции

Например, для того чтобы смоделировать наблюдения из двумерной копула-функции Гумбеля, а затем по ним оценить параметры той же копула-функции, необходимо использовать код:

```
# Random Variates:
R = archmCopulaSim (n = 1000, alpha = 1, type = "4")
# Fit:
fit = archmCopulaFit (u = R [, 1], v = R [, 2], type = "4")
fit
```

Если же рассматривать многомерную перестановочную архимедову копула-функцию, то необходимо прибегнуть к использованию модуля *copula*. Ниже представлен пример кода для трехмерной перестановочной архимедовой копула-функции (для более детальной информации рекомендуем обратиться к руководству статистическим пакетом *R*), а результаты моделирования изображены на рис. 10.

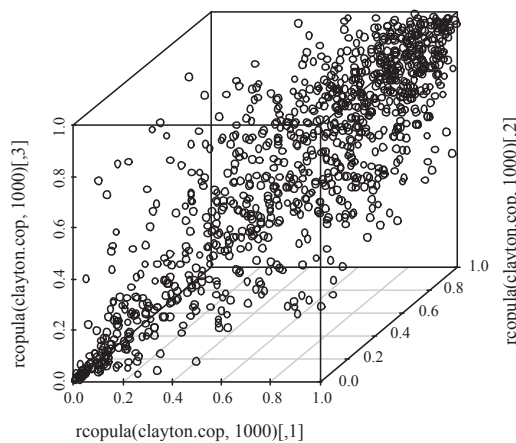


Рис. 10. График смоделированных наблюдений из трехмерной копула-функции Клейтона

```

library(copula)
#Some graphical examples
v <- rcopula(claytonCopula(2, dim = 3), 1000)
scatterplot3d(v)
frank.cop <- frankCopula(3)
persp(frank.cop, dcopula)
gumbel.cop <- archmCopula("gumbel", 5)
contour(gumbel.cop, dcopula)
# A 5-dim Frank copula
frank.cop <- frankCopula(3, dim = 5)

```

Для моделирования и оценки *четырёхмерной полностью вложенной архимедовой копулы* можно было бы обратиться к модулю «copula GOF» (недавно разработанному Дэниелем Бергом). Однако к моменту написания данной работы этот модуль находился в состоянии « β -версии» и не был общедоступным, т. е. он еще не был загружен в среду пакета R.

Список литературы

Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44 (2), 182–198.

Alsina M., Frank J., Schweizer B. (2005). Problems on associative functions. *Aequationes Mathematicae*, 66, 128–140.

Ang A., Chen J. (2002). Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63 (3), 443–494.

Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T. (2000). Copulas for finance a reading guide and some applications. Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, *Working Paper*.

Breymann W., Dias A., Embrechts P. (2003). Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance. *Quantitative Finance*, 3, 1–14.

Chen X., Fan Y., Patton A. (2004). Simple tests for models of dependence between multiple financial time series, with applications to U. S. equity returns and exchange rates. London Economics Financial Markets Group, *Working Paper n. 483*.

Cherubini U., Vecchiato W., Luciano E. (2004). *Copula methods in finance*. Wiley.

Clayton D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65, 141–151.

Daul S., De Giorgi E., Lindskog F., McNeil A. (2003). The grouped t-copula with an application to credit risk. *Risk*, 1, 73–76.

Demarta S., McNeil A. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73, 111–129.

Embrechts P., McNeil A. J., Straumann D. (1999). Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. *Working paper*, Department of Mathematik, ETHZ, Zurich. (Now in M. A. H. Dempster (ed.) (2002), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, 176–223. Cambridge: Cambridge University Press).

Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In: Rachev S. T. (ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Amsterdam: Elsevier/North-Holland.

- Erb C., Harvey C., Viskanta T. (1994). Forecasting international equity correlations. *Financial Analysts Journal*, 50, 32–45.
- Fang K., Kotz S., Ng K. (1987). *Symmetric multivariate and related distributions*. London: Chapman Hall.
- Fantazzini D. (2009a). A dynamic grouped T copula approach for market risk management. In: G. Gregoriou (ed.), *A VaR Implementation Handbook*, 253–282, McGraw-Hill: New York.
- Fantazzini D. (2009b). The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: A Monte Carlo study. *Computational Statistics and Data Analysis*, 53 (6), 2168–2188.
- Fantazzini D. (2010). Three-stage semi-parametric estimation of T-copulas: Asymptotics, finite-sample properties and computational aspects. *Computational Statistics and Data Analysis*, forthcoming.
- Fermanian J., Scaillet O. (2003). Nonparametric estimation of copulas for time series. *Journal of Risk*, 5, 25–54.
- Frank M. J. (1979). On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, 19, 194–226.
- Frees E. W., Valdez E. (1998). Understanding relationship using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2, 1–25.
- Genest C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. *Biometrika*, 74 (3), 549–555.
- Genest C., Favre A.-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12 (4), 347–368.
- Genest C., Rivest L. (1993). Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88, 1034–1043.
- Genest C., Ghoudi K., Rivest L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution. *Biometrika*, 82 (3), 543–552.
- Gumbel E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55, 698–707.
- Hoeffding D. (1940). Masstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität*, 5, 181–233.
- Hougaard P. (1986). A class of multivariate failure time distributions. *Biometrika*, 73, 671–678.
- Joe H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. London: Chapman Hall.
- Jondeau E., Rockinger M. (2003). Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1699–1737.
- Kimberling C. H. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae*, 10, 152–164.
- Lambert P., Vandenhende F. (2002). A copula-based model for multivariate non-normal longitudinal data: analysis of a dose titration safety study on a new antidepressant. *Statistics in Medicine*, 21, 3197–3217.
- Lindskog F., McNeil A., Schmoch (2002). A note on Kendall's tau for elliptical distributions. *ETH preprint*.
- Lindskog F. (2000). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Master Thesis*, ETH Zurich.
- Longin F., Solnik B. (2001). Extreme correlation of international equity markets. *Journal of Finance*, 56 (2), 649–676.
- Malevergne Y., Sornette D. (2006). *Extreme financial risks (From dependence to risk management)*. Springer: Heidelberg.
- Marshall A., Olkin I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 834–841.

- Marshall R., Zeevi A. (2002). Beyond correlation: Extreme co-movements between financial assets. Columbia University, *Working Paper*.
- McNeil A. (2008). Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78 (6), 567–581.
- McNeil A., Nešlehová J. (2009). Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and L1-norm symmetric distributions. *Annals of Statistics*, 37 (5), 3059–3097.
- McNeil A., Frey R., Embrechts P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. New Jersey: Princeton Series in Finance.
- Mills F. C. (1927). *The behaviour of prices*. New York: National Bureau of Economic Research.
- Müller A., Scarsini M. (2005). Archimedean copulae and positive dependence. *Journal of Multivariate Analysis*, 93, 434–445.
- Nelsen R. (1999). *An introduction to copulas*. Lecture Notes in Statistics. New York: Springer-Verlag.
- Nelsen R. B. (2005). Some properties of Schur-constant survival models and their copulas. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 19, 179–190.
- Nelsen R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Lecture Notes in Statistics, 2nd Edition. New York: Springer-Verlag.
- Patton A. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, 2 (1), 130–168.
- Patton A. (2006a). Estimation of copula models for time series of possibly different lengths. *Journal of Applied Econometrics*, 21, 147–173.
- Patton A. (2006b). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, 47 (2), 527–556.
- Salvadori G., De Michele C. (2007). On the use of copulas in hydrology: Theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12 (4), 369–380.
- Savu C., Trede M. (2009). Hierarchies of Archimedean copulas. *Quantitative Finance*, forthcoming.
- Schmidt R. (2002). Tail dependence for elliptically contoured distributions. *Mathematical Methods of Operations Research*, 55 (2), 301–327.
- Schoutens W. (2003). *Lévy processes in finance: Pricing financial derivatives*. Wiley.
- Schweizer B., Sklar A. (1983). *Probabilistic metric spaces*. New York: Elsevier.
- Schweizer B., Wolff E. F. (1976). Sur une mesure de dépendance pour les variables aléatoires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Ser. A*, 283, 659–661.
- Schweizer B., Wolff E. (1981). On non-parametric measures of dependence for random variables. *Annals of Statistics*, 9, 879–885.
- Sklar A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, 229–231.
- Sklar A. (1996). Random variables, distribution functions, and copulas: Personal look backward and forward. *Lecture notes. Monograph series*, 28, 1–14.
- Zhang L., Singh V. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11 (2), 150–164.
- Wang S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios: Model and algorithms. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, LXV, 848–893.
- Whelan N. (2004). Sampling from Archimedean copulas. *Quantitative Finance*, 4 (3), 339–352.