

Многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы и его применение в моделях финансовых рынков¹

Предложена модификация многомерного t -распределения с вектором степеней свободы: построено распределение с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы. Частным случаем данного распределения является известное многомерное скошенное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы. Рассмотрено применение построенного распределения в моделях БЕКК, используемых для изучения финансовых рынков.

Ключевые слова: многомерное t -распределение, скошенность, тяжелые хвосты, условная функция плотности.

JEL classification: C14, C16, C32.

1. Введение

В теоретических моделях, используемых при составлении финансовых портфелей, предполагается, что для имеющих на рынке активов инвестору известно условное совместное распределение их доходностей на текущий момент времени, и поэтому он может вычислять условное ожидание доходности портфеля. Но при составлении портфелей на практике это условное распределение неизвестно, и его нужно оценивать. В соответствующих эконометрических моделях, как правило, оценивают многомерную условную функцию плотности распределения вектора доходностей. В настоящее время все больший интерес представляет задача построения многомерной функции плотности, которая, во-первых, имела бы достаточно простую структуру для применения на практике, в частности, для реализации метода максимального правдоподобия, и во-вторых, соответствовала бы основным известным эмпирическим свойствам распределения финансовых доходностей.

Оценивание параметров многомерных моделей в финансовых приложениях довольно часто проводится методом максимального правдоподобия в предположении условной нормальности шоков. Однако модель с нормальным распределением не учитывает некоторые важные особенности эмпирического распределения доходностей. Во-первых, типичное одномерное распределение доходностей, как правило, отрицательно скошено, а во-вторых, имеет «тяжелые хвосты». Эти свойства эмпирического распределения доходностей широко обсуждаются в литературе, например, в работах (Alexander, 2001; Gouriéroux, 1997). Известны также и другие свойства эмпирических распределений финансовых доходностей, с которыми несовместимо теоретическое предположение о нормальности шоков.

Многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы зарекомендовало себя как полезное при моделировании условного распределения вектора доходностей.

¹ Автор выражает благодарность своему научному руководителю д-ру физ.-мат. наук А. С. Шведову за ценные обсуждения в ходе подготовки статьи.

Но у данного распределения имеется два существенных недостатка. Во-первых, «толщина» многомерных хвостов в данном распределении задается только одним скалярным параметром, что представляется недостаточным, поскольку толщина хвостов распределения доходностей для различных активов может быть разной в эмпирических приложениях. Во-вторых, многомерное t -распределение симметрично, а значит не способно учитывать отрицательную скошенность распределения доходностей, которая довольно часто наблюдается на практике.

В работе (Шведов, 2009) предложено обобщение многомерного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы на случай вектора степеней свободы (см. также (Шведов, 2010, 2011)). Таким обобщением решается проблема разной тяжести хвостов для различных активов, хотя остается проблема симметрии одномерных распределений. В разделе 5 данной статьи предложено другое обобщение t -распределения с вектором степеней свободы, с помощью которого решается проблема симметрии — строится так называемое многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы. Это распределение является обобщением многомерного скошенного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы, предложенного в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

Выбор формы распределения шоков существенен, в частности, при построении многомерных GARCH моделей. В работе (Bollerslev, 1987) для учета тяжелых хвостов распределения в одномерном случае было предложено использовать t -распределение для шоков в GARCH моделях, поскольку переменная волатильность с нормально распределенными шоками приводит к недостаточно тяжелым хвостам. По аналогии с одномерным случаем, для многомерных GARCH моделей в (Fiorentini et al., 2003) было предложено использовать многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы. При моделировании условного распределения финансовых доходностей t -распределение со скалярным параметром степеней свободы показывает высокое качество внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки. Так, в работе (Балаев, 2011) проводится эмпирическое сравнение данного распределения с некоторыми другими гибкими² многомерными распределениями и выясняется, что t -распределение является среди них наилучшим как внутри, так и вне выборки.

Данная статья построена следующим образом. В разделе 2 приведен небольшой обзор многомерных распределений, рассматриваемых в эмпирических финансах. В разделе 3 проведен вспомогательный анализ одномерного t -распределения с тремя параметрами. Раздел 4 посвящен способам построения многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. В разделе 5 строится скошенное многомерное t -распределение с вектором степеней свободы. В разделе 6 рассмотрено применение построенного распределения в моделях BEKK. Наконец, в заключительном разделе 7 обсуждаются возможные направления дальнейшей работы.

2. Некоторые многомерные распределения, используемые для моделирования шоков

Прежде чем перейти к рассмотрению различных вариаций t -распределения, кратко остановимся на некоторых других многомерных распределениях, используемых в финансовой эконометрике. В литературе, посвященной моделированию финансовых доходностей,

² Гибким будем называть распределение, параметризация которого позволяет полноценно учесть основные эмпирические особенности распределения доходностей при оценке соответствующей модели.

предлагается множество многомерных распределений. Как правило, стараются построить распределение, которое, с одной стороны, полноценно учитывает эмпирические особенности динамики финансовых доходностей, а с другой стороны, имеет достаточно простую структуру для применения метода максимального правдоподобия при оценке соответствующей модели.

Одномерное распределение случайной величины будем называть *отрицательно (положительно) скошенным*, если его третий центральный момент отрицателен (положителен). Данное определение скошенности не является единственно возможным (например, ее можно определить как несовпадение медианы и среднего значения). Тем не менее такое определение наиболее удобно — оно позволяет сформулировать один из основных эмпирических фактов достаточно просто: одномерное распределение доходностей имеет отрицательную скошенность. Кроме того, это определение соответствует типичному пониманию скошенности в литературе по данному предмету.

Поскольку одномерное распределение доходностей какого-либо актива, как правило, отрицательно скошено, совместное распределение доходностей нескольких активов нужно строить таким образом, чтобы при некоторых значениях его параметров возникала скошенность по всем компонентам случайного вектора. Распределение, удовлетворяющее этому требованию, будем называть *многомерным скошенным* распределением. Подчеркнем, что возможность (при некоторых значениях параметров) наличия скошенности *по всем компонентам* существенна. Если в распределении, в силу его особенностей, возможна скошенность только по одной или нескольким (но не всем одновременно) компонентам вектора, то его можно использовать на практике только в узком кругу ситуаций, когда доходность одного или нескольких активов имеет распределение с нулевой скошенностью. Но практическая ценность таких распределений невелика.

Достаточно широкий класс скошенных эллиптических функций плотности предложен в работе (Branco, Dey, 2001). Данный класс функций плотности был получен на основе обобщения многомерного скошенного нормального распределения, введенного в (Azzalini, Dalla Valle, 1996).

В статье (Fernandez et al., 1995) предложен класс многомерных непрерывных распределений, известных как *v -сферические*. Такие распределения имеют существенное ограничение для применения в финансовых моделях, поскольку скошенность вдоль каждой оси координат предполагается одинаковой.

Скошенность и тяжелые хвосты способны учитывать также и многомерные устойчивые распределения (см., например, (Samorodinsky, Taqqu, 1994)). Однако функцию плотности этих распределений, как правило, нельзя записать в аналитическом виде, и для них известна лишь характеристическая функция, что значительно затрудняет оценивание методом максимального правдоподобия.

Широкий класс многомерных распределений представляют поли *t -распределения*. Этому классу принадлежит и многомерное *t -распределение* со скалярным параметром степеней свободы. Поли *t -распределения* получаются как апостериорные распределения в байесовском анализе, см., например, (Dreze, 1978), и допускают скошенность, тяжелые хвосты, а также могут иметь несколько модальных точек. При этом соотношение параметров и моментов данных распределений достаточно сложно. Это приводит к тому, что оценивание параметров поли *t -распределений*, даже для выборки из независимых одинаково распределенных случайных величин, на практике затруднено.

Многомерные скошенные распределения могут строиться на основе уже известных одномерных скошенных распределений. Так, в работе (Ferreira, Steel, 2003) многомерные скошенные распределения строятся путем линейного преобразования случайного вектора, компоненты которого независимы и имеют широко известные одномерные скошенные распределения.

Скошенные распределения также могут быть построены как смеси конечного числа симметричных распределений, у которых различаются вектора средних значений (в данном случае под симметричностью распределения понимается симметричность относительно произвольной точки). Например, в работе (Vlaar, Palm, 1993) для моделирования шоков используется смесь двух многомерных нормальных распределений. Недостатком смесей распределений, хотя они и получили достаточно широкое распространение, является большое количество параметров.

В работах (Jones, 2001, 2002) рассматриваются многомерные плотности, получившие название многомерных функций плотности Джонса. Эти функции плотности предполагают только положительную ковариацию между компонентами случайного вектора, и поэтому не всегда применимы при моделировании финансовых доходностей.

Известна также функция плотности Эджворта–Саргана, которая получается урезанием многомерного разложения Грамма–Шарлье после третьего члена. В работе (Mauleon, Perote, 1999) показано, что данная функция плотности дает хорошие результаты при моделировании распределения шоков в двумерных GARCH моделях.

Среди множества многомерных распределений t -распределение представляется одним из наиболее простых с точки зрения процедуры максимизации функции правдоподобия. Кроме того, как уже упоминалось, многомерное t -распределение дает достаточно хорошие эмпирические результаты по сравнению с другими гибкими распределениями. Например, в (Балаев, 2011) показано, что многомерное скошенное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы по качеству вневыборочных прогнозов превосходит многомерное скошенное нормальное распределение, многомерное скошенное распределение GED и распределение, основанное на многомерном разложении Грамма–Шарлье.

3. Одномерное t -распределение с тремя параметрами

В данном разделе рассматривается одномерное t -распределение с тремя параметрами и два способа его построения. Анализ одномерного случая полезен для понимания возможных путей построения многомерного t -распределения с вектором степеней свободы, которое будет рассмотрено в следующем разделе.

Стандартное одномерное t -распределение является частным случаем более общего t -распределения с тремя параметрами, в которые наряду со степенями свободы включаются также параметры математического ожидания и масштаба. Существуют различные определения (параметризации) t -распределения с тремя параметрами. Будем следовать определению, приведенному в книге (Bernardo, Smith, 2000). В соответствии с ним случайная величина X имеет t -распределение с математическим ожиданием $m \in \mathbb{R}$, масштабом $\lambda > 0$ и числом степеней свободы $a > 0$, если функция плотности распределения X имеет вид

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \left(\frac{\lambda}{a\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda(x-m)^2}{a}\right)^{-\left(\frac{a+1}{2}\right)}. \quad (1)$$

Для данного распределения имеем $E(X) = m$ для $a > 1$ и $\text{Var}(X) = \frac{a}{\lambda(a-2)}$ для $a > 2$.

Рассмотрим два способа построения такого t -распределения с тремя параметрами.

Пусть случайная величина S , принимающая положительные значения, имеет гамма-распределение с параметрами $a > 0$ и $A > 0$, т. е. функция плотности распределения S равна

$$f_S(s) = \frac{A^a}{\Gamma(a)} s^{a-1} \exp(-As).$$

Далее, пусть при заданном значении $S = s$ случайная величина X распределена нормально со средним m и дисперсией $1/\lambda s$, где $\lambda > 0$. В этом случае говорят, что случайная величина X распределена нормально с неизвестной точностью λS . Условная функция плотности распределения X имеет вид

$$f_{X|S}(x|s) = \left(\frac{\lambda s}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda s(x-m)^2}{2}\right).$$

При данных предположениях совместное распределение случайных величин X и S называется *нормальным-гамма распределением* с параметрами $m \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $a > 0$, $A > 0$ и имеет функцию плотности

$$h(x, s) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A^a}{\Gamma(a)} s^{a-\frac{1}{2}} \exp\left(-\left(\frac{\lambda(x-m)^2}{2} + A\right)s\right).$$

Первый способ построения t -распределения с тремя параметрами возникает в рамках байесовского анализа. Пусть X и S имеют совместное нормальное-гамма распределение с параметрами $m \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $a > 0$, $A > 0$. Далее, пусть при заданных значениях $X = x$ и $S = s$ случайная величина Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием x и дисперсией $1/s$, т. е. Y распределен нормально с неизвестными математическим ожиданием и точностью и имеет условную функцию плотности распределения

$$f_{Y|X,S}(y|x,s) = \left(\frac{s}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{s(y-x)^2}{2}\right).$$

Введем обозначения $z = \frac{y + \lambda m}{1 + \lambda}$ и $t = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{1 + \lambda} (y - m)^2 + A\right)s$. Тогда для частной функции плотности распределения Y имеем

$$\begin{aligned}
 q(y) &= \int_x \int_{s>0} f_{Y|X,S}(y|x,s) h(x,s) ds dx = \int_{s>0} \int_x \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} s^a \times \\
 &\times \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda s(x-m)^2 - \frac{1}{2}s(y-x)^2 - As\right) dx ds = \int_{s>0} \int_x \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{s(1+\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}} s^a \times \\
 &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} s(y-m)^2 - As\right) \left(\frac{s(1+\lambda)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)s(x-z)^2\right) dx ds.
 \end{aligned}$$

Поскольку для любых z и s выполнено

$$\int_x \left(\frac{s(1+\lambda)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(1+\lambda)s(x-z)^2\right) dx = 1,$$

то имеем

$$\begin{aligned}
 q(y) &= \int_{s>0} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} s^{a-\frac{1}{2}} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} (y-m)^2 + A\right)s\right) ds = \\
 &= \int_{t>0} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{\lambda}{2\pi(1+\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} (y-m)^2 + A\right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)} t^{a+\frac{1}{2}-1} \exp(-t) dt = \\
 &= \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)} \left(\frac{\lambda}{2\pi A(1+\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda(y-m)^2}{2A(1+\lambda)}\right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с определением (1), частное распределение Y является t -распределением с параметрами $m, \frac{a\lambda}{A(1+\lambda)}, 2a$.

Второй способ построения t -распределения с тремя параметрами не требует предположений о распределении некоторой третьей случайной величины Y . Пусть, как и прежде, X и S имеют совместное нормальное-гамма распределение с параметрами $m \in \mathbb{R}, \lambda > 0, a > 0, A > 0$. Введем обозначение $t = \left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)s$. Тогда частная функция плотности распределения случайной величины X может быть найдена следующим образом

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_{s>0} h(x,s) ds = \int_{s>0} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)s\right)^{a+\frac{1}{2}-1} \times \\
 &\times \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)s\right) \left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)} d\left(\left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)s\right) = \\
 &= \int_{t>0} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2}\lambda(x-m)^2 + A\right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)} t^{a+\frac{1}{2}-1} \exp(-t) dt =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{A^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2} \cdot \lambda(x-m)^2 + A \right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)} \left(\frac{\lambda}{2\pi A} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda(x-m)^2}{2A} \right)^{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}. \quad (3)$$

Получаем, что частное распределение X является t -распределением с параметрами $m, \frac{a\lambda}{A}, 2a$ в соответствии с определением (1).

Таким образом, в предположении о совместном нормальном-гамма распределении случайных величин X и S , t -распределение с тремя параметрами можно описать как частное распределение X и как частное распределение третьей случайной величины Y , имеющей условное нормальное распределение с математическим ожиданием X и точностью S .

Полагая $m=0$, $a=A=\frac{\nu}{2}$ и $\lambda=+\infty$ в (2) или $\lambda=1$ в (3), получаем функцию плотности стандартного t -распределения с числом степеней свободы ν . Данный способ построения стандартного t -распределения альтернативен заданию его как $X = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$, где Z имеет стандартное нормальное распределение, Y имеет распределение хи-квадрат с ν степенями свободы, а Z и Y независимы.

4. Многомерное t -распределение с вектором степеней свободы

В данном разделе рассматривается многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, предложенное в работе (Шведов, 2009). Это распределение представляет собой обобщение стандартного многомерного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы.

Примем некоторые обозначения. Для $d \times d$ матрицы $C = \{c_{ij}, 1 \leq i, j \leq d\}$ введем обозначения для подматриц $C^{[k]} = \{c_{ij}, 1 \leq i, j \leq k\}$ и $C_{[k]} = \{c_{ij}, d-k+1 \leq i, j \leq d\}$, где $k=1, \dots, d$. Через $c^{[k]}$, где $k=1, \dots, d$, обозначим вектор, состоящий из первых k компонент d -мерного вектора c .

В дальнейшем всюду будем предполагать, что для вектора $a = (a_1, \dots, a_d)'$ (штрих означает транспонирование) выполнено условие $a_j > \frac{j-1}{2}$, $j=1, \dots, d$. Множество векторов a , удовлетворяющих этому условию, обозначим через Λ . Дополнительно обозначим $a_0 = 0$ и $a_{d+1} = \frac{d+1}{2}$. Пусть также $b_0 = 0$, $b_j = a_j + \frac{1}{2}$ для $j=1, \dots, d$ и $b_{d+1} = \frac{d+1}{2}$. Кроме того, далее везде предполагается, что $A \in \mathbb{R}_+^{d \times d}$, т.е. матрица A положительно определена.

Обозначим

$$\Gamma_d^*(a) = \pi^{d(d-1)/4} \prod_{j=1}^d \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right), \quad \gamma_{a,A} = \left(\Gamma_d^*(a) \prod_{j=0}^{d-1} |A^{[d-j]}|^{a_j - a_{j+1}} \right)^{-1},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Приведем необходимый в дальнейшем вспомогательный результат.

Через S_+ обозначим такую область точек $s = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1d}, s_{22}, \dots, s_{2d}, \dots, s_{dd}) \in \mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$, где симметричная матрица $\{s_{ij}, 1 \leq i, j \leq d\}$, где $s_{ij} = s_{ji}$ при $i > j$ является положительно определенной. В работе (Bellman, 1956) устанавливается, что в области S_+ функция

$f_G(s) = \gamma_{a,A} \exp(\text{tr}(-As)) \prod_{j=1}^d |s_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}}$ положительно и выполнено равенство

$$\int_{S_+} f_G(s) ds = 1, \quad (4)$$

где $ds = ds_{11} ds_{12} \dots ds_{1d} ds_{22} \dots ds_{2d} \dots ds_{dd}$. Таким образом, $f_G(s)$ является функцией плотности, которая задает распределение положительно определенной случайной матрицы, называемое *матричным гамма-распределением* с параметрами a и A .

Обобщение одномерного нормального-гамма распределения на многомерный случай приводит к так называемому *многомерному нормальному-гамма распределению* с параметрами $m \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0, a \in \Lambda, A \in \mathbb{R}_+^{d \times d}$, которое задается функцией плотности

$$h(x, s) = (2\pi)^{-d/2} |\lambda s|^{1/2} \exp\left(\text{tr}\left(-\frac{1}{2} \lambda (x - m)(x - m)' s\right)\right) \gamma_{a,A} \exp(\text{tr}(-As)) \prod_{j=1}^d |s_{[j]}|^{a_j - a_{j+1}},$$

где $x \in \mathbb{R}^d, s \in S_+$.

В предыдущем разделе были рассмотрены два способа построения одномерного t -распределения с тремя параметрами на основе одномерного нормального-гамма распределения. В многомерном случае этим процедурам соответствуют два способа построения многомерного t -распределения с вектором степеней свободы.

Первый способ, как и в одномерном случае, возникает в рамках байесовского анализа. Пусть совместное распределение случайного вектора X и случайной положительно определенной матрицы S является многомерным нормальным-гамма распределением с параметрами $m \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0, a \in \Lambda, A \in \mathbb{R}_+^{d \times d}$. Далее, пусть случайный вектор Y при условиях $X = x$ и $S = s$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних значений x и ковариационной матрицей s^{-1} , т. е. его условная функция плотности имеет вид

$$f(y | x, s) = (2\pi)^{-d/2} |s|^{1/2} \exp\left(\text{tr}\left(-\frac{1}{2} (y - x)(y - x)' s\right)\right).$$

В работе (Шведов, 2009) доказано, что при данных предпосылках функция

$$f_Y(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{s > 0} f(y | x, s) h(x, s) ds dx,$$

т. е. частная функция плотности распределения вектора Y , имеет следующий вид

$$f_Y(y) = (2\pi)^{-d/2} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{d/2} |A|^{-1/2} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{1+\lambda} (y-m)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (y-m)^{[d-j]}\right)^{b_j - b_{j+1}}. \quad (5)$$

Распределение, соответствующее данной функции плотности, и называется *многомерным t -распределением с вектором степеней свободы*. Степени свободы задаются вектором a с ограничениями $a_j > \frac{j-1}{2}$, $j=1, \dots, d$. Можно заметить, что в случае $d=1$ данное распределение сводится к одномерному t -распределению с параметрами m , $\frac{a\lambda}{A(1+\lambda)}$, $2a$, рассмотренному в предыдущем разделе.

Как и в одномерном случае, существует альтернативный способ построения данного распределения. Пусть, как и ранее, вектор X и положительно определенная матрица S имеют совместное многомерное нормальное-гамма распределение с параметрами $m \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $a \in \Lambda$, $A \in \mathbb{R}_+^{d \times d}$. Тогда, как показано в работе (Шведов, 2011), частная функция плотности распределения случайного вектора X имеет вид

$$f_X(x) = \int_{s>0} h(x, s) ds = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda (x-m)^{[d-j]'} (A^{[d-j]})^{-1} (x-m)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}}. \quad (6)$$

Таким образом, частное распределение случайного вектора X также является многомерным t -распределением с вектором степеней свободы. В случае $d=1$ данное распределение сводится к одномерному t -распределению с параметрами m , $\frac{a\lambda}{A}$, $2a$, также рассмотренному в предыдущем разделе.

Отметим, что в формулах (5) и (6) параметр λ излишен и может быть внесен в матрицу A . Полагая $m=0$, $\Sigma = \frac{2}{\nu} A$, $b_1 = \dots = b_d = \frac{\nu+d}{2}$, где $\nu \in \mathbb{N}$, и $\lambda = +\infty$ в (5) или $\lambda = 1$ в (6), получаем следующую функцию плотности

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{(\pi\nu)^{d/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} |\Sigma|^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{\nu} x' \Sigma^{-1} x \right)^{-\frac{\nu+d}{2}},$$

которая соответствует известному многомерному t -распределению с числом степеней свободы ν и ковариационной матрицей $\frac{\nu}{\nu-2} \Sigma$ для $\nu > 2$.

5. Введение скошенности в многомерное t -распределение

Как уже упоминалось, одномерные распределения финансовых доходностей, как правило, имеют отрицательную скошенность, и это обстоятельство необходимо учитывать при подборе формы для многомерной функции плотности.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)'$ и $m = (m_1, \dots, m_d)'$. В выражении (6) положим $x_i = m_i$ для $i \neq j$, $i=1, \dots, d$, $j=1, \dots, d$. Тогда очевидно, что получившаяся функция плотности будет симметрична по x_j относительно m_j , т.е. распределение компоненты X_j при условии $X_i = m_i$, $i \neq j$ симметрично вокруг m_j , и, в частности, не имеет отрицательной скошенности. Следовательно, для использования многомерного t -распределения с вектором степеней свободы

в моделировании финансовых доходностей его желательно модифицировать так, чтобы оно допускало скошенность. В этом разделе приводится одна из возможных модификаций на основе процедуры введения скошенности в симметричное многомерное распределение, предложенной в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

Для 2^d ортантов пространства $\mathbb{R}^d$ введем обозначения $O_1, \dots, O_{2^d}$ (порядок нумерации не имеет значения), и для каждого ортанта O_α определим следующие величины $\pi_1^\alpha, \dots, \pi_d^\alpha$:

$$\pi_i^\alpha = \begin{cases} -1, & \text{если } O_\alpha \text{ соответствует } x_i \geq 0, \\ 1, & \text{если } O_\alpha \text{ соответствует } x_i < 0. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — заданная на $\mathbb{R}^d$ функция плотности некоторого d -мерного распределения, которое порождает симметричные (вокруг нуля) одномерные условные распределения. Далее, пусть $f(x)$ такова, что для любых α и β выполнено

$$\int_{O_\alpha} f(x) dx = \int_{O_\beta} f(x) dx = 2^{-d}, \quad (7)$$

т. е. вероятностная масса каждого из ортантов одинакова. Введем вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)'$ параметров скошенности вдоль каждой оси, где $\xi_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. На основе функции $f(x)$ и вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)'$ предложенная в (Bauwens, Laurent, 2005) процедура строит функцию $f^s(x|\xi)$ плотности многомерного скошенного распределения. Эта процедура представляет собой следующее преобразование исходной функции плотности

$$f^s(x|\xi) = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) f(x^*), \quad (8)$$

где

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_d^*)', \quad x_i^* = x_i \xi_i^{I_i(x)}, \quad i = 1, \dots, d, \quad I_i(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \geq 0, \\ 1, & \text{если } x_i < 0. \end{cases}$$

Тот факт, что полученная функция $f^s(x|\xi)$ является функцией плотности, может быть с использованием предположения (7) установлен непосредственно:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f^s(x|\xi) dx &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \int_{\mathbb{R}^d} f(x^*) dx = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \int_{O_\alpha} f(x^*) dx = \\ &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \int_{O_\alpha} \left(\prod_{i=1}^d \xi_i^{-I_i(x)} \right) f(x^*) dx^* = 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \left(\xi_1^{\pi_1^\alpha} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha} \int_{O_\alpha} f(x^*) dx^* \right) = \\ &= 2^d \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \right) \sum_{\alpha=1}^{2^d} \xi_1^{\pi_1^\alpha} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha} \frac{1}{2^d} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{2^d} \xi_1^{\pi_1^\alpha + 1} \dots \xi_d^{\pi_d^\alpha + 1}}{\prod_{i=1}^d (1 + \xi_i^2)} = 1. \end{aligned}$$

В работе (Bauwens, Laurent, 2005) используется более сильное предположение о так называемой M -симметрии распределения, согласно которому для любой $d \times d$ диагональной матрицы Q , каждый элемент диагонали которой равен 1 или -1 , и любого x выполнено $f(Qx) = f(x)$. С точки зрения приложений вопрос о том, пользоваться ли предположением M -симметрии или предположением (7), несущественен.

Преобразование (8), очевидно, состоит в различном масштабировании положительных и отрицательных значений каждой из компонент вектора X . Случай $\xi_i > 1$ соответствует положительной скошенности по компоненте X_i , а случай $\xi_i < 1$ — отрицательной.

Преимуществом данной процедуры является простота реализации на практике при использовании метода максимального правдоподобия и применимость к широкому классу распределений: она позволяет ввести скошенность в любое многомерное распределение с непрерывной функцией плотности, удовлетворяющее условию (7). Отметим, что преобразованная функция плотности $f^s(x|\xi)$ не является дифференцируемой в точке $x = 0$, хотя и является в ней непрерывной, если исходная функция $f(x)$ непрерывна в $x = 0$. При этом, если функция $f(x)$ дифференцируема по своим параметрам, то функция правдоподобия, соответствующая $f^s(x|\xi)$, также дифференцируема по параметрам и может быть максимизирована градиентными методами, что важно на практике.

В работе (Bauwens, Laurent, 2005) преобразование (8) применяется к стандартизованному (со скалярной ковариационной матрицей) многомерному t -распределению со скалярным параметром степеней свободы. Полученное распределение авторы называют стандартизованным многомерным скошенным t -распределением и используют его для моделирования динамики шоков в многомерных GARCH моделях. В (Bauwens, Laurent, 2005) эмпирически устанавливается, что при введении скошенности с помощью преобразования (8) в многомерное t -распределение со скалярным параметром степеней свободы у соответствующей GARCH модели улучшается предсказательная способность вне выборки.

При произвольной положительно определенной матрице A для функции плотности (5) или (6) может быть нарушено условие (7). Поэтому, прежде чем применить преобразование (8), внесем в матрицу A параметр λ , и будем предполагать, что $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$, где $A_i > 0$, $i = 1, \dots, d$. Матрица A частично определяет ковариационную матрицу вектора X . В финансовых приложениях динамика условной ковариационной матрицы, как правило, моделируется отдельно от эффектов скошенности и тяжелых хвостов. Поэтому ограничение $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$ не означает, что все условные ковариации между компонентами вектора доходностей равны нулю.

При сделанных предположениях применим преобразование (8) к функции плотности (6). Полученная функция плотности, допускающая скошенность по каждой компоненте вектора X , имеет вид

$$f_X^s(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} |A|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2} \left(1 + \frac{1}{2} x^{*[d-i+1]'} (A^{[d-i+1]})^{-1} x^{*[d-i+1]}\right)^{b_{i-1} - b_i}, \quad (9)$$

где $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$ и

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_d^*)'; \quad x_i^* = (x_i - m_i) \xi_i^{I_i(x)}, \quad i = 1, \dots, d; \quad I_i(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \geq m_i, \\ 1, & \text{если } x_i < m_i. \end{cases}$$

Распределение, отвечающее функции плотности (9), будем называть *многомерным скошенным t -распределением с вектором степеней свободы*. Это распределение задается вектором расположения $m \in \mathbb{R}^d$, диагональной положительно определенной матрицей A , вектором направлений скошенности ξ с положительными компонентами и вектором степеней свободы $a \in \Lambda$.

Положив в формуле (9) $b_1 = \dots = b_d = \frac{\nu + d}{2}$ и $A = I_d$, получим функцию плотности стандартизованного многомерного скошенного t -распределения со скалярным параметром степеней свободы

$$g_X^s(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\prod_{i=1}^d \frac{\xi_i}{1 + \xi_i^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} x^* x\right)^{-\frac{\nu + d}{2}}.$$

Такая функция плотности в несколько иной параметризации рассмотрена в работе (Bauwens, Laurent, 2005).

В таблице 1 приведены описательные статистики рядов дневных логарифмических доходностей некоторых известных мировых фондовых индексов. Использованы докризисные данные за период с ноября 1990 г. по август 2008 г., взятые из базы данных *Yahoo! Finance*. Доходности рассчитываются по формуле $r_t = 100 \cdot \ln(S_t / S_{t-1})$, где S_t — значение фондового индекса в момент t .

Таблица 1. Описательные статистики рядов логарифмических доходностей

	SP500	FTSE100	CAC40	DAX	HANGSENG	NIKKEI225
Среднее	0.035	0.024	0.026	0.038	0.050	-0.015
Стандартное отклонение	1.059	1.096	1.388	1.473	1.715	1.499
Коэффициент асимметрии	-0.059	-0.099	-0.061	-0.217	-0.180	-0.007
Экссесс	6.328	6.636	6.081	7.725	12.629	5.643

Таблица показывает, что некоторые фондовые индексы существенно различаются по показателю толщины хвостов распределения доходностей (экссессу) и степени скошенности (коэффициенту асимметрии). Например, большие различия по обоим показателям наблюдаются между индексами Hang-Seng (Китай) и Nikkei 225 (Япония). Следовательно, при моделировании совместного распределения доходностей данных индексов желательно использовать распределение, допускающее различную меру скошенности и толщины хвостов для различных индексов. Именно таким и является многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы.

На рисунках 1–6 приведены линии уровня двумерной функции плотности (9) с положительной ковариацией между доходностями (плотность распределения вектора X , умноженного на $H^{1/2}$, где H — ковариационная матрица 2×2 с положительной ковариацией). Предполагается, что $m = 0$, $A = I_d$, и рассмотрены случаи различных ξ и a , т. е. различной скошенности и толщины хвостов по компонентам вектора X .

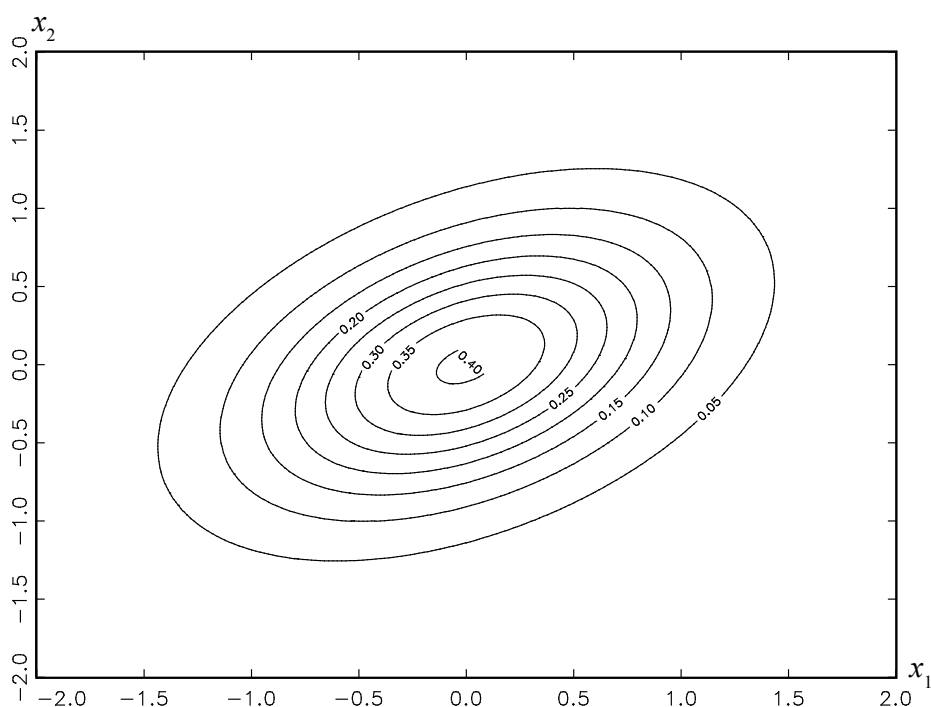


Рис. 1. Нет скошенности или тяжелых хвостов по x_1 и x_2

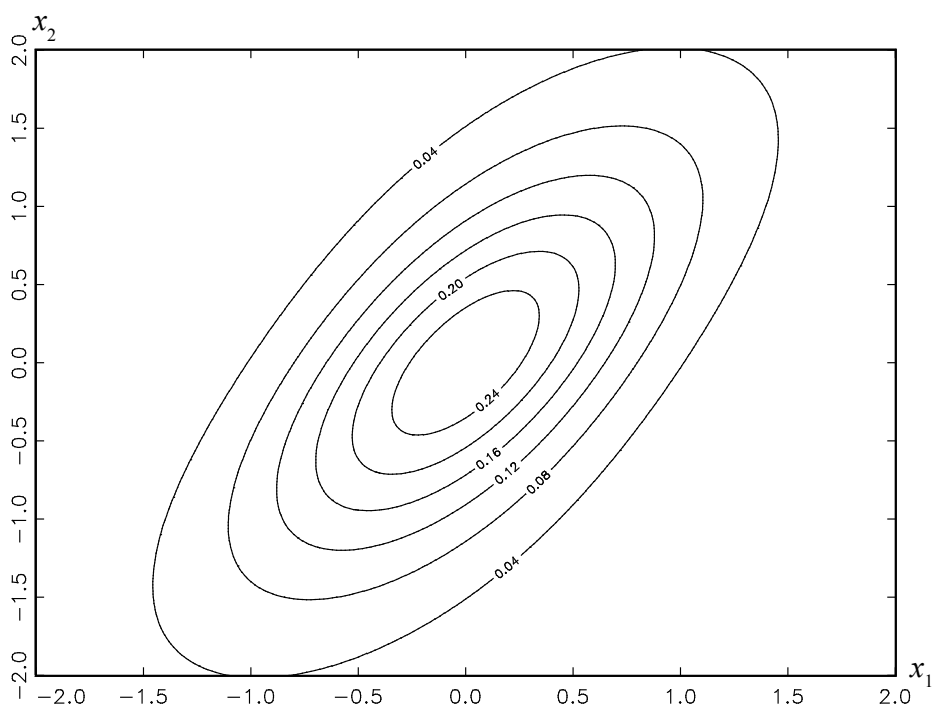
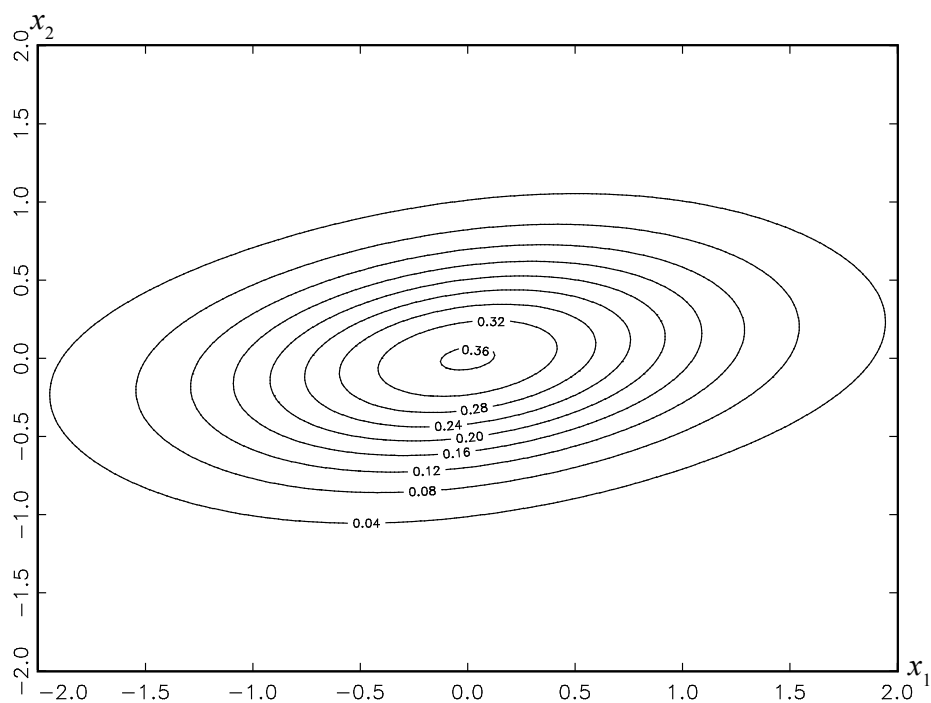
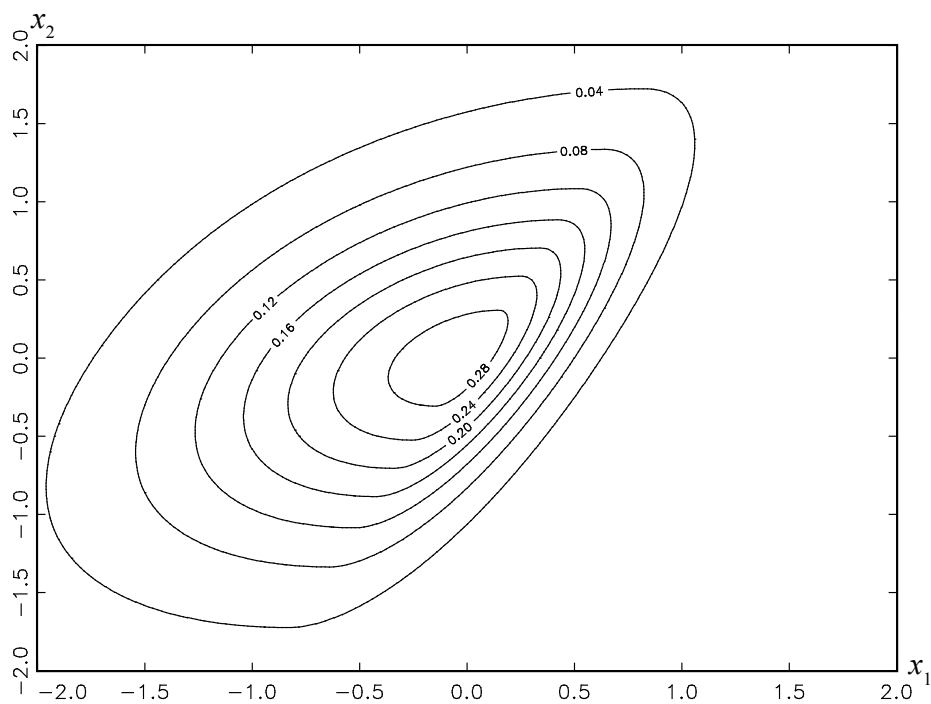


Рис. 2. Тяжелые хвосты по x_1

Рис. 3. Тяжелые хвосты по x_2 Рис. 4. Тяжелые хвосты и отрицательная скошенность по x_1

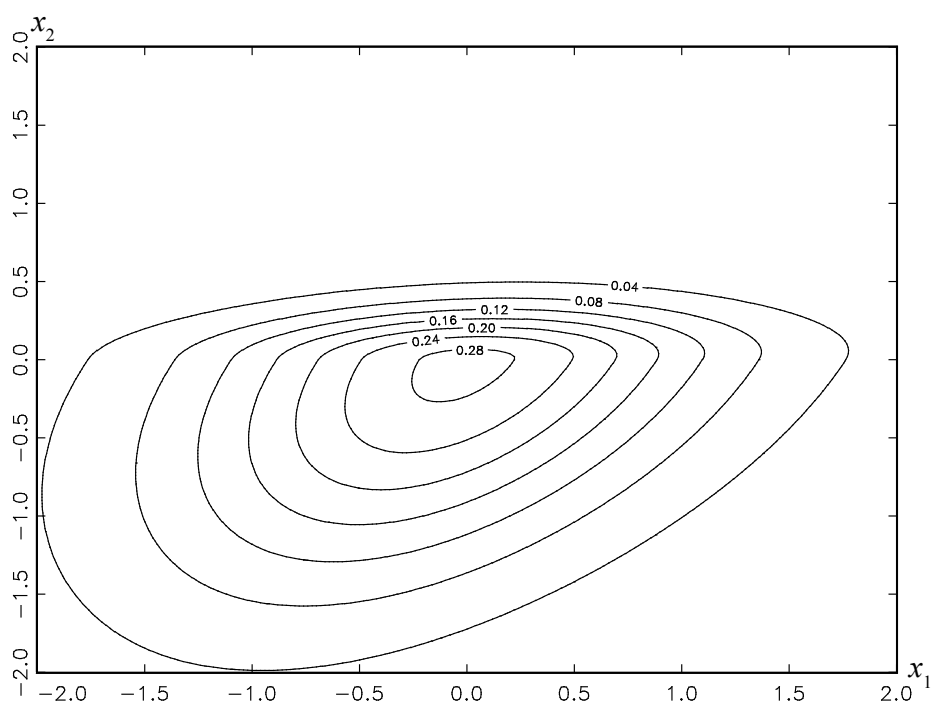


Рис. 5. Тяжелые хвосты и отрицательная скошенность по x_2

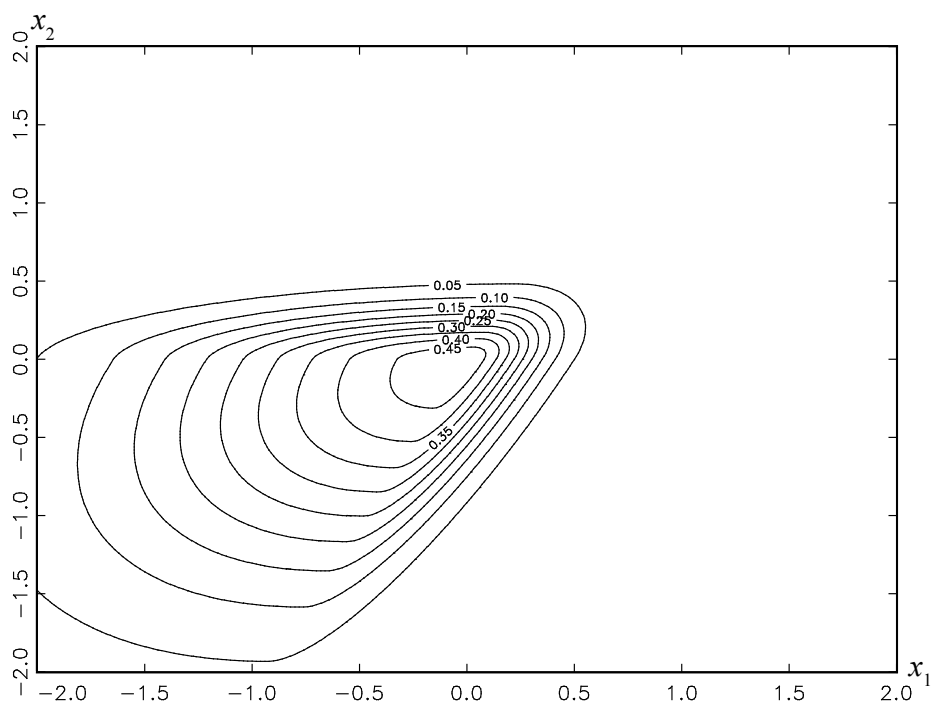


Рис. 6. Тяжелые хвосты и отрицательная скошенность по x_1 и x_2

Диаграммы показывают, что построенное многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы, задаваемое функцией плотности (9), достаточно гибко, т. е. способно учитывать особенности распределения доходностей каждого из активов в широком круге ситуаций. В частности, оно может быть использовано в случае, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно различаются, как, например, для индексов Hang-Seng и Nikkei 225.

6. Применение в моделях ВЕКК

В данном разделе приводится одна из возможных моделей многомерного условного распределения финансовых доходностей, в которой может быть использовано построенное выше многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы.

В одномерном случае довольно часто авторегрессионная часть в динамике финансовых доходностей является незначимой. Поэтому, как правило, условное среднее в одномерном случае можно игнорировать, например, зафиксировав его на нулевом уровне, без значительных потерь предсказательной силы для любой модели условного распределения доходностей. Однако в многомерном случае всегда следует использовать нетривиальную спецификацию вектора условных средних, поскольку доходности различных активов (или различных рынков) могут быть связаны. Например, в работе (Балаев, 2011) показано, что существуют статистически значимые динамические связи между доходностями фондовых индексов различных стран. Лагированная величина доходности на одном рынке может рассматриваться как информация, которая влияет на текущие доходности на других рынках. Тогда для динамики вектора условных средних финансовых доходностей можно использовать, например, простейшую векторную авторегрессионную модель. Пусть r_t есть d -мерный вектор доходностей некоторых активов в момент t , причем

$$r_t = E_{t-1}r_t + \varepsilon_t \quad (10)$$

и динамика вектора условных средних задана в виде векторной авторегрессии первого порядка

$$E_{t-1}r_t = c + Qr_{t-1}. \quad (11)$$

Эффекты кластеризации волатильности часто наблюдаются на практике и включаются во многие модели финансовых рынков. При этом не исключено, что если доходности различных активов или различных рынков связаны, то и их волатильности могут быть связаны. Вектор шоков ε_t можно представить в виде

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} x_t, \quad (12)$$

где H_t — условная ковариационная матрица вектора ε_t (с точностью до умножения на некоторую положительно определенную матрицу), а ковариационная матрица вектора x_t постоянна. Для учета стандартных GARCH эффектов и возможных связей между волатильностями можно использовать, например, так называемую модель ВЕКК — многомерную

GARCH модель, предложенную в (Engle, Kroner, 1995). Ее спецификация является достаточно гибкой и гарантирует положительную определенность условной ковариационной матрицы в любой момент времени. Можно использовать, например, модель ВЕКК(1,1), имеющую следующую структуру

$$H_t = \Omega\Omega' + A\varepsilon_t\varepsilon_t'A' + BH_{t-1}B', \quad (13)$$

где A и B — произвольные матрицы $d \times d$, а Ω — нижняя треугольная матрица.

Осталось задать условное распределение вектора x_t . С учетом эмпирических свойств распределений финансовых доходностей, желательно, чтобы условное распределение вектора x_t допускало возможность отрицательной скошенности и тяжелых хвостов по каждой компоненте x_t . При этом, поскольку каждый актив имеет свою специфику, желательно, чтобы для разных активов допускалась различная мера скошенности и тяжести хвостов. Многомерное t -распределение с вектором направлений скошенности и вектором степеней свободы как раз допускает такие различия и этим выгодно отличается от многих других многомерных распределений, используемых при моделировании динамики финансовых доходностей. Поэтому в качестве распределения вектора x_t можно использовать скошенное многомерное t -распределение с вектором степеней свободы, задаваемое функцией плотности (9). При этом предварительно полагаем $m=0$ и $A=I_d$, поскольку вектор условных средних и условная ковариационная матрица уже заданы выражениями (11) и (13) соответственно.

Таким образом, полная модель условного распределения вектора финансовых доходностей r_t описывается уравнениями (9)–(13) с $m=0$ и $A=I_d$. Такая модель учитывает динамические связи между доходностями различных активов (рынков), стандартные GARCH эффекты и связи между волатильностями различных доходностей, а также допускает скошенность и тяжелые хвосты для одномерных распределений доходностей. При этом для каждого актива мера скошенности и толщина хвостов задаются индивидуально.

7. Заключение

В данной работе предложена модификация многомерного t -распределения с вектором степеней свободы. Построено многомерное t -распределение с вектором параметров скошенности и вектором степеней свободы, показана целесообразность его применения в финансовых приложениях, когда меры скошенности и толщины хвостов для доходностей различных активов существенно различаются. В работе также рассмотрено применение построенного распределения в моделях ВЕКК для вектора доходностей.

Одним из возможных направлений дальнейшей работы могла бы стать эмпирическая проверка предсказательной способности многомерных GARCH моделей, в которых для моделирования шоков используется многомерное скошенное t -распределение с вектором степеней свободы. В частности, интерес представляет сравнение моделей со скошенностью и без нее.

Кроме того, в качестве продолжения исследований также может рассматриваться построение и эмпирическое тестирование скошенной версии матричного t -распределения с вектором степеней свободы, предложенного в работе (Шведов, 2010). Оно может быть использовано для моделирования совместного распределения текущих и прошлых векторов доходностей активов, если из этих векторов составить матрицу.

Можно также рассматривать и другие способы введения скошенности в многомерное t -распределение. При этом интересно было бы сравнить на эмпирическом уровне модели, в которых использованы различные процедуры введения скошенности.

Наконец, планируется изучить применение многомерного скошенного t -распределения с вектором степеней свободы в моделях «состояние–наблюдение».

Список литературы

Балаев А. И. (2011). Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей. *Квантиль*, 9, 1–22.

Шведов А. С. (2009). Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение. *Препринт* WP2/2009/01. М.: Изд. дом ГУ–ВШЭ.

Шведов А. С. (2010). t -распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели. *Препринт* WP2/2010/01. М.: Изд. дом ГУ–ВШЭ.

Шведов А. С. (2011). Робастная регрессия с применением t -распределения и ЕМ-алгоритма. *Экономический журнал Высшей школы экономики*, 15 (1), 68–87.

Alexander C. O. (2001). *A practitioners guide to financial data analysis*. New York: Wiley.

Azzalini A., Dalla Valle A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika*, 83, 715–726.

Engle R., Kroner K. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11, 122–150.

Bauwens L., Laurent S. (2005). A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339–350.

Bellman R. A. (1956). Generalization of some integral identities due to Ingham and Siegel. *Duke Mathematical Journal*, 23, 571–577.

Bernardo J. M., Smith A. F. M. (2000). *Bayesian theory*. New York: Wiley.

Bollerslev T. (1987). A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69, 542–547.

Branco M. D., Dey D. K. (2001). A class of multivariate skew-elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 79, 99–113.

Dreze J. H. (1978). Bayesian regression analysis using poly- t densities. *Journal of Econometrics*, 6, 329–354.

Fernandez C., Osiewalski J., Steel M. (1995). Modeling and inference with v -spherical distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1331–1340.

Ferreira J. T. A. S., Steel M. F. J. (2003). Bayesian multivariate regression analysis with a new class of skewed distributions. *Statistics Research Report*, 419, University of Warwick.

Fiorentini G., Sentana E., Calzolari G. (2003). Maximum likelihood estimation and inference in multivariate conditionally heteroscedastic dynamic regression models with Student t innovations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 21, 532–546.

Gourieroux C. (1997). *ARCH models and financial applications*. New York: Springer–Verlag.

Jones M. C. (2001). Multivariate T and Beta distributions associated with the multivariate F distribution. *Metrika*, 54, 215–231.

Jones M. C. (2002). Marginal replacement in multivariate densities, with application to skewing spherically symmetric distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 81, 85–99.

Mauleon I., Perote J. (1999). Estimation of multivariate densities with financial data: the performance of the multivariate Edgeworth–Sargan density. *Proceedings of the 12th Australian Finance and Banking Conference*, Sidney.

Samorodinsky G., Taqqu M. S. (1994). *Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance*. London: Chapman&Hall.

Vlaar P. J. G., Palm F. C. (1993). The message in weekly exchange rates in the european monetary system: Mean reversion, conditional heteroscedasticity and jumps. *Journal of Business and Economic Statistics*, 11 (3), 351–360.