В. В. Хабров

Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе моделей векторных авторегрессий и моделей многомерной волатильности

Теоретическая часть исследования посвящена анализу влияния информации о стохастической модели генерации доходностей активов (векторной авторегрессионной модели) на оптимальную структуру распределения ресурсов инвестиционного портфеля по активам. Представлены теоретические основы формирования и характеристики указанных портфелей. Моделирование показало, что характеристики исследуемых портфелей при некоторых условиях могут значимо превосходить характеристики классических средне-дисперсионных портфелей. Практическая часть посвящена исследованию характеристик оптимальных портфелей, доходности активов которых прогнозировались с помощью модели векторной авторегрессии, а матрицы ковариаций ошибок доходностей активов — с помощью моделей многомерной волатильности. Результаты практического исследования показали, что модели волатильности существенным образом влияют на характеристики оптимальных портфелей, а также подтвердили необходимость и важность изучения ошибок прогнозов доходностей портфелей.

Ключевые слова: портфельная теория; модель векторной авторегрессии; модели многомерной волатильности; задачи квадратичного программирования.

JEL classification: C01; C58; C61; G11; G17.

1. Введение

Развитие мировой финансовой системы происходит под воздействием институциональных и законодательных изменений. Процессы глобализации экономик, появление новых финансовых институтов и инструментов, развитие финансовой инфраструктуры — все это одновременно и упрощает передвижение капитала, и усложняет прогнозирование этого процесса. Развитию финансовых рынков сопутствует усложнение поведения его игроков, определяющееся методами, моделями и информацией, которыми они руководствуются при принятии решений.

Способы формирования средне-дисперсионных портфелей ценных бумаг на основе подхода Марковица (Markowitz, 1952, 1959) и его последователей (модель ценообразования финансовых активов, арбитражная теория расчетов, трехфакторная модель (Fama, French, 1992)) не учитывали динамику доходностей активов, описываемую стохастическими моделями ценообразования, которые являются адекватными инструментами для их представления. Samuelson (1969) и Merton (1969) для управления многошаговыми портфелями в качестве модели ценообразования использовали геометрическое броуновское движение.

Исследования (Chopra, 1993; Chopra, Ziemba, 1993) показали, что ошибки в оценках математического ожидания доходностей значительно изменяют структуру портфеля по сравнению с ошибками в дисперсии и ковариациях. В связи с этим большинство исследований посвящено анализу портфельной стратегии, минимизирующей только дисперсию портфеля (global minimum variance, GMV) и не принимающей во внимание целевую доходность портфеля. Использование GMV стратегии также оправдывается тем, что доходности активов близки к нулю.

В (Pojarliev, Polasek, 2001, 2002) с помощью вспомогательной регрессионной модели (Pagan, Schwert, 1990) и модели BEKK, получившей свое название по первым буквам фамилий ее авторов — Baba, Engle, Kroner, Kraft (Engle, Kroner, 1995), исследовано влияние ошибок при прогнозировании дисперсии и ковариации доходностей активов на характеристики GMV портфелей. Авторы показали, что веса GMV портфеля чувствительны к данным матрицы ковариации. Следовательно, выбор модели оценки вариации будет отражаться на оптимальных весах портфеля и определять характеристики самого портфеля, в то же время потеря информации о ковариации доходностей активов не наносит значительного ущерба характеристикам портфеля.

Исследование характеристик GMV портфелей при использовании моделей условных корреляций осуществлялось в работах (Yilmaz, 2010) и (Михаленок, Малюгин, 2011). Оба исследования указывают на целесообразность использования моделей, учитывающих поведение корреляций, для построения портфелей.

В работе (Carriero et al., 2010) исследовались характеристики портфелей, построенных на основе подхода Марковица, учитывающего склонность инвестора к риску. Доходности активов портфеля прогнозировались на основе моделей линейной и векторной авторегрессии (Fama, Bliss, 1987; Cochrane, Piazzesi, 2005), а также байесовской векторной авторегрессионной модели (BVAR). В качестве прогноза матрицы ковариации доходностей активов авторы использовали ее выборочную оценку. Аналогичный подход рассматривался в работе Хаброва (2011), где при построении оптимальных валютных портфелей использовались прогнозы различных линейных моделей.

Классическая портфельная теория Марковица и подходы, сформированные на основе ее дальнейшего развития, заменяют случайные параметры доходностей активов на ожидаемые оценки. При этом при усреднении исходных данных может теряться полезная информация, учет которой при формировании портфеля мог бы положительно отразиться на его характеристиках и результатах управления. При формировании портфелей на основе динамического программирования уже разработана теория, позволяющая учитывать информацию, которую предоставляют модели ценообразования доходностей активов. Подходы к формированию портфелей на основе средне-дисперсионного анализа либо не в полной мере учитывают такую информацию, либо ограничиваются частными случаями, исследуя характеристики GMV портфелей.

Данное исследование посвящено как теоретическим основам формирования оптимальных портфелей, когда ценообразование доходностей активов портфеля подчинено процессу векторной авторегрессии, так и практическому применению моделей многомерной волатильности в портфельном конструировании. Статья имеет следующую структуру. Во втором разделе кратко рассмотрены характеристики моделей векторных авторегрессий и вопросы построения прогнозов. В третьем разделе осуществлена формализация оптимизационной задачи формирования портфелей на основе прогнозов моделей векторных авторегрессий.

В четвертом разделе приведено решение оптимизационной задачи и характеристики оптимальных портфелей. Пятый и шестой разделы посвящены сравнению характеристик исследуемых портфелей с классическими средне-дисперсионными на основе имитационного моделирования и эмпирического исследования, проведенного на реальных данных с применением моделей векторной авторегрессии и многомерных моделей волатильности. В заключении приведены основные выводы.

2. Модель векторной авторегрессии

Векторные авторегрессионные модели (vector autoregressions model, VAR) нашли свое применение главным образом при анализе макроэкономических данных. Изначально модели VAR были описано в работах (Sims, 1980; Litterman, 1979, 1986). Вопросы построения и оценки моделей VAR подробно изучались в (Lutkepohl, 2005; Watson, 1994; Суслов и др., 2005). Использование моделей векторных авторегрессий рассмотрено в работах (Hamilton, 1994; Campbell et al., 1997; Tsay, 2002; Johnson, Wichern, 2007; Greene, 1999).

Пусть управляющий имеет возможность разместить свой капитал среди N активов, $X=\{x_1,...,x_N\}$. Предположим, что ценообразование случайного вектора доходностей $r_t=\left(r_t(x_1),...,r_t(x_N)\right)\in R^{N\times 1}$ описывается VAR(k) моделью:

$$r_t = d + \Pi_1 r_{t-1} + \ldots + \Pi_k r_{t-k} + \varepsilon_t\,, \tag{1}$$

где $d\in R^{N\times 1}$ — вектор констант или детерминированных входных данных, $\Pi_j\in R^{N\times N}$, $j=1,\ldots,k$ — матрицы коэффициентов, связывающие текущие значения доходностей активов с их лагированными значениями, $\varepsilon_t\in R^{N\times 1}$ — вектор ошибок. Пусть ряды доходностей стационарны, а ошибки представляют собой гауссовский «белый шум». В этом случае полная матрица ковариаций ошибок будет иметь вид $\Theta=\mathrm{E}(\varepsilon\varepsilon')=\Sigma\otimes \mathrm{I}$, где $\Sigma=\left(\sigma_{ij}\right)_{i,j=1}^{N}\in R^{N\times N}$ — матрица одновременной ковариации ошибок модели, которая должна быть невырожденной и положительно определенной, в противном случае размерность r_t может быть снижена, т. к. компоненты будут линейно зависимы, $\sigma_{ij}=\mathrm{E}\left(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}\right)$, $\otimes$ — знак произведения Кронекера, а $\mathrm{I}\in R^{N\times N}$ — единичная матрица.

Прогнозирование в рамках модели векторной авторегрессии

Неопределенность прогноза модели заключается в наличии ошибок ε_t модели и отклонении оценок коэффициентов регрессии от их истинных значений. Вариант прогнозирования, при котором ошибка прогноза существует только за счет ε_t, называется прогнозированием в рамках теоретической модели. Более подробно о прогнозировании с помощью модели векторной авторегрессии см. (Суслов и др., 2005; Tsay, 2002; Jiahui, 2002).

Будем рассматривать прогнозирование в рамках модели VAR(k). Пусть известны значения r_t временного ряда VAR(k) для $t=1,\ldots,T$, указанную доступную информацию будем обозначать $I_T=\left(r_T,\ldots,r_1,r_0,\ldots\right)$. Предположим, что процесс находится в момент времени T, и необходимо построить прогноз на $l\geq 1$ шагов вперед. Момент времени T называется моментом начала прогнозирования, а целое число $l \geq 1$ есть горизонт прогнозирования. Пусть $\hat{r}_T(l)$ будет оценкой или прогнозом r_{T+l}. Прогноз на l шагов вперед $\hat{r}_T(l)$, минимизирующий среднеквадратичное отклонение, есть условное математическое ожидание $\hat{r}_T(l) = \mathrm{E}(r_{T+l} \mid I_T)$, при этом

$$\mathrm{E}\left\{\left[r_{T+l} - \hat{r}_T(l)\right]^2 \middle| I_T\right\} \leq \min_g \mathrm{E}\left\{\left[r_{T+l} - g\right]^2 \middle| I_T\right\}, \tag{2}$$

где g — функция, зависящая от I_T.

В рамках теоретической модели VAR оценка прогноза $\hat{r}_T(l)$ обладает наименьшей среднеквадратичной ошибкой в классе линейных несмещенных оценок. Вне рамок теоретической модели (эмпирическое оценивание), поскольку оценки коэффициентов VAR модели, полученные на основе метода наименьших квадратов, являются несмещенными, оценка прогноза $\hat{r}_T(l)$ также будет несмещенной с наименьшей среднеквадратичной ошибкой в классе линейных несмещенных оценок.

Рассмотрим построение прогноза в рамках теоретической модели. Для построения портфелей понадобятся прогнозы только на один шаг вперед, построение прогнозов на большее количество шагов осуществляется рекурсивно. Точечный прогноз для r_{T+1} при известной информации I_T есть условное математическое ожидание

$$\hat{r}_T(1) = \mathrm{E}(r_{T+1} \mid I_T) = \mathrm{E}\left(d + \sum_{i=1}^{k} \Pi_i r_{T-i+1} + \varepsilon_{T+1} \mid I_T\right) = d + \sum_{i=1}^{k} \Pi_i r_{T-i+1}, \tag{3}$$

т. к. $\mathrm{E}(\varepsilon_{T+1} \mid I_T) = 0$ и все r_{T-1} в правой части уравнения регрессии входят в предысторию I_T. Ошибка прогноза описывается выражением

$$e_T(1) = r_{T+1} - \hat{r}_T(1) = r_{T+1} - \mathrm{E}(r_{T+1} \mid I_T) = \varepsilon_{T+1}. \tag{4}$$

Математическое ожидание ошибки прогноза и матрица ковариаций ошибок равны соответственно:

$$\mathrm{E}(e_T(1)) = \mathrm{E}(\varepsilon_{T+1}) = 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{Var}(e_T(1)) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{T+1}) = \Sigma. \tag{6}$$

3. Формализация задачи поиска оптимального портфеля

Вектор $\omega_{T+1} = (\omega_{1,T+1}, \ldots, \omega_{N,T+1}) \in R^{N\times 1}$, такой, что $\sum_{i=1}^{N} \omega_{i,T+1} = 1$, называют портфелем, действующим в период времени $(T, T+1]$, а его компоненты $\omega_{i,T+1}$, $i = 1, \ldots, N$ — весами i-х активов портфеля. Портфель составляется в момент времени T и действует в течение времени $(T, T+1]$. Случайную величину $P(\omega_{T+1}) = \omega'_{T+1} r_{T+1}$ будем называть доходностью портфеля за период $(T, T+1]$. Обозначим $\mathrm{E}(r_{T+1}) = \mu$, $\mathrm{Var}(r_{T+1}) = V$.

Для построения портфеля Марковиц (1952) предложил использовать математическое ожидание доходности портфеля $\mathrm{E}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\omega'_{T+1}\mu$ и его дисперсию $\mathrm{D}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\omega'_{T+1}V\omega_{T+1}$.

Подход Марковица, рассматривая случай, когда доходности активов являются стационарными случайными величинами, не использует информацию о возможном процессе ценообразования доходностей активов. В данном разделе проанализируем случай, в котором доходности активов также будут стационарными величинами, но при этом они будут подчиняться определенной модели ценообразования — векторной авторегрессии k-го порядка, а формирование оптимального портфеля будет осуществляться на основе прогнозных значений модели. Для упрощения будем рассматривать вариант прогнозирования в рамках теоретической модели. Рассмотрим структуру математического ожидания и дисперсии доходности портфеля, а также характеристики ошибок прогнозов доходностей. В этом разделе будем полагать веса активов портфеля детерминированными величинами.

Фактическая доходность портфеля в момент времени $T+1$ есть

$$P\left(\omega_{T+1}\right)=\omega'_{T+1}r_{T+1}=\omega'_{T+1}d+\sum_{i=1}^{k}\omega'_{T+1}\Pi_i r_{T-i+1}+\omega'_{T+1}\varepsilon_{T+1}, \tag{7}$$

при этом прогнозное значение доходности портфеля на момент $T+1$:

$$\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)=\mathrm{E}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\middle|I_T\right)=\omega'_{T+1}\mathrm{E}\left(r_{T+1}\middle|I_T\right)=\omega'_{T+1}\hat{r}_T(1)=\omega'_{T+1}d+\sum_{i=1}^{k}\omega'_{T+1}\Pi_i r_{T-i+1}. \tag{8}$$

Таким образом, доходность портфеля в момент времени $T+1$ можно представить как

$$P\left(\omega_{T+1}\right)=\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)+\omega'_{T+1}\varepsilon_{T+1}=\omega'_{T+1}d+\sum_{i=1}^{k}\omega'_{T+1}\Pi_i r_{T-i+1}+\omega'_{T+1}\varepsilon_{T+1}. \tag{9}$$

Ошибка прогноза доходности активов есть $e_T(1)=r_{T+1}-\hat{r}_T(1)=r_{T+1}-\mathrm{E}\left(r_{T+1}\mid I_T\right)=\varepsilon_{T+1}$, а математическое ожидание ошибки прогноза и матрица ковариаций ошибок равны соответственно:

$$\mathrm{E}\left(e_T(1)\right)=\mathrm{E}\left(\varepsilon_{T+1}\right)=0,\ \mathrm{E}\left(e_{i,T}(1)e_{j,T}(1)\right)=\mathrm{E}\left(\varepsilon_{i,T+1}\varepsilon_{j,T+1}\right)=\sigma_{ij},\ \mathrm{Var}\left(e_T(1)\right)=\mathrm{Var}\left(\varepsilon_{T+1}\right)=\Sigma.$$

Мерой риска портфеля, как и в подходе Марковица, будет выступать дисперсия его доходности. Так как управляющий формирует портфель на основе прогнозов доходностей активов, входящих его состав, то риск для управляющего будет заключаться в отклонении фактической доходности портфеля от его прогнозного значения, т. е. в ошибке прогноза доходности портфеля в момент времени $T+1$:

$$\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)=P\left(\omega_{T+1}\right)-\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)=\omega'_{T+1}e_T(1). \tag{10}$$

Математическое ожидание ошибки прогноза доходности портфеля равно

$$\mathrm{E}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\mathrm{E}\left(\omega'_{T+1}r_{T+1}-\omega'_{T+1}\hat{r}_T(1)\right)=\omega'_{T+1}\mathrm{E}\left(r_{T+1}-\hat{r}_T(1)\right)=\omega'_{T+1}\mathrm{E}\left(e_T(1)\right)=0, \tag{11}$$

а дисперсия ошибки прогноза доходности портфеля будет равна

$$\mathrm{D}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\mathrm{D}\left(r'_{T+1}\omega_{T+1}-\hat{r}'_T(1)\omega_{t+1}\right)=\omega'_{T+1}\mathrm{Var}\left(r_{T+1}-\hat{r}_T(1)\right)\omega_{T+1}=\omega'_{T+1}\,\Sigma\,\omega_{T+1}. \tag{12}$$

В подходе Марковица вместо прогнозов доходностей активов используются математические ожидания доходностей активов, поэтому прогноз доходности портфеля совпадает с его математическим ожиданием и равен $\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{M}\right)=\mathrm{E}\left(P\left(\omega_{T+1}^{M}\right)\right)=\omega_{T+1}'^{M}\mu$, индекс «$M$» в векторе весов портфеля будем использовать для указания на то, что портфель является портфелем Марковица. Математическое ожидание ошибки прогноза доходности портфеля Марковица будет равно $\mathrm{E}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{M}\right)\right)=\omega_{T+1}'^{M}\mathrm{E}\left(r_{T+1}-\mu\right)=0$, а дисперсия ошибки прогноза доходности портфеля:

$$\mathrm{D}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{M}\right)\right)=\mathrm{D}\left(\omega_{T+1}'^{M}r_{T+1}-\omega_{T+1}'^{M}\mu\right)=\omega_{T+1}'^{M}V\omega_{T+1}^{M}. \tag{13}$$

Таким образом, риск портфеля, при формировании которого используются прогнозы доходностей активов, заключается в наличии ошибок этих прогнозов. Чем точнее модель делает прогноз доходности активов, тем меньше риск портфеля. Риск портфеля для подхода Марковица связан с матрицей ковариаций доходностей активов, в то время как для портфелей, построенных на основе прогнозов доходностей активов — с матрицей ковариаций ошибок прогнозной модели.

Доходность портфеля в момент времени $T+1$ можно переписать следующим образом:

$$P\left(\omega_{T+1}\right)=\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)+\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right). \tag{14}$$

Так как ряды доходностей стационарны, то $\mathrm{E}\left(\hat{r}_T(1)\right)=\mu$. Математическое ожидание фактической доходности портфеля равно

$$\mathrm{E}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\mathrm{E}\left(\omega_{T+1}'r_{T+1}\right)=\omega_{T+1}'\mathrm{E}\left(\hat{r}_T(1)+e_T(1)\right)=\omega_{T+1}'\left(\mathrm{E}\left(\hat{r}_T(1)\right)+\mathrm{E}\left(e_T(1)\right)\right)=\omega_{T+1}'\mu. \tag{15}$$

Структура дисперсии портфеля имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\mathrm{D}\left(\omega_{T+1}'r_{T+1}\right)=\omega_{T+1}'V\omega_{T+1}=\omega_{T+1}'\mathrm{Var}\left(r_{T+1}-\hat{r}_T(1)+r_T(1)\right)\omega_{T+1}=\\ =\omega_{T+1}'\left[\mathrm{Var}\left(r_{T+1}-\hat{r}_T(1)\right)+\mathrm{Var}\left(\hat{r}_T(1)\right)+\right.\\ \left.+2\mathrm{Cov}\left(r_{T+1}-\hat{r}_T(1),\hat{r}_T(1)\right)\right]\omega_{T+1}=\omega_{T+1}'\left[\mathrm{Var}\left(e_T(1)\right)+\mathrm{Var}\left(\hat{r}_T(1)\right)+2\mathrm{Cov}\left(e_T(1),\hat{r}_T(1)\right)\right]\omega_{T+1}.\end{gathered}$$

Так как $\mathrm{Var}\left(e_T(1)\right)=\Sigma$, а $\mathrm{E}\left(e_T(1)\left(\hat{r}_T(1)\right)'\right)=0$, то

$$\mathrm{D}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\right)=\omega_{T+1}'\sum\omega_{T+1}+\omega_{T+1}'\mathrm{Var}\left(\hat{r}_T(1)\right)\omega_{T+1}.$$

Обозначая $\Psi=\mathrm{Var}\left(\hat{r}_T(1)\right)=V-\Sigma$, структуру дисперсии портфеля можно представить как

$$\underbrace{\omega_{T+1}'V\omega_{T+1}}_{TPV}=\underbrace{\omega_{T+1}'\Sigma\omega_{T+1}}_{EPV}+\underbrace{\omega_{T+1}'\Psi\omega_{T+1}}_{FPV}. \tag{16}$$

Таким образом, дисперсия доходности портфеля (*total portfolio variance, TPV*) состоит из дисперсий двух портфелей, а именно из дисперсии ошибки прогноза доходности портфеля (*error portfolio variance, EPV*), которая образовалась вследствие наличия ошибок прогнозов модели, и дисперсии портфеля, предсказанной моделью ценообразования доходностей (*forecast portfolio variance, FPV*).

Классическая портфельная теория Марковица вместо прогнозов доходности активов использует математические ожидания доходностей μ, вследствие чего дисперсия портфеля состоит полностью из дисперсии ошибки прогноза доходности, т. е. *TPV=EPV*. В случае, когда при построении портфеля используются прогнозные значения доходностей активов, т. е. информация I_T, доступная на момент времени *T*, часть дисперсии портфеля будет описана самим прогнозом (*FPV*), а оставшаяся часть дисперсии портфеля (*EPV*) будет обусловлена ошибкой модели.

4. Построение оптимального портфеля

В связи с тем, что риск для инвестора заключается в отклонении прогнозного значения доходности портфеля от его истинного значения, целесообразно оптимизировать портфель, формирование которого основывается на прогнозных значениях доходности его активов, либо путем минимизации дисперсии ошибки прогноза его доходности при фиксированном значении прогноза доходности, либо путем максимизации прогноза доходности при фиксированной дисперсии ошибки указанного прогноза.

В дальнейшем оптимальный портфель, формирование которого осуществляется с учетом прогнозных значений доходностей активов и использующих матрицу ковариации ошибок прогнозной модели в оптимизационном функционале, будем называть «квази-оптимальным» портфелем.

Квази-оптимальный портфель будем искать путем решения оптимизационной задачи:

$$\begin{gathered}\widehat{EPV} = \mathrm{D}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}\right)\right) = \omega'_{T+1}\,\Sigma\,\omega_{T+1} \to \min_{\omega_{T+1}},\\ \hat{P}\left(\omega_{T+1}\right) = \mathrm{E}\left(P\left(\omega_{T+1}\right)\middle| I_T\right) = \omega'_{T+1}\hat{r}_T(1) = M,\\ \omega'_{T+1}e = 1,\end{gathered} \qquad (17)$$

где $\omega_{T+1} = \left(\omega_{1,T+1},\ldots,\omega_{N,T+1}\right)$ — вектор весов активов портфеля для периода времени $(T, T+1]$, $e' = (1,\ldots,1)$ — единичный вектор, *M* — детерминированная величина, определяющая целевую доходность портфеля. В данной постановке задачи возможны отрицательные веса активов портфеля, т. е. инвестор может осуществлять беспроцентные займы с целью покупки активов и брать активы взаймы у брокеров.

Задача относится к классу задач квадратичного программирования при случайных линейных ограничениях. Решим задачу методом множителей Лагранжа, составив для этого лагранжиан

$$L\left(\omega_{T+1},\lambda_1,\lambda_2\right) = \omega'_{T+1}\,\Sigma\,\omega_{T+1} + \lambda_1\left(\omega'_{T+1}\hat{r}_T(1) - M\right) + \lambda_2\left(\omega'_{T+1}e - 1\right). \qquad (18)$$

Будем использовать индекс «quasi» с целью указания на то, что портфель является квази-оптимальным. Решение задачи выглядит в виде следующего портфеля ω^{quasi}_{T+1}:

$$\omega^{quasi}_{T+1} = M\,\Sigma^{-1}\frac{\left(\hat{r}_T(1),e\right)_\Sigma e - \|e\|^2_\Sigma\,\hat{r}_T(1)}{\left(\hat{r}_T(1),e\right)^2_\Sigma - \|\hat{r}_T(1)\|^2_\Sigma\|e\|^2_\Sigma} + \Sigma^{-1}\frac{\left(\hat{r}_T(1),e\right)_\Sigma\,\hat{r}_T(1) - \|\hat{r}_T(1)\|^2_\Sigma\,e}{\left(\hat{r}_T(1),e\right)^2_\Sigma - \|\hat{r}_T(1)\|^2_\Sigma\|e\|^2_\Sigma}, \qquad (19)$$

где $e=(1,...,1)\in R^{N\times 1}$ — единичный вектор, а скалярное произведение и норма (с индексом Σ) определены как $(a,b)_\Sigma = a'\Sigma^{-1}b$ и $\|a\|_\Sigma=\sqrt{(a,a)_\Sigma}$.

Отметим, что в отличие от детерминированных весов в предыдущем разделе, структура квази-оптимального портфеля является случайной, т. к. зависит от случайного вектора прогноза доходности активов $\hat r_T(1)$.

Характеристики квази-оптимального портфеля

Значение оптимизационной функции соответствует условной дисперсии ошибки прогноза доходности квази-оптимального портфеля и равно соответственно

$$\mathrm{D}\big(\Delta\hat P(\omega_{T+1})\big)=\omega'^{quasi}_{T+1}\,\Sigma\,\omega^{quasi}_{T+1}=\frac{M^2\|e\|^2_\Sigma-2M(\hat r_T(1),e)_\Sigma+\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma}{\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma\,\|e\|^2_\Sigma-(\hat r_T(1),e)^2_\Sigma}=\frac{\|Me-\hat r_T(1)\|^2_\Sigma}{\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma\,\|e\|^2_\Sigma-(\hat r_T(1),e)^2_\Sigma}. \quad (20)$$

Фактическая доходность квази-оптимального портфеля в момент времени $T+1$ равна

$$P(\omega^{quasi}_{T+1})=M\frac{(r_{T+1},e)_\Sigma(\hat r_T(1),e)_\Sigma-\|e\|^2_\Sigma(r_{T+1},\hat r_T(1))_\Sigma}{(\hat r_T(1),e)^2_\Sigma-\|e\|^2_\Sigma\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma}+\frac{(r_{T+1},\hat r_T(1))_\Sigma(\hat r_T(1),e)_\Sigma-\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma(r_{t+1},e)_\Sigma}{(\hat r_T(1),e)^2_\Sigma-\|e\|^2_\Sigma\|\hat r_T(1)\|^2_\Sigma}. \quad (21)$$

Принимая во внимание, что $r_{T+1}=\hat r_T(1)+e_T(1)$,

$$P(\omega^{quasi}_{T+1})=\omega'^{quasi}_{T+1}r_{T+1}=\omega'^{quasi}_{T+1}(\hat r_T(1)+e_T(1))=M+\omega'^{quasi}_{T+1}e_T(1). \quad (22)$$

Так как ошибка прогноза $e_T(1)=\varepsilon_{T+1}$ не зависит от структуры портфеля ω^{quasi}_{T+1} и $\mathrm{E}(\varepsilon_{T+1})=0$, математическое ожидание доходности квази-оптимального портфеля есть

$$\mathrm{E}\big(P(\omega^{quasi}_{T+1})\big)=\mathrm{E}\big(M+\omega'^{quasi}_{T+1}e_T(1)\big)=M+\mathrm{E}\big(\omega'^{quasi}_{T+1}\big)\mathrm{E}\big(e_T(1)\big)=M, \quad (23)$$

а дисперсия доходности квази-оптимального портфеля будет равна

$$\mathrm{D}\big(P(\omega^{quasi}_{T+1})\big)=\mathrm{E}\big[\omega'^{quasi}_{T+1}e_T(1)e'_T(1)\omega^{quasi}_{T+1}\big]=\sum_{i,j=1}^{N}\Big[\Omega_{ij}+\mathrm{E}\big(\omega^{quasi}_{i,T+1}\big)\mathrm{E}\big(\omega^{quasi}_{j,T+1}\big)'\Big]\sigma_{ij}, \quad (24)$$

где $\Omega_{ij}=\mathrm{cov}\big(\omega^{quasi}_{i,T+1},\omega^{quasi}_{j,T+1}\big)$. В матричном виде дисперсия выглядит следующим образом:

$$\mathrm{D}\big(P(\omega^{quasi}_{T+1})\big)=\Big(\mathrm{vec}\Big[\Omega+\mathrm{E}\big(\omega^{quasi}_{T+1}\big)\mathrm{E}\big(\omega^{quasi}_{T+1}\big)'\Big]\Big)'\,\mathrm{vec}(\Sigma), \quad (25)$$

где Ω — матрица ковариаций весов квази-оптимального портфеля, $\mathrm{vec}(\cdot)$ обозначает операцию векторизации, а именно трансформацию матрицы в вектор путем составления столбцов матрицы один под другим, т. е. для матрицы $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$

$$\mathrm{vec}(A)=(a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1},a_{12},a_{22},a_{m2},\ldots,a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{mn}).$$

Подробнее об операции векторизации и ее свойствах см. (Magnus, Neudecker, 1999).

Дисперсия квази-оптимального портфеля зависит от математического ожидания вектора весов активов портфеля, матрицы ковариации ошибок прогнозов доходностей активов и матрицы ковариации весов актива портфеля. Использование прогнозных значений доходности активов вместо их математических ожиданий приводит к снижению условной дисперсии ошибки прогноза доходности портфеля вследствие того, что $\omega'\Sigma\omega \le \omega' V\omega$, однако это ведет к появлению математического ожидания и матрицы ковариации вектора весов активов в структуре дисперсии квази-оптимального портфеля.

Ошибка прогноза доходности квази-оптимального портфеля равна

$$\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{quasi}\right) = \omega_{T+1}^{\prime quasi}\left(r_{T+1} - \hat{r}_T(1)\right) = \omega_{T+1}^{\prime quasi} e_T(1). \qquad (26)$$

Поскольку структура квази-оптимального портфеля и ошибка прогноза доходности активов являются независимыми случайными величинами, математическое ожидание ошибки прогноза доходности такого портфеля равно

$$\mathrm{E}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{quasi}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\omega_{T+1}^{\prime quasi} e_T(1)\right) = \mathrm{E}\left(\omega_{T+1}^{\prime quasi}\right)\mathrm{E}\left(e_T(1)\right) = 0, \qquad (27),$$

а дисперсия ошибки прогноза доходности оптимального портфеля равна

$$\mathrm{D}\left(\Delta\hat{P}\left(\omega_{T+1}^{quasi}\right)\right) = \mathrm{D}\left(\omega_{T+1}^{\prime quasi} e_T(1)\right) = \mathrm{D}\left(P\left(\omega_{T+1}^{quasi}\right)\right). \qquad (28)$$

Таким образом, дисперсия ошибки прогноза доходности квази-оптимального портфеля равна дисперсии доходности портфеля.

5. Моделирование

В исследовании моделировался портфель, состоящий из трех активов, при этом предполагалось, что ряды доходностей активов стационарны в широком смысле, и для их моделирования использовалась приведенная VAR(1) модель.

Для моделирования многомерных рядов (размерности N и длины T) генерировались ряды случайных составляющих $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T$, как набор независимых нормально распределенных случайных векторов: $\varepsilon_t \sim N\left(0, \mathrm{diag}\left(0.0001; 0.0036; 0.0004\right)\right)$.

Параметры модели VAR(1): d, Π_1, где $d \in R^{3\times 1}$, $\Pi_1 \in R^{3\times 3}$, подбирались таким образом, чтобы процесс являлся стационарным, также выбирались начальные значения процесса r_{-1}, r_0. Используя набор коэффициентов, начальные значения рядов и начальные случайные составляющие рядов, рекурсивно моделировались значения $r_1, \ldots, r_T$ процессом VAR(1):

$$\begin{aligned} r_{1,t} &= 0.01 + 0.3r_{1,t-1} - 0.4r_{2,t-1} - 0.3r_{3,t-1} + \varepsilon_{1,t}, \\ r_{2,t} &= 0.01 - 0.2r_{1,t-1} + 0.3r_{2,t-1} - 0.4r_{3,t-1} + \varepsilon_{2,t}, \\ r_{3,t} &= 0.01 - 0.4r_{1,t-1} - 0.3r_{2,t-1} - 0.3r_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t}, \end{aligned} \qquad (29)$$

начиная со значения $t = 1$ и до $t = T$.

Вектор математических ожиданий смоделированных данных равен $\mu_r{}' = (0.007; 0.011; 0.003)$, а матрица ковариаций смоделированных рядов равна

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} 0.001 & -0.0006 & 0.0005 \\ -0.0006 & 0.0043 & 0 \\ 0.0005 & 0 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

Смоделированные ряды являются стационарными, т.к. все собственные значения характеристического многочлена модели ($\lambda_1 = -0.41,\ \lambda_2 = 0.28,\ \lambda_3 = 0.43$) лежат внутри единичного круга.

Построение квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей осуществлялось в рамках теоретических и эмпирических моделей. Прогнозы доходностей для квази-оптимальных портфелей строились на один шаг вперед. Для квази-оптимальных портфелей прогнозы вне рамок теоретических моделей строились путем оценивания коэффициентов модели векторной авторегрессии на основе метода наименьших квадратов и выборочных оценок матрицы ковариаций ошибок. Оценивание осуществлялось на основе данных сдвигающегося окна $S = 400$ значений. Для построения портфелей фиксировалось целевое значение доходности портфеля *M*, моделировалось 100 рядов для каждого актива на основе модели VAR с различными рядами ошибок. Длина рядов для теоретической модели равнялась 1000 значениям, для эмпирической модели — 1400. На основе одношаговых прогнозов и матриц ковариаций ошибок прогнозов или их оценок строились квази-оптимальные портфели, а на основе математических ожиданий и матриц ковариаций доходностей активов или их оценок строились классические средне-дисперсионные портфели.

На основе реальных доходностей активов находились реальные доходности и ошибки прогнозов доходностей портфелей. Рассчитывались выборочные оценки математических ожиданий доходностей и ошибок доходностей портфелей, а также дисперсии доходностей (ошибок доходностей) портфелей для всех прогнозных портфелей для каждого значения модельных рядов для каждой целевой доходности *M*. Портфели моделировались для целевых доходностей *M*, принимающих значения от 0 до 0.05 с шагом 0.0005, таким образом были смоделированы характеристики портфелей для 101 целевой доходности.

На рисунке 1 представлены характеристики квази-оптимальных портфелей и портфелей Марковица, которые также будем называть оптимальными средне-дисперсионными портфелями, построенных на смоделированных данных. Портфели строились как на основе прогнозов теоретических моделей, так и на основе эмпирического оценивания моделей.

Характеристики квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей отличаются друг от друга, начиная с определенного уровня целевой доходности *M*, причем характеристики средне-дисперсионных портфелей отличаются между собой для теоретических и эмпирических моделей. Значимость указанных различий будет проверена в дальнейшем. Пересечение границы квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей говорит о целесообразности выбора той или иной портфельной стратегии в зависимости от целевой доходности *M*.

Пересечение границ оптимальных портфелей говорит о возможности построения портфелей, состоящих одновременно из частей средне-дисперсионного и квази-оптимального портфелей. В связи с тем, что любая эффективная граница должна быть вогнутой (Шарп и др., 2006), для построения эффективной границы, включающей в себя как квази-оптимальные, так и средне-дисперсионные портфели, необходимо вычислять ожидаемые доходности и дисперсии линейной комбинации указанных портфелей, что требует информации о ковариации их доходностей. Так как вычисление ковариации доходностей указанных

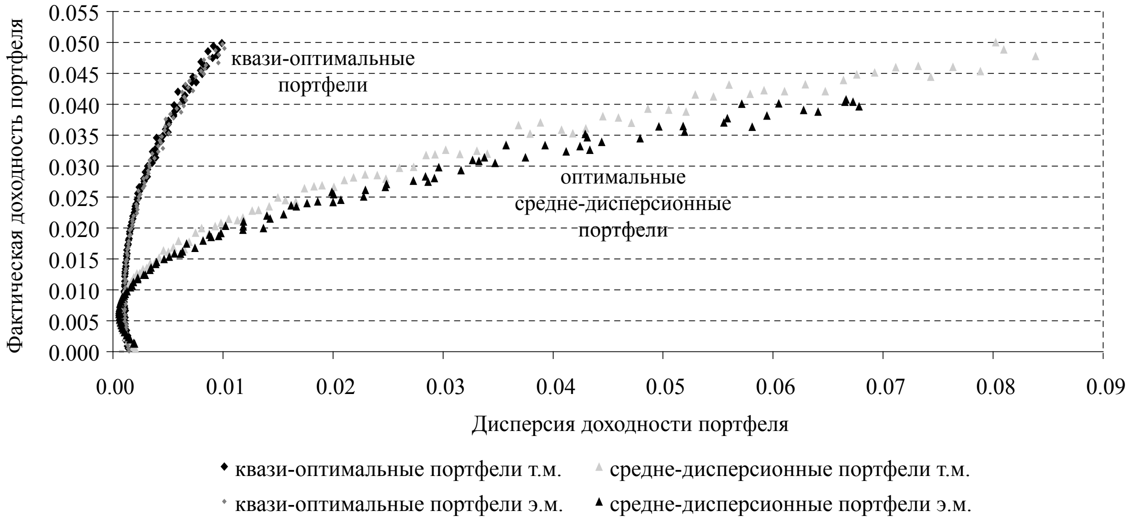

Рис. 1. Множество квази-оптимальных и оптимальных средне-дисперсионных портфелей (теоретические модели — т.м., эмпирические модели — э.м.)

портфелей требует дополнительных расчетов, выходящих за рамки данного исследования, на рис. 2 представлена совместная эффективная граница квази-оптимальных и оптимальных средне-дисперсионных портфелей, состоящая из частей эффективных границ указанных портфелей.

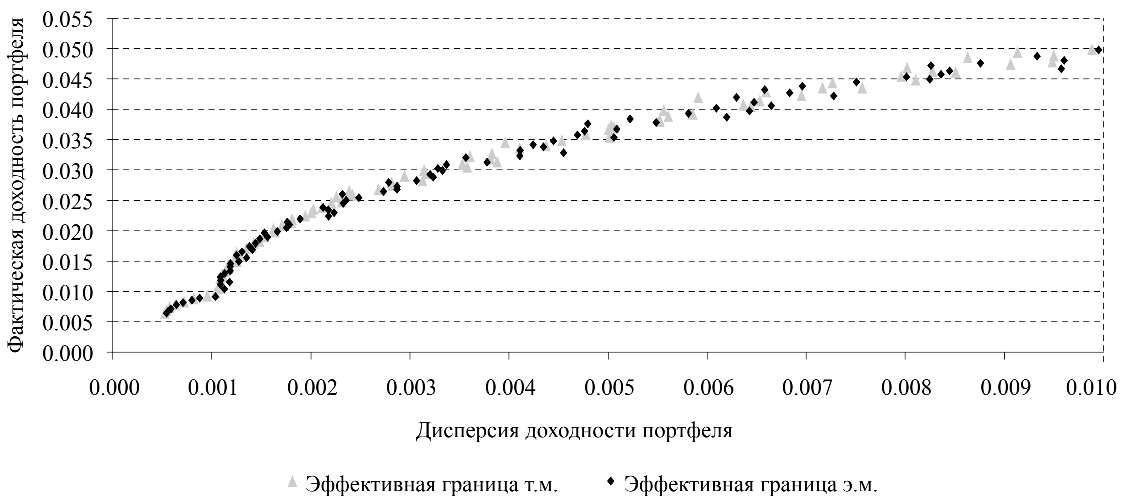

Рис. 2. Совместная эффективная граница квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей (теоретические модели — т.м., эмпирические модели — э.м.)

Сравнение характеристик квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей осуществлялось на основе сравнения коэффициентов Шарпа (см. рис. 3).

Графики, образованные коэффициентами Шарпа для оптимальных средне-дисперсионных и квази-оптимальных портфелей, пересекаются в точке с целевой доходностью порт-

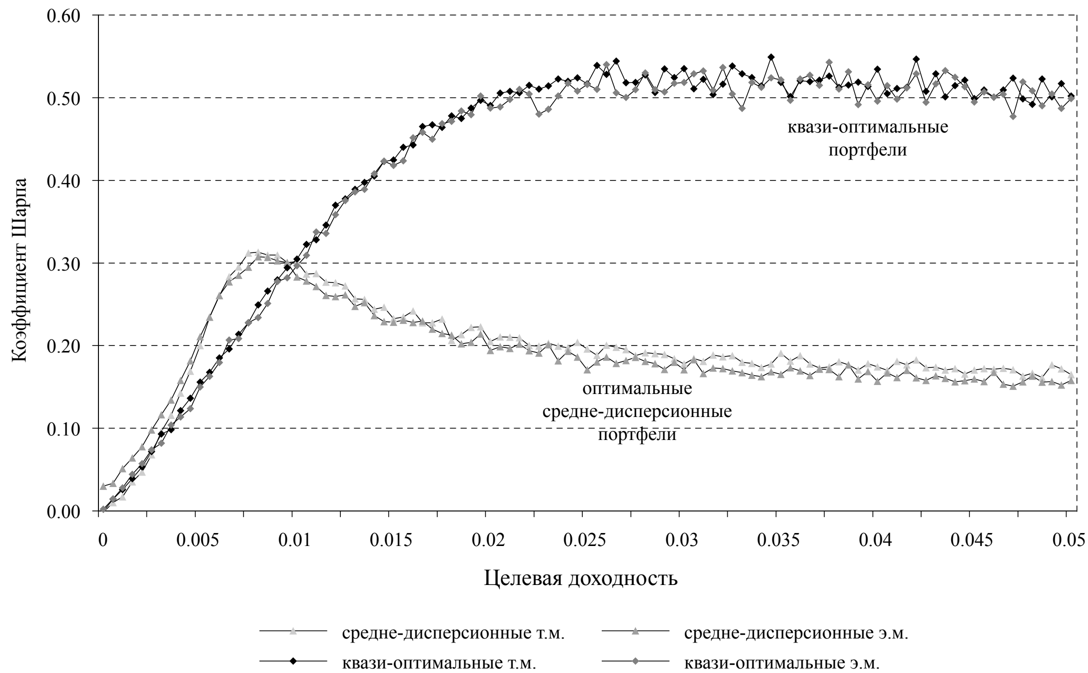

Рис. 3. Коэффициенты Шарпа квази-оптимальных и оптимальных средне-дисперсионных портфелей (теоретические модели — т.м., эмпирическое оценивание — э.м.)

фелей $M = 0.01$, что еще раз подтверждает «кусочный характер» совместной эффективной границы.

Проверка достоверности отличия коэффициентов Шарпа для квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей с одинаковыми целевыми доходностями и определение уровня значимости отличия осуществлялось на основе подхода (Jobson, Korkie, 1981) и его корректировки (Memmel, 2003). Обозначим:

$$\hat{\mu}_{quasi} = \hat{\mathrm{E}}\left(P\left(\omega^{quasi}\right)\right),\ \hat{\mu}_M = \hat{\mathrm{E}}\left(P\left(\omega^{M}\right)\right),\ \hat{\sigma}_{quasi} = \sqrt{\hat{\mathrm{D}}\left(P\left(\omega^{quasi}\right)\right)},\ \hat{\sigma}_M = \sqrt{\hat{\mathrm{D}}\left(P\left(\omega^{M}\right)\right)},$$

$$\hat{\sigma}_{q,M} = \widehat{\mathrm{cov}}\left(P\left(\omega^{quasi}\right), P\left(\omega^{M}\right)\right).$$

Сравнение коэффициентов Шарпа для квази-оптимального и средне-дисперсионного портфелей заключается в проверке следующей гипотезы:

$$\mathbf{H}_0:\quad \hat{\mu}_{quasi} / \hat{\sigma}_{quasi} - \hat{\mu}_M / \hat{\sigma}_M = 0. \tag{30}$$

Для проверки гипотезы строится тестовая статистика

$$\hat{Z}_{JK} = \frac{\hat{\sigma}_M \hat{\mu}_{quasi} - \hat{\sigma}_{quasi} \hat{\mu}_M}{\sqrt{\hat{\vartheta}}}, \tag{31}$$

где $\hat{\vartheta} = \frac{1}{T-S}\left(2\hat{\sigma}^2_{quasi}\hat{\sigma}^2_M - 2\hat{\sigma}_{quasi}\hat{\sigma}_M\hat{\sigma}_{q,M} + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2_{quasi}\hat{\sigma}^2_M + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2_M\hat{\sigma}^2_{quasi} - \frac{\hat{\mu}_{quasi}\hat{\mu}_M}{\hat{\sigma}_{quasi}\hat{\sigma}_M}\hat{\sigma}^2_{q,M}\right)$, $T-S$ — размер выборочной совокупности.

Указанная статистика асимптотически сходится к нормальному распределению при выполнении предположения о том, что доходности портфелей — независимые и нормально распределенные случайные величины, хотя на практике это зачастую не выполняется (Mandelbrot, Hudson, 2004; Marcellino, 2002; RiskMetrics Group, 1996).

Сравнение между собой коэффициентов Шарпа теоретических и эмпирических моделей как для квази-оптимальных, так и для средне-дисперсионных портфелей не выявило их значимого отличия. Это может говорить о достаточной точной оценке коэффициентов модели на основе данных сдвигающегося окна S, но не о точности оценок характеристик рядов, что будет показано в дальнейшем. Сравнение коэффициентов Шарпа для квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей производилось отдельно для теоретических и эмпирических моделей. На рисунке 4 приведены уровни значимости тестовой статистики $\hat{Z}_{JK}$.

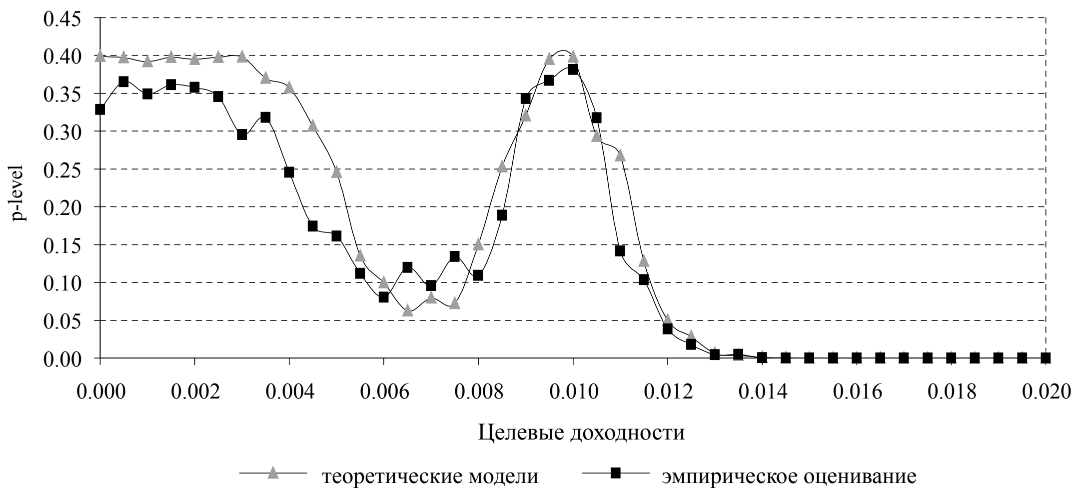

Рис. 4. Уровни значимости тестовой статистики $\hat{Z}_{JK}$ для сравнения коэффициентов Шарпа квази-оптимаьных и оптимальных средне-дисперсионных портфелей

Из рисунка 4 видно, что коэффициенты Шарпа как для теоретических моделей, так и для эмпирического оценивания, для квази-оптимальных и оптимальных средне-дисперсионных портфелей значимо отличаются на 5%-ном уровне для целевых доходностей портфелей M, превышающих 0.012. Отсутствие монотонности графика уровней значимости объясняется двумя пересечениями множеств квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей, изображенных на рис. 1. В точках пересечения указанных кривых коэффициенты Шарпа для квази-оптимальных и средне-дисперсионных портфелей совпадают, что отображается в виде двух локальных максимумов уровней значимости на рис. 4.

Ошибки квази-оптимального портфеля, как для теоретических, так и для эмпирических моделей, значимо не отличаются от нуля на 1%-ном уровне значимости, что говорит о точности, а следовательно, и устойчивости квази-оптимальных портфелей. В связи с тем, что на рис. 1 было отмечено отличие характеристик теоретических и эмпирических моделей для средне-дисперсионного портфеля, рассмотрим характеристики ошибок указанных портфелей, которые представлены на рис. 5.

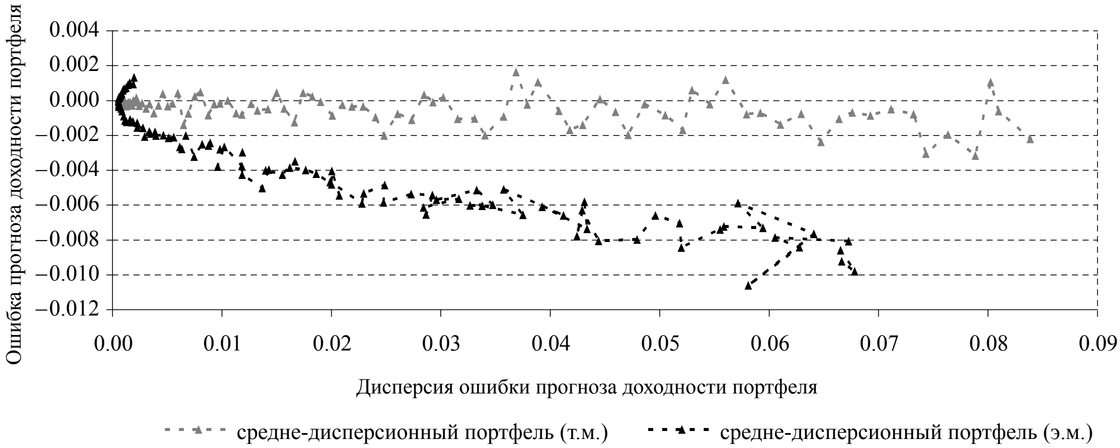

Рис. 5. Характеристики ошибок оптимальных средне-дисперсионных портфелей (теоретические модели — т.м., эмпирические модели — э.м.)

Ошибки средне-дисперсионного портфеля значимо не отличаются от нуля на 1%-ном уровне для теоретических моделей, в то время как для эмпирического оценивания ошибки значимо не отличаются от нуля на 10%-ном уровне, что подтверждает отличие характеристик средне-дисперсионных портфелей для теоретических и эмпирических моделей.

6. Эмпирическое исследование

Для проведения эмпирического исследования использовались исторические ежедневные значения трех международных индексов акций ЭМ-ЭС-СИ-АЙ (MSCI Index, далее — индексы): MSCI North America Standard Index (индекс North America), MSCI Europe Standard Index (индекс Europe) и MSCI Pacific Standard Index (индекс Pacific). Индексы рассчитываются компанией Morgan Stanley Capital International и представляют собой взвешенные индексы свободно обращающихся акций развитых стран. Индексы рассчитываются с поправкой на рыночную капитализацию акций. Все используемые индексы номинированы в долларах США и являются индексами полной доходности, реинвестирующими сумму средств по дивидендам, оставшихся после уплаты налогов.

Индекс North America состоит из фондовых индексов стран Северной Америки и включает в себя акции Канады и США. Индекс Europe состоит из фондовых индексов акций 16 развитых стран Европы: Австрии, Бельгии, Великобритании, Германии, Греции, Дании, Италии, Ирландии, Испании, Нидерландов, Норвегии, Португалии, Финляндии, Франции, Швеции и Швейцарии. Индекс Pacific состоит из 5 фондовых индексов стран, отнесенных к Тихоокеанскому региону: Австралия, Гонконг, Новая Зеландия, Сингапур и Япония. Таким образом, можно сказать, что рассматриваемые индексы включают в себя все фондовые индексы развитых стран за исключением фондового индекса Израиля.

Данные были приведены к ежедневным доходностям за период с 1 июля 2008 г. по 31 мая 2012 г. и составили 1023 наблюдения. Для построения моделей и проведения внутривыборочного моделирования использовались 623 наблюдения за период с 1 июля 2008 г. по 18 ноября 2010 г., а оставшиеся 400 значений (с 19 ноября 2010 г. по 31 мая 2012 г.) использовались для проведения вневыборочного анализа, а именно для построения прогнозов доходностей и матриц условных ковариаций ошибок прогнозов индексов, которые использовались для формирования квази-оптимальных портфелей и сравнения их характеристик. Описательные статистики рядов приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Описательные статистики индексов (за период с 1 июля 2008 г. по 31 мая 2012 г.)

Выборочные характеристики	Индекс North America	Индекс Europe	Индекс Pacific
среднее	0.0002	−0.0001	−0.0001
стандартное отклонение	0.0174	0.0203	0.0156
асимметрия	−0.1375	0.1865	−0.1644
эксцесс	9.5714	7.3802	8.5994
минимум	−0.0907	−0.0968	−0.0877
максимум	0.1099	0.1129	0.1033

Таблица 2. Описательные статистики индексов (за разные периоды)

Выборочные характеристики	Индекс North America	Индекс Europe	Индекс Pacific
С 1 июля 2008 г. по 18 ноября 2010 г.			
среднее	0.0001	−0.0001	0.0
стандартное отклонение	0.02	0.0222	0.0176
асимметрия	−0.0762	0.2853	−0.1152
эксцесс	8.3548	7.4897	7.9171
минимум	−0.0907	−0.0968	−0.0877
максимум	0.1099	0.1129	0.1033
С 19 ноября 2010 г. по 31 мая 2012 г.			
среднее	0.0004	−0.0002	−0.0003
стандартное отклонение	0.0122	0.0166	0.0117
асимметрия	−0.4662	−0.2372	−0.438
эксцесс	7.1349	4.3545	5.8195
минимум	−0.0653	−0.0622	−0.0638
максимум	0.0468	0.0594	0.045

Данные обоих периодов отличаются между собой, при этом им не свойственна нормальность, о чем свидетельствует наличие асимметрии и островершинность распределений. Так, для выборочных данных характерна бóльшая волатильность и меньшая асимметричность, что определялось сначала острой фазой кризисных явлений в мировой экономике, а потом — быстрым посткризисным восстановлением 2009 года. Изменение асимметрии индекса Europe, которая в первый период была положительной, а во второй — отрицательной, можно объяснить смещением внимания с проблем мировой экономики на долговые проблемы сначала европейского банковского сектора, а потом — на долговые проблемы стран Европейского союза. Наличие единичных корней в исследуемых индексах было отвергнуто на 1%-ном уровне значимости.

Таблица 3. Значения информационных критериев моделей

Модель	Критерий Акаике (AIC)	Критерий Шварца (SC)	Критерий Хана–Куина (HQ)
VAR(0)	–15.74	–15.72	–15.73
VAR(1)	–16.68	–16.43	–16.65
VAR(2)	–16.77	–16.62*	–16.69
VAR(3)	–16.79*	–16.60	–16.72*
VAR(4)	–16.78	–16.50	–16.67

Примечание. * — наименьшие значения соответствующих критериев.

Количество лагов *k* для модели VAR было выбрано согласно показателям информационных критериев (Шварца, Акаике, Хана–Куина), значения которых представлены в табл. 3. На основе указанных критериев была выбрана VAR(3) модель, оценки которой приведены в табл. 4.

Таблица 4. Оценки параметров трехмерной модели VAR

Индекс	*const*		Π_1			Π_2			Π_3	
North America	0.0	−0.179***	0.112*	−0.078	−0.076	−0.019	−0.1	0.133**	−0.003	0.034
	(0.0)	(0.0588)	(0.061)	(0.07)	(0.075)	(0.0694)	(0.073)	(0.068)	(0.061)	(0.055)
Europe	0.0	0.63***	−0.396***	–0.039	0.213***	−0.176**	–0.081	0.173**	−0.099*	0.042
	(0.0008)	(0.0607)	(0.063)	(0.072)	(0.077)	(0.0716)	(0.075)	(0.07)	(0.07)	(0.057)
Pacific	0.0	0.494***	0.211***	−0.444***	0.181***	0.1**	−0.218***	0.127***	0.032	−0.04
	(0.0005)	(0.0376)	(0.039)	(0.045)	(0.048)	(0.044)	(0.047)	(0.043)	(0.039)	(0.035)

Примечание. В таблице представлены оценки параметров VAR(3) модели и их стандартные ошибки (в скобках). Π_1, Π_2, Π_3 — матрицы параметров векторной авторегрессии, *const* — константы. *, **, *** — значимость коэффициентов на 10, 5 и 1%-ном уровне соответственно.

Остатки модели VAR(3) представлены на рис. 6, а их описательные статистики — в табл. 5. В остатках отсутствуют единичные корни и автокорреляция (тест множителей Лагранжа), тест Вайта отклонил гипотезу об отсутствии гетероскедастичности в остатках. Для квадратов остатков условие отсутствия автокорреляции не выполняется. Остатки образуют определенного вида кластеры с высокой волатильностью, что может свидетельствовать о наличии условной гетероскедастичности в остатках модели. Подобные характеристики свойственны многим финансовым временным рядам. Это требует построения специфических моделей условной гетероскедастичности для описания поведения остатков, а в нашем случае — многомерных моделей условной гетероскедастичности, которые будут использоваться для построения прогнозов матриц ковариаций ошибок.

Построение моделей ковариационных матриц началось с векторной модели исправления ошибок (Vector Error Correction Model, VECM), которая явилась следствием одномерной модели обобщенной условной авторегрессионной гетероскедастичности (GARCH) на век-

Таблица 5. Описательные статистики остатков VAR(3) модели

Выборочные характеристики	Индекс North America	Индекс Europe	Индекс Pacific
среднее	0.0	0.0	0.0
стандартное отклонение	0.0196	0.02	0.0125
асимметрия	−0.1266	0.0313	0.2993
эксцесс	7.6345	5.3769	6.8681
минимум	−0.0896	−0.0768	−0.0586
максимум	0.1079	0.0937	0.068

торный случай (Bollerslev et al., 1988). В дальнейшем была предложена более компактная BEKK модель (Engle, Kroner, 1995). Модели VECM и BEKK оказались неудобными для практического применения из-за большого количества оцениваемых параметров, неясности интерпретации, а также сложности ограничений, гарантирующих положительную определенность ковариационной матрицы. Поэтому им на смену пришли новые модели, отдельно представляющие динамику корреляций и волатильности, в том числе модель постоянных условных корреляций (Constant Conditional Correlation, CCC) (Bollerslev, 1990) и модель динамических условных корреляций (Dynamic Conditional Correlation, DCC) (Tse, Tsui, 2002; Engle, 2001). Указанные модели, а также их модификации (Cappiello et al., 2006) пользуются в последнее время определенной популярностью среди исследователей портфельной теории (Колоколов, 2011; Yilmaz, 2010; Михаленок, Малюгин, 2011). Приведем краткое описание указанных моделей, более подробное описание смотри в работах (Lütkepohl, 2005; Bollerslev, 1990).

Эмпирическое исследование в данное статье посвящено оцениванию практической эффективности предложенных теоретических подходов по формированию и управлению инвестиционными портфелями международных инвесторов. Формирование квази-оптимальных портфелей осуществлялось на основе прогнозов доходностей модели VAR(3) и прогнозов матриц ковариаций ошибок прогнозов доходностей, которые строились с помощью двух многомерных GARCH моделей различных размерностей: диагональной BEKK и CCC.

Предположим, что вектор ошибок модели VAR(3) имеет вид $\varepsilon_t = \Sigma_{t|t-1}^{1/2} z_t$, где $\Sigma_{t|t-1} \in R^{3\times 3}$ — положительно определенная условная матрица ковариаций, $z_t \in R^{3\times 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, $\mathrm{E}(z_t) = 0$ и $\mathrm{Var}(z_t) = I$, где I — единичная матрица. В силу разложения Холецкого, матрица $\Sigma_{t|t-1}$ представима как

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid I_{t-1}) = \Sigma_{t|t-1}^{1/2} \mathrm{Var}(z_t) \left(\Sigma_{t|t-1}^{1/2}\right)' = \Sigma_{t|t-1}. \tag{32}$$

Диагональная BEKK модель имеет следующее представление условной матрицы ковариаций:

$$\Sigma_{t|t-1} = CC' + \sum_{j=1}^{p} A_j' \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}' A_j + \sum_{j=1}^{q} B_j' \Sigma_{t-j-1|t-j-2} B_j, \tag{33}$$

где A_j', B_j' — диагональные матрицы, C — нижняя треугольная матрица. В данной работе использовались диагональные BEKK(p,q) модели при $p,q = 1,2$. Оценки коэффициентов BEKK модели представлены в табл. 6.

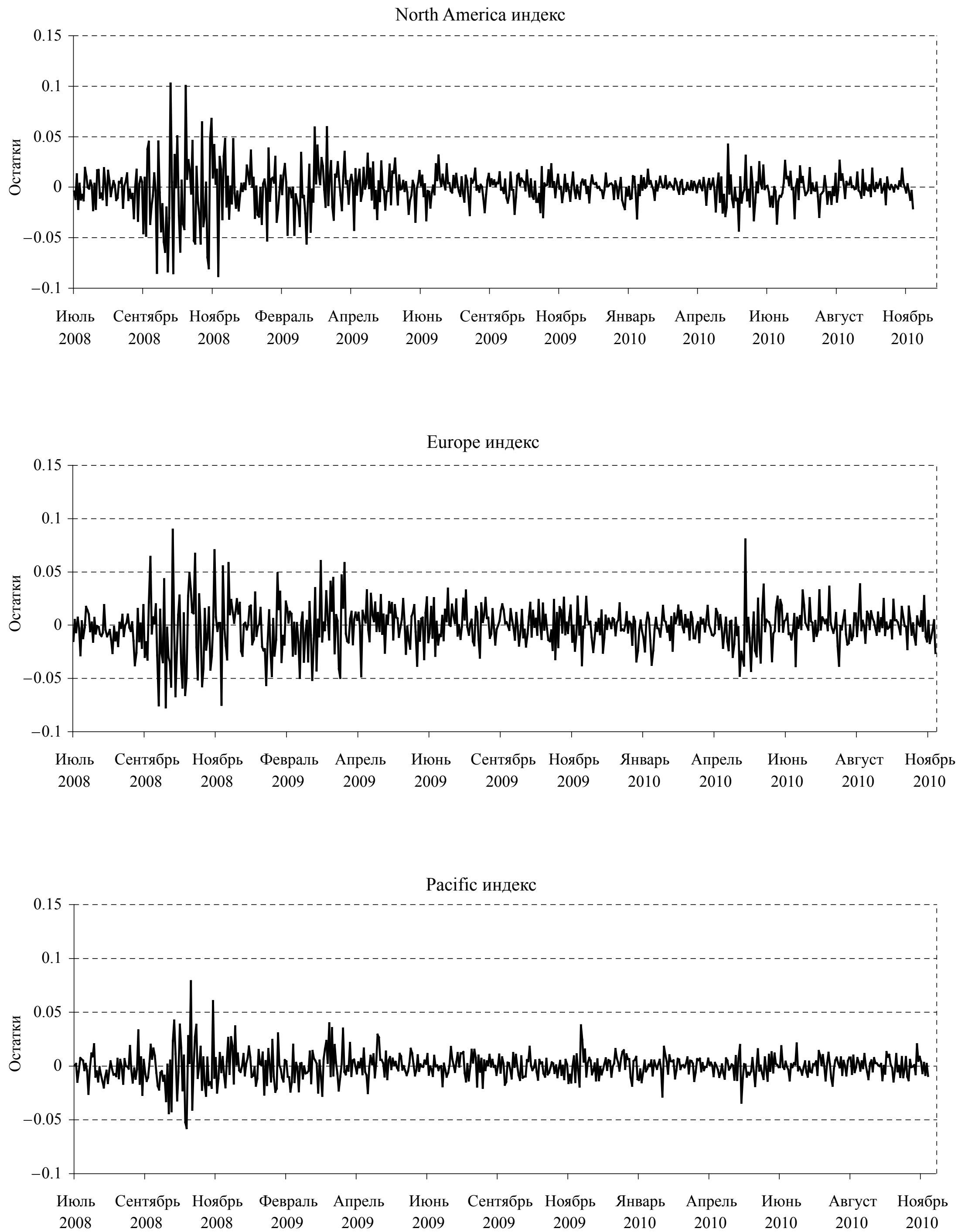

Рис. 6. Остатки модели VAR(3)

Для моделей типа CCC или DCC, учитывающих условную корреляцию ошибок, общим является следующее представление ковариационных матриц:

$$\Sigma_{t|t-1} = D_{t-1} R_{t-1} D_{t-1}, \tag{34}$$

где $R_t = \left(\rho_{ijt}\right) \in R^{N\times N}$ — матрица условных корреляций, $D_t = \mathrm{diag}\left(\sigma_{11t}, \ldots, \sigma_{NNt}\right)$ — диагональная матрица, элементами которой являются условные стандартные ошибки модели. В данной работе для оценки волатильности σ_{it} использовались одномерные $\mathrm{GARCH}(p,q)$ модели для $p, q = 1, 2$:

$$\sigma^2_{t|t-1} = \mathrm{D}\left(\varepsilon_t \mid I_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(\varepsilon^2_t \mid I_{t-1}\right) = const + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \varepsilon^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma^2_{t-j-1|t-j-2}. \tag{35}$$

Простейшим предположением относительно корреляционной матрицы ошибок R_t является предположение о постоянстве корреляций во времени, что нашло свое отражение в модели многомерной условной гетероскедастичности с постоянной условной корреляционной матрицей (CCC). Корреляционная матрица такой модели представима как

$$R_t = R = \left(\rho_{ij}\right). \tag{36}$$

Оценка корреляционной матрицы осуществляется следующим образом:

$$\hat{R}_t = \left(\hat{\rho}_{ij}\right),\ \hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\mathrm{Z}}_{ij}}{\sqrt{\hat{\mathrm{Z}}_{ii}\hat{\mathrm{Z}}_{jj}}},\ \hat{\mathrm{Z}} = \hat{\mathrm{Z}}^2_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} z_t z_t',\ z_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sigma^2_{iit}},\ i = 1,\ldots,N,\ t = 1,\ldots,T, \tag{37}$$

где T — размер выборочной совокупности для оценки модели. Компоненты случайного вектора $z_t = \left(z_{it}\right) \in R^{N\times 1}$ являются стандартизированными остатками.

В данной работе оценивались $\mathrm{CCC}\left(p,q\right)$ модели, где $p, q = 1, 2$. Оценки коэффициентов модели и матрицы корреляций представлены в табл. 7.

Значения функции правдоподобия и информационных критериев (Шварца, Акаике, Хана–Куина) представлены в табл. 8.

Результаты, представленные в табл. 7, не могут однозначно указать на наилучшую модель, однако можно с уверенностью сказать, что предпочтение лежит на стороне CCC моделей. Среди моделей BEKK наилучшей является BEKK(2,1) модель.

Как и в разделе 5, для построения портфелей рассматривались фиксированные значения целевой доходности портфелей M, лежащие в интервале от 0 до 0.05 с шагом 0.0005. На основе одношаговых прогнозов доходностей и матриц ковариаций ошибок строились квази-оптимальные портфели, а на основе выборочных средних и оценок матриц ковариаций доходностей активов строились классические средне-дисперсионные портфели. Квази-оптимальные портфели были представлены тремя моделями VAR-BEKK и тремя VAR-CCC моделями.

Средне-дисперсионные портфели, как при внутривыборочном, так и при вневыборочном анализе для целевых доходностей выше 0.002 и 0.0045 соответственно, на одном из шагов показывали доходности ниже или равные –1.0, т. е. по сути в портфеле не оставалось средств. В то же время вневыборочный анализ средне-дисперсионных портфелей показал, что с увеличением целевой доходности номер шага, на котором портфель впервые показывал доходность меньше –1.0, уменьшался. Так, для целевых доходностей от 0.0045 до 0.008 портфель обесценивался на 223-м шаге (27 сентября 2011 г.), от 0.008 до 0.001 — на 187-м

Таблица 6. Оценки параметров диагональных BEKK моделей

Модель	C			A_1			A_2			B_1			B_2		
BEKK(1,1)	0.002*** (0.0003)			0.275*** (0.0236)						0.957*** (0.0072)					
	0.002*** (0.0004)	0.002*** (0.0003)			0.23*** (0.0218)						0.963*** (0.0065)				
	0.001** (0.0004)	0.001** (0.0005)	0.002*** (0.0004)			0.335*** (0.0354)						0.913*** (0.0188)			
BEKK(2,1)	0.002*** (0.0003)			0.033 (0.0581)			0.3*** (0.028)			0.942*** (0.01)					
	0.003*** (0.0006)	0.002*** (0.0005)			−0.101* (0.0559)			0.299*** (0.0386)			0.927*** (0.0154)				
	0.001*** (0.0004)	0.0027*** (0.0009)	0.001 (0.0019)			0.247*** (0.0529)			0.261*** (0.0586)			0.895*** (0.0258)			
BEKK(1,2)	0.002*** (0.0004)			0.283*** (0.0361)						0.948*** (0.0936)			0.106 (0.7632)		
	0.003*** (0.0006)	0.002*** (0.0004)			0.262*** (0.0381)						0.943*** (0.1175)			0.132 (0.7691)	
	0.001** (0.0007)	0.002* (0.001)	0.0 (0.1937)			0.3*** (0.0509)						0.905*** (0.196)			–0.225 (0.7154)
BEKK(2,2)	0.002*** (0.0005)			0.277*** (0.048)			–0.047 (0.1165)			0.94*** (0.1784)			0.128 (1.1903)		
	0.003*** (0.0007)	0.001 (0.0007)			0.244*** (0.059)			0.094 (0.0957)			0.941*** (0.1539)			0.112 (1.178)	
	0.001* (0.0008)	0.001 (0.0019)	0.001 (0.0013)			0.249*** (0.0629)			0.179 (0.1267)			0.915*** (0.2537)			–0.183 (1.125)

Примечание. В таблице представлены оценки параметров BEKK(p, q) моделей для остатков модели VAR (3) и их стандартные ошибки (в скобках). Параметры записаны в виде матриц: C — матрица констант. *, **, *** — значимость коэффициентов на 10, 5 и 1%-ном уровне соответственно.

Таблица 7. Оценки параметров и матрицы корреляций моделей CCC

Модель	*const*	γ_1	γ_2	β_1	β_2	*R*		
CCC(1,1)	0.0 (0.0)	0.1*** (0.019)		0.892*** (0.0183)		1.0	0.742*** (0.0182)	0.227*** (0.0409)
	0.0 (0.0)	0.086*** (0.0182)		0.895*** (0.0204)		0.742*** (0.0182)	1.0	0.397*** (0.0356)
	0.0 (0.0)	0.093*** (0.0178)		0.88*** (0.0233)		0.227*** (0.0409)	0.397*** (0.0356)	1.0
CCC(2,1)	0.0 (0.0)	0.028 (0.0325)	0.087** (0.0385)	0.876*** (0.0221)		1.0	0.738*** (0.0188)	0.225*** (0.0408)
	0.0 (0.0)	0.072** (0.0362)	0.02 (0.0412)	0.887*** (0.0253)		0.738*** (0.0188)	1.0	0.395*** (0.0357)
	0.0 (0.0)	0.086** (0.039)	0.012 (0.0458)	0.874*** (0.0297)		0.225*** (0.0408)	0.395*** (0.0357)	1.0
CCC(2,1)	0.0 (0.0)	0.043*** (0.0144)		1.596*** (0.1226)	−0.642*** (0.1087)	1.0	0.737*** (0.0185)	0.223*** (0.0405)
	0.0 (0.0)	0.049** (0.0205)		1.464*** (0.2296)	−0.525** (0.2071)	0.737*** (0.0185)	1.0	0.395*** (0.0356)
	0.0 (0.0)	0.09** (0.0404)		0.938** (0.4803)	–0.056 (0.4349)	0.223*** (0.0405)	0.395*** (0.0356)	1.0
CCC(2,1)	0.0 (0.0)	0.022 (0.032)	0.031 (0.0469)	1.528*** (0.1864)	−0.586*** (0.1618)	1.0	0.736*** (0.0189)	0.222*** (0.0407)
	0.0 (0.0)	0.043 (0.0282)	0.007 (0.0584)	1.452*** (0.4388)	–0.516 (0.3854)	0.736*** (0.0189)	1.0	0.394*** (0.0357)
	0.0 (0.0)	0.077*** (0.0209)	0.102*** (0.0235)	–0.055 (0.0673)	0.822*** (0.0716)	0.222*** (0.0407)	0.394*** (0.0357)	1.0

Примечание. В таблице представлены оценки параметров CCC(p,q) моделей для остатков модели VAR(3) и их стандартные ошибки (в скобках). Параметры записаны для GARCH(p,q) моделей, где: *const* — константы, γ_i и β_i — ARCH и GARCH параметры в одномерных GARCH-моделях соответственно, представленных в (35), при этом одномерные GARCH-модели строились для каждого ряда в отдельности. *R* — матрицы корреляций. *, **, *** — значимость на 10, 5 и 1%-ном уровне соответственно.

Таблица 8. Значения информационных критериев и функции правдоподобия моделей

Модель	Функция правдоподобия (LM)	Критерий Акаике (AIC)	Критерий Шварца (SC)	Критерий Хана–Куина (HQ)
CCC(1,1)	5562.15	–17.80	−17.51*	−17.69*
CCC(1,2)	5566.23	−17.81*	–17.49	–17.68
CCC(2,1)	5564.40	–17.80	–17.48	–17.68
CCC(2,2)	5567.36*	–17.80	–17.46	–17.67
diag BEKK(1,1)	5530.55	–17.71	–17.40	–17.59
diag BEKK(1,2)	5537.09	–17.72	–17.39	–17.59
diag BEKK(2,1)	5556.01	–17.78	–17.46	–17.65
diag BEKK(2,2)	5535.13	–17.70	–17.36	–17.57

Примечание. * — наименьшие значения соответствующих информационных критериев и максимальное значение функции правдоподобия.

шаге (8 августа 2011 г.), от 0.01 до 0.0165 — на 46-м шаге (21 января 2011 г.), для доходностей от 0.0165 и выше на 10-м шаге (2 декабря 2010 г.). Указанные дни не отмечались чрезвычайными событиями, которые могли бы привести к значительным колебаниям цен на рынке, а следовательно, обесценение портфелей произошло вследствие реализации повышенных рисков для установленных целевых доходностей. Таким образом, из 101-го средне-дисперсионного портфеля (каждый из которых строился для отдельной целевой доходности) только 4 при внутривыборочном и 9 при вневыборочном анализе смогли продемонстрировать положительную доходность. Указанный факт не позволяет адекватно осуществить сравнение характеристик средне-дисперсионных и квази-оптимальных портфелей, т. к. ставит средне-дисперсионные портфели в заведомо несопоставимые условия по рисковости реализации их стратегии, в связи с чем указанное сравнение не проводилось. Отметим, что средние доходности средне-дисперсионных портфелей лежат в диапазонах 0–1.21 (для внутривыборочного анализа) и 0–0.76 (для вневыборочного анализа), а стандартные отклонения ошибок прогнозов доходностей — в диапазонах 0.018–3.4 и 0.01–2.23 соответственно. Для VAR-BEKK и VAR-CCC портфелей указанные значения лежат в диапазонах 0–0.043 и 0–0.04 для средних, 0.01–0.2 и 0.018–0.14 для стандартных отклонений (для внутривыборочного и вневыборочного анализа соответственно). Эти данные говорят: во-первых, об отличии характеристик портфелей при внутривыборочном и вневыборочном анализе, что обусловлено особенностями указанных периодов, а во-вторых, о чрезвычайно больших отклонениях прогнозов от целевых значений доходностей средне-дисперсионных портфелей и, соответственно, о чрезвычайной рисковости средне-дисперсионной стратегии по сравнению с квази-оптимальной. В дальнейшем будет осуществлено сравнение характеристик портфелей, построенных с помощью моделей VAR-BEKK и VAR-CCC. Портфели, построенные с помощью прогнозов доходностей и прогнозов матриц ковариаций ошибок доходностей VAR-BEKK и VAR-CCC моделей, будем называть BEKK- и CCC-портфелями. Сравнение портфелей проводилось как для доходностей, так и для ошибок прогнозов доходностей портфелей для внутривыборочного и вневыборочного периодов. Характеристики указанных портфелей для вневыборочного анализа представлены на рис. 7.

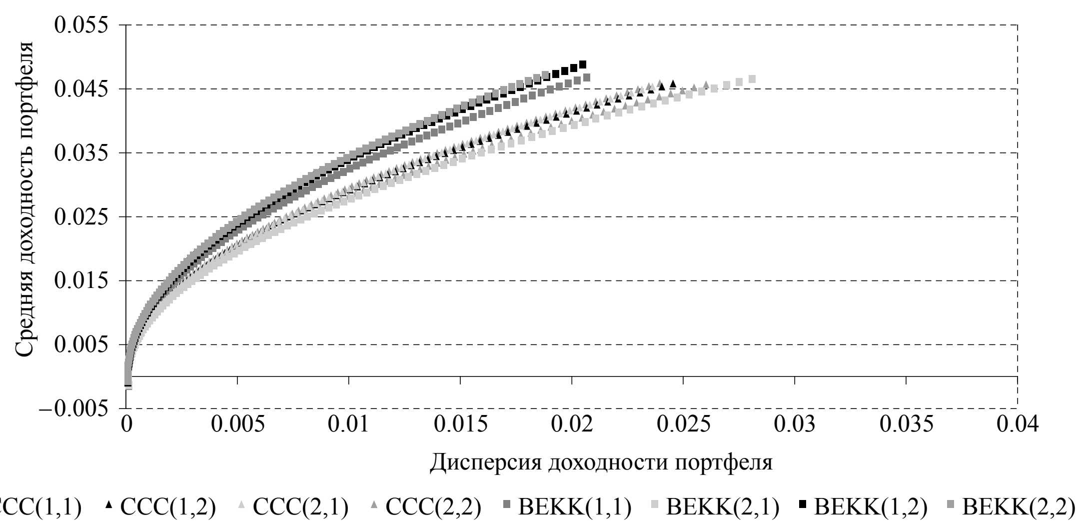

Рис. 7. Характеристики квази-оптимальных портфелей, построенных на основе VAR-CCC и VAR-BEKK моделей (вневыборочный анализ)

Вневыборочные портфели показывают значительно меньшую дисперсию доходности портфелей по сравнению с внутривыборочными, что объясняется повышенной волатильностью внутривыборочного периода. Для внутривыборочного периода среди BEKK-портфелей наилучшим является BEKK(2,2)-портфель, в то время как все CCC-портфели обладают достаточно близкими свойствами.

Из рисунка 7 видно, что CCC- и BEKK-портфели образуют по своим характеристикам две группы, исключением является портфель, условная матрица ковариаций которого строилась на основе модели BEKK(2,1), остальные BEKK-портфели превосходят по своим характеристикам CCC-портфели, поскольку показывают большие выборочные доходности и меньшие дисперсии. CCC-портфели достаточно схожи по своим характеристикам. Несмотря на то что информационные критерии отдали предпочтение моделям CCC, портфели, построенные на их основе, уступают по своим характеристикам BEKK-портфелям. Для определения статистически значимого отличия характеристик портфелей сравним их коэффициенты Шарпа. На рисунке 8 представлены коэффициенты Шарпа портфелей для вневыборочного анализа.

Если рассматривать этот коэффициент в качестве критерия отбора модели ценообразования при формировании квази-оптимального портфеля, то вневыборочный анализ показал, что для доходностей свыше 0.001 следует использовать модель BEKK(2,2), а для доходностей от 0 до 0.001 — модель BEKK(1,1).

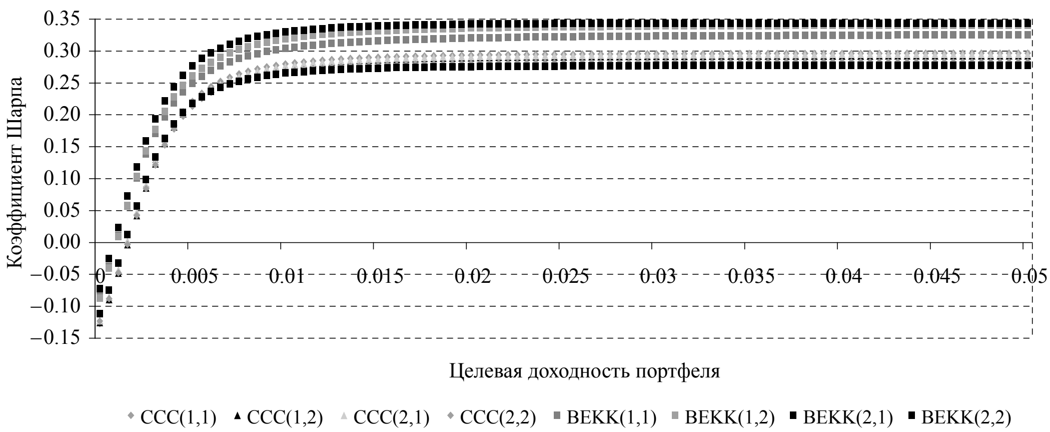

Рис. 8. Коэффициенты Шарпа квази-оптимальных портфелей, построенных на основе VAR-CCC и VAR-BEKK моделей (вневыборочный анализ)

Коэффициенты Шарпа на рис. 8 подтверждают, что BEKK(2,1)-портфель является явным аутсайдером, в то время как лидером является BEKK(2,2)-портфель, с которым конкурируют BEKK(1,2)- и BEKK(1,1)-портфели. Таким образом, выбранный на основе внутривыборочного анализа BEKK(2,2)-портфель являлся бы оптимальным (на основе коэффициента Шарпа) и для вневыборочного периода.

Сравнение значений коэффициентов Шарпа исследуемых портфелей для вневыборочного периода производилось путем проверки гипотезы об их равенстве на основе статистики $\hat{Z}_{JK}$. Приведем наиболее важные результаты указанного сравнения. Так на 5%-ном уровне значимости была отклонена гипотеза о равенстве коэффициентов Шарпа для BEKK(1,1)-, BEKK(1,2)-, BEKK(2,2)- и BEKK(2,1)-портфелей. Стоит отметить рост уровня значимости тестовой статистики гипотезы равенства коэффициентов Шарпа для BEKK(1,2)- и BEKK(2,2)-портфелей, что свидетельствует о сближении коэффициентов Шарпа указанных портфелей с ростом уровня целевой доходности. Коэффициенты Шарпа BEKK(2,1)- и BEKK(2,2)-портфелей отличаются от указанных коэффициентов всех CCC-портфелей на 10%-ном уровне значимости, а для BEKK(1,1)-портфеля на указанном уровне значимости для доходностей не выше 0.0045. Коэффициенты Шарпа значимо не отличаются друг от друга для портфелей CCC(1,1), CCC(1,2) и CCC(2,1), а для целевых доходностей не более 0.005 и для CCC(2,2)-портфеля. Была подтверждена близость коэффициентов Шарпа для BEKK(2,1)- и CCC(2,2)-портфелей, а также значимое отличие BEKK(2,1)- и BEKK (2,2)- от CCC-портфелей.

Поскольку формирование квази-оптимального портфеля связано с минимизацией дисперсии ошибки прогноза его доходности, то одним из самых важных аспектов при оценке и сравнении квази-оптимальных портфелей является исследование характеристик ошибок прогнозов их доходностей. Эти характеристики для вневыборочного анализа представлены на рис. 9.

CCC-портфели продолжают демонстрировать достаточно схожие характеристики. Среди BEKK-портфелей по-прежнему преимуществом обладает BEKK(2,2)-портфель, за которым следует BEKK(1,2)-портфель. Провести точное сравнение характеристик BEKK- и CCC-портфелей не представляется возможным в связи с тем, что CCC-портфели обладают большей средней ошибкой и меньшей ее дисперсией, подробнее об этом будет сказано ниже.

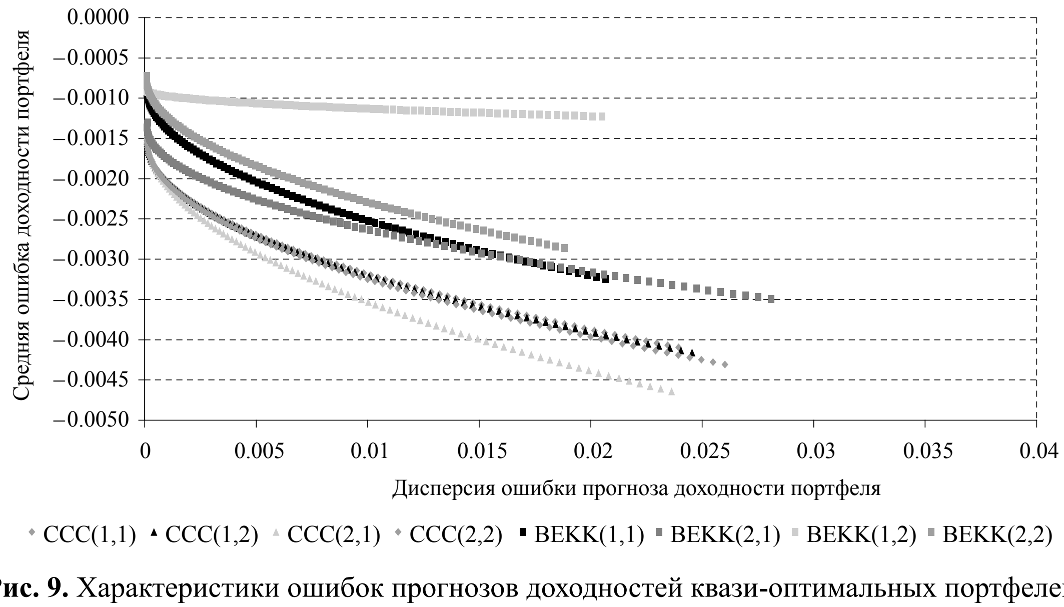

Рис. 9. Характеристики ошибок прогнозов доходностей квази-оптимальных портфелей, построенных на основе VAR-CCC и VAR-BEKK моделей (вневыборочный анализ)

Данные рисунка 9 позволяют сделать вывод о том, что характеристики BEKK(1,2)-портфеля более устойчивы по сравнению с конкурирующими портфелями. Так, он превосходит все портфели, включая даже BEKK(2,2), который превосходил его по коэффициенту Шарпа. Как видно из приведенного рисунка, BEKK(1,1)-, BEKK(1,2)- и BEKK(2,2)-портфели превосходят показатели CCC-портфелей.

В рамках одной целевой доходности *M* предпочтение стоит отдавать тем портфелям, которые имеют меньшие в абсолютном значении средние ошибки прогноза доходности и меньшую дисперсию указанных ошибок. Таким образом, необходимо сконструировать коэффициент, а также тестовую статистику для сравнения значений указанных коэффициентов, способную сравнивать средние значения и дисперсии ошибок прогнозов доходностей различных портфелей для выявления оптимальных среди них. В то же время, согласно теории, ошибки прогнозов доходностей портфелей должны иметь нулевое математическое ожидание, что, в случае выполнения указанного свойства на практике, несколько облегчило бы задачу, сведя ее к сравнению дисперсий ошибок прогнозов доходностей различных портфелей. Следует заметить, что для конструирования указанной тестовой статистики требуется знание функции распределения ошибок прогнозов доходностей портфелей, которое не определено в настоящем исследовании.

В заключение, в целях подтверждения значимости влияния ошибок прогнозов доходностей портфеля на его итоговые характеристики, в табл. 9 приведены итоговые стоимости квази-оптимальных портфелей на 31 мая 2012 г., при условии, что начальные стоимости портфелей равнялись 1.0.

Таблица 9. Итоговые стоимости квази-оптимальных портфелей

Модель	Целевые доходности портфелей (вневыборочный анализ)					
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
BEKK(1,1)	0.70	26.90	718.71	13 130.46	156 293.58	1 072 797.79
BEKK(1,2)	0.68	31.11	979.79	21 055.08	294 316.54	2 365 505.57
BEKK(2,1)	0.58	22.11	511.58	6966.14	49 710.16	130 392.74
BEKK(2,2)	0.73	29.36	832.56	16 432.13	214 910.03	1 648 843.02
CCC(1,1)	0.55	20.74	509.00	7924.15	72 710.63	321 464.05
CCC(1,2)	0.54	20.53	491.61	7276.60	60 445.01	213 985.02
CCC(2,1)	0.56	20.27	470.28	6792.64	55 009.23	182 358.52
CCC(2,2)	0.55	20.15	462.14	6384.50	47 327.89	131 391.28

Значения из таблицы 9 подтверждают результаты, приведенные на рис. 9 — бесспорным лидером по стоимости для всех целевых доходностей является BEKK(1,2)-портфель, за которым следует BEKK(2,2)- и BEKK(1,1)-портфели. Чрезвычайный рост стоимости портфелей был обеспечен отсутствием ограничения на отрицательные доли активов в составе портфеля. Такое предположение распространено в теоретических портфельных моделях, однако оно является достаточно ограничительным для реального финансового рынка. Заметим, что все квази-оптимальные портфели показали снижение своей итоговой стоимости для целевых доходностей вплоть до 0.002.

Основываясь на результатах внутривыборочного анализа, предпочтение следует отдать BEKK(2,2)-портфелю, который превосходит большинство портфелей по значению коэффициента Шарпа, а ошибки прогноза его доходности являются более устойчивыми по сравнению с остальными портфелями. Несмотря на то что вневыборочный анализ показал превосходство BEKK(1,2)-портфеля, что, скорее всего, определено различием характеристик внутривыборочных и вневыборочных данных, BEKK(2,2)-портфель уверенно превосходит характеристики остальных портфелей, что подтверждает целесообразность проведения внутривыборочного анализа портфельных стратегий на основе сравнения характеристик доходностей и ошибок доходностей портфельных стратегий.

Проведенное исследование показало, что характеристики квази-оптимальных портфелей, построенных с помощью диагональных BEKK моделей, превзошли CCC-портфели, что подтверждает выводы работы (Pojarliev, Polasek, 2002) для GMV портфелей о том, что потеря информации о ковариации не наносит значительного ущерба характеристикам портфеля.

7. Заключение

В данной статье исследовались характеристики портфелей, в качестве доходностей активов которых использовались их прогнозные значения.

Проведенное моделирование показало, что характеристики портфелей, построенных с учетом информации о модели ценообразования доходностей, могут дополнить, а при некоторых условиях и значимо превзойти характеристики классических средне-дисперсионных портфелей. Таким образом, показана значимость влияния информации модели генерации доходностей активов на структуру оптимального распределения ресурсов портфеля.

По результатам эмпирического исследования можно сделать вывод о том, что квази-оптимальные портфели, построенные с помощью модели векторной авторегрессии и моделей многомерных динамических волатильностей, значительно превосходят классические средне-дисперсионные портфели. Модели волатильности существенным образом влияют на характеристики квази-оптимальных портфелей.

Подбор модели ценообразования и волатильности для формирования квази-оптимального портфеля не следует основывать на результатах информационных критериев и значениях функции правдоподобия, т. к. характеристики портфелей, построенных на основе «наилучших» (по указанным выше критериям) моделей, значительно уступают остальным. Большинство портфелей, построенных на основе BEKK-моделей — аутсайдеров по оценкам информационных критериев — продемонстрировали лучшие характеристики по сравнению с CCC-портфелями.

Исследование выявило необходимость построения таких критериев и соответствующих им тестовых статистик, которые требуют более глубокого теоретического анализа статистических характеристик квази-оптимальных портфелей в следующих направлениях:

1) нахождение по характеристикам схемы ценообразования модели, которая будет формировать наилучший квази-оптимальный портфель, наиболее точно соответствующий целям оптимизационной задачи;

2) сравнение характеристик ошибок прогнозов доходностей портфелей.

Полученные результаты показали, что квази-оптимальные портфели, обладающие наибольшим коэффициентом Шарпа, не могут превзойти по своим итоговым характеристикам аналогичные портфели, ошибки прогнозов доходностей которых обладают меньшим математическим ожиданием и дисперсией. Тем самым исследование подтвердило необходимость и важность проведения анализа характеристик ошибок прогнозов доходностей квази-оптимальных портфелей, которые наилучшим образом следуют целям оптимизационной задачи.

Полученные результаты дают портфельным управляющим различные схемы оптимизации управления инвестиционными портфелями путем выбора либо классического портфеля, построенного на основе средне-дисперсионного анализа, либо квази-оптимального портфеля, при этом выбор той или иной стратегии зависит от выбранного уровня риска или целевой доходности портфеля.

Дальнейшее развитие этой тематики может быть связано с определением функции распределения доходностей квази-оптимальных портфелей, расширением теоретической базы формирования квази-оптимальных портфелей за счет учета таких особенностей временных рядов, как гетероскедастичность и автокорреляция ошибок моделей ценообразования, которые свойственны большинству данных на финансовых рынках.

Список литературы

Колоколов А. (2011) Хеджирование фьючерсами: многомерные GARCH с динамическими условными корреляциями. *Квантиль*, 9, 61–75.

Михаленок Ю. М., Малюгин В. И. (2011). Оптимизация портфеля финансовых активов на основе многомерных моделей волатильности. Материалы Международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии, Республика Беларусь, Минск: БГУ, 2011.

Суслов В. И., Ибрагимов Н. М., Талышева Л. П., Цыплаков А. А. (2005). *Эконометрия*. Новосибирск: Издательство СО РАН.

Хабров В. В. (2011). Построение оптимальных валютных портфелей на основе прогнозов линейных моделей. *Вопросы статистики*, 11, 44–52.

Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. (2006). *Инвестиции*. М.: ИНФРА-М.

Bollerslev T. (1990). Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, 72, 498–505.

Bollerslev T., Engle R. F., Wooldridge J. M. (1988). Capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96, 116–131.

Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Cappiello L., Engle R. F., Sheppard K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics*, 4, 537–572.

Carriero A., Kapetanios G., Marcellino M. (2010). Forecasting government bond yields with large Bayesian VARs. *Working Papers* 662, Queen Mary, University of London, School of Economics and Finance.

Chopra V. K. (1993). Mean-variance revisited: Near optimal portfolios and sensitivity to input variations. *Journal of Investing*, 2 (1), 51–59.

Chopra V. K., Ziemba W. T. (1993). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal potfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19 (2), 6–11.

Cochrane J. H., Piazzesi M. (2005). Bond risk premia. *American Economic Review*, 95 (1), 138–160.

Engle R. F. (2001). Dynamic conditional correlation — A simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 339–350.

Engle R. F., Kroner K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11 (1), 122–150.

Fama E. F., Bliss R. R (1987). The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, 77 (4), 680–692.

Fama E., French K. (1992). The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, 47, 427–465.

Greene W. H. (1999). *Econometric analysis*. Prentice Hall.

Hamilton J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press.

Jiahui W. (2002). *Modeling financial time series with S-Plus*. Springer-Verlag, 2002.

Jobson J. D., Korkie B. M. (1981). Performance hypothesis testing with the Sharpe and Treynor measures. *Journal of Finance*, 36 (4), 889–908.

Johnson R. A., Wichern D. W. (2007). *Applied multivariate statistical analysis*. Prentice Hall.

Litterman R. B (1986). Forecasting with Bayesian vector autoregressions — Five years of experience. *Journal of Business and Economic Statistics*, 4 (1), 25–38.

Litterman R. B. (1979). Techniques of forecasting using vector autoregressions. *Working Papers* 115, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Lutkepohl H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. Springer, Berlin.

Magnus J., Neudecker H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. Wiley.

Mandelbrot B., Hudson R. L. (2004). *The (mis)behaviour of markets: A fractal view of risk, ruin, and reward*. London: Profile Books.

Marcellino M. (2002). Instability and nonlinearity in the EMU. *CEPR Working Paper* No. 3312.

Markowitz H. M. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), 77–91.

Markowitz H. M. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments.* Wiley, Yale University Press.

Memmel C. (2003). Performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Finance Letters*, 1, 21–23.

Merton R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case, *The Review of Economics and Statistics*, 51 (3), 247–257.

Pagan A. R., Schwert G. W. (1990). Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 50, 267–290.

Pojarliev M., Polasek W (2002). Portfolio construction by volatility forecasts: Does the covariance structure matter? *INVESCO Asset Management and Institute of Statistics and Econometrics University of Basel*.

Pojarliev M., Polasek W. (2001). Applying multivariate time series forecasts for active portfolio management. *Financial Markets and Portfolio Management*, 15 (2), 201–211.

RiskMetrics Group (1996). RiskMetrics. Technical Document. 4th Edition.

Samuelson P. A. (1969). Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *The Review of Economics and Statistics*, 51 (3), 239–246.

Sims C. A. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48, 1–48.

Tsay R. S. (2002). *Analysis of financial time series*. John Wiley and Sons.

Tse Y. K., Tsui A. K. C. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 351–362.

Watson M. (1994). Vector autoregressions and cointegration. *Handbook of Econometrics*, Vol. IV. R. F. Engle and D. McFadden (eds.). Elsevier Science Ltd., Amsterdam.

Yilmaz T. (2010). Improving portfolio optimization by DCC and DECO GARCH: Evidence from Istanbul Stock Exchange. *MPRA Paper* 27314, University Library of Munich, Germany.