

# Оценка риска кредитного портфеля с использованием копула-функций

*Важной задачей при оценке кредитного риска портфеля ссуд является учет взаимосвязей между компонентами этого портфеля. Целью работы является построение модели совместного распределения убытков по кредитному портфелю в отраслевом разрезе. Предлагается методика расчета кредитного риска с использованием копул, параметрического и непараметрического сглаживания. Предложенная методика применяется для оценки риска кредитного портфеля московского коммерческого банка.*

**Ключевые слова:** кредитный риск; коммерческий банк; многомерное моделирование; копула; гамма-распределение; ядерное сглаживание.

**JEL classification:** G17; G21; G32.

## 1. Введение

В обширной теме оценки кредитного риска можно выделить две основные задачи: оценка риска по одному конкретному заемщику (определение степени благонадежности этого заемщика) и оценка риска кредитного портфеля, состоящего из множества предоставленных ссуд. Результаты решения первой задачи являются условиями второй: чтобы построить оценку риска портфеля, необходимо знать уровень риска по каждому из составляющих его кредитов. Методам оценки надежности заемщика посвящены такие работы, как (Altman et al., 2005; Black, Scholes, 1973; Merton, 1974). Обзор этих методов, а также анализ возможностей их практического применения, представлены в (Фантаццини, 2008). Настоящая работа посвящена решению второй задачи, при этом предполагается, что первая задача тем или иным образом уже успешно решена.

Адекватная методика оценки кредитного риска необходима для успешного функционирования коммерческого банка. В частности, она позволяет:

- определить необходимый объем капитальных резервов;
- оптимизировать структуру кредитного портфеля, исходя из соотношения «риск–доходность»;
- откалибровать процентные ставки по кредитам с учетом ожидаемого уровня потерь.

Модели оценки кредитного риска портфеля активов, применяемые коммерческими банками, в большинстве своем являются их собственными разработками. Наиболее известными из опубликованных моделей такого рода являются: CreditMetrics (Morgan, 1997), KMV Portfolio Management (Kealhofer, 1998), CreditRisk+ (Credit Suisse Financial Products, 1997) и Credit Portfolio View (McKinsey, 1997). Модели можно сравнивать по нескольким признакам, наиболее существенным с инструментальной точки зрения. Сравнительная характеристика моделей представлена в табл. 1<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> См. также (Фантаццини, 2009).

**Таблица 1.** Сравнительные характеристики моделей оценки кредитного риска портфеля

	CreditMetrics	KMV Portfolio Management	CreditRisk+	Credit Portfolio View
Понятие кредитного портфеля	Широкое	Широкое	Узкое	Широкое
Мера кредитного риска	Изменение стоимости кредита/ облигаций	Изменение стоимости кредита/ облигаций	Вероятность дефолта, ожидаемые потери при дефолте	Вероятность дефолта, ожидаемые потери при дефолте
Факторы риска	Изменение кредитного рейтинга облигаций контрагента	Изменение рыночной цены акций контрагента	Статистические	Макроэкономические
Факторы корреляции кредитных событий	Корреляции цен акций контрагентов	Корреляции цен акций контрагентов	Корреляции факторов системного риска для групп контрагентов	Корреляции макроэкономических показателей

Указанные выше модели различаются определением кредитного портфеля. В трех из них он понимается в широком смысле: помимо собственно кредитов в него также могут включаться любые другие банковские продукты и финансовые инструменты, подверженные кредитному риску, например облигации. Кредитный портфель, понимаемый в узком смысле, считается состоящим только из кредитов, предоставляемых физическим и юридическим лицам.

Исходя из такой разницы в понятии кредитного портфеля, само кредитное событие можно рассматривать либо как отказ контрагента от выполнения своих договорных обязательств, либо как уменьшение стоимости финансовых инструментов, входящих в портфель, определенный в широком смысле. В первом случае мерами риска служат вероятность дефолта и ожидаемые потери в случае дефолта, в последнем — величина ожидаемого снижения стоимости портфеля.

Модели различаются факторами риска — наборами показателей, влияющих на наступление кредитного события и размер потерь в этом случае. Факторами риска могут выступать: изменение кредитного рейтинга и цен финансовых инструментов, макроэкономические факторы, или, как в модели CreditRisk+, размер потерь и вероятность их возникновения (которые могут рассчитываться по историческим данным).

Наконец, поскольку рассматривается не один актив, а их совокупность (портфель), при построении модели необходимо учитывать возможную коррелированность убытков по различным активам или их группам. В моделях, представленных в табл. 1, эта корреляция оценивается опосредованно: либо через корреляцию цен акций контрагентов, либо путем определения микро- и макроэкономических факторов, системно влияющих на риск активов или группы активов, и рассмотрения корреляции между этими факторами.

Говоря о возможности применения моделей оценки кредитного риска, отметим, что использование моделей, аналогичных CreditMetrics и KMV Portfolio Management, в российской практике крайне затруднено из-за недостаточной развитости фондового рынка страны. С другой стороны, модели типа Credit Portfolio View будут страдать от недостатка статистических макроэкономических данных, которые к тому же будут иметь весьма низкую час-

тотность. В этой связи наиболее оправданным с точки зрения обеспеченности модели исходными данными является подход, применяемый в CreditRisk+. Оценки кредитного риска в нем рассчитываются на основе анализа исторических данных о дефолтах клиентов. Такая статистика дефолтов имеется у любого коммерческого банка.

Однако модель CreditRisk+ не лишена некоторых содержательных недостатков. Объединение кредитов в однородные группы осуществляется в ней по размеру ссудной задолженности: до 20 тыс. долл., от 20 до 40 тыс. долл. и свыше 40 тыс. долл. При этом считается, что внутри этих групп ссуды являются однородными с точки зрения размера ожидаемых относительных убытков по ним. Содержательно более обоснованным представляется деление по отраслевому признаку, поскольку для каждой отрасли имеется свой набор системных факторов риска, обуславливающий вероятность возникновения и величину ожидаемых потерь по кредитам предприятиям этой отрасли.

Второй момент — это опосредованная оценка корреляции убытков между однородными группами, которая в модели CreditRisk+ оценивается через корреляцию факторов кредитного риска. Имея исторические данные о возникновении дефолтов и размерах потерь, вполне возможно провести прямую оценку корреляции убытков, построив их совместное распределение.

На основе вышесказанного сформулируем принципы предлагаемой методики расчета кредитного риска портфеля активов.

1. Кредитный портфель понимается в узком смысле, т. е. считается состоящим только из собственно кредитов.
2. Разделение кредитного портфеля на однородные группы проводится по отраслевому признаку.
3. В качестве меры риска используются ожидаемые потери в случае дефолта.
4. Расчет мер риска и внутригрупповой корреляции убытков осуществляется напрямую по историческим данным.

Построенные таким образом оценки риска будут содержательно обоснованы и легко интерпретируемы, в то же время модель всегда будет обеспечена исходными данными.

Заметим, что существует обширный класс факторных моделей оценки кредитного риска, основанных на похожих предположениях (см., например, (Frey et al., 2001)). В них ожидаемая величина потерь в момент времени  $t$  рассчитывается как

$$Loss = \sum_{i=1}^d Y_i L_i e_i, \quad (1)$$

где  $Y_i \in \{0, 1\}$  — индикаторная переменная, отвечающая за объявление дефолта,  $L_i \in [0, 1]$  — относительные потери в случае дефолта,  $e_i$  — остаток ссудной задолженности  $i$ -й группы клиентов,  $d$  — число различных групп клиентов. При этом объявление дефолта определяется поведением набора факторных переменных:  $Y_i = 1 \Leftrightarrow Z_i \leq D_i$ , где  $Z_i$  — факторная переменная,  $D_i$  — вероятность дефолта  $i$ -го заемщика (группы заемщиков). В рамках данного класса моделей предполагается, что величина относительных потерь в случае дефолта независима от суммы кредита и вероятности дефолта, а сама вероятность дефолта, определяемая кредитным рейтингом, является фиксированной.

В предлагаемом в настоящей работе подходе мы отказываемся от этих предположений, исключая индикаторную переменную из уравнения потерь:

$$Loss = \sum_{i=1}^d x_i e_i, \quad (2)$$

где  $x_i$  — величина относительных потерь по  $i$ -й группе клиентов в момент времени  $t$ . Величины  $x_i$  аккумулируют в себе информацию и об объявлении дефолта, и об ожидаемых потерях в этом случае. Таким образом, при построении модели совместного распределения  $x_i$  учитывается возможная взаимосвязь этих факторов, а также то, что вероятность дефолта и ожидаемые потери в случае дефолта могут быть различны в разные периоды времени.

Как отмечалось выше, в связи с недостатком информации о факторных переменных  $Z_t$ , в роли которых обычно выступают макроэкономические показатели, и недостаточной частотой их обновления, моделирование совместного распределения ожидаемых потерь будем осуществлять по историческим данным об убытках коммерческого банка.

## 2. Формализация модели

### 2.1. Определение убытков по кредитному портфелю

При построении модели оценки кредитного риска портфеля активов будем находиться в рамках следующих предпосылок.

1. Как известно, деятельность коммерческих банков регламентируется различными нормативами, в том числе о предельном риске на одного заемщика<sup>2</sup>, поэтому можно предположить, что кредитный портфель банка сформирован из кредитов сопоставимых величин. Поскольку величина ссудной задолженности на одного заемщика может изменяться в сравнительно небольшом интервале, предполагается, что вероятность дефолта каждого заемщика не зависит от величины выданного ему кредита. Это утверждение будет проявляться в том, что вместо фактических убытков по кредитам будут рассматриваться относительные, т. е. убытки, деленные на общую величину ссудной задолженности.

2. Динамика некоторых макроэкономических показателей может влиять на ситуацию в экономике страны в целом, тем самым изменяя финансовое положение большого числа заемщиков. Исходя из этого, предполагается, что существует корреляция времени возникновения и величины убытков по кредитному портфелю между однородными группами ссуд, выделенными по отраслевому признаку.

Кредитный портфель коммерческого банка состоит из множества ссуд, однако для целей моделирования выделим в нем сравнительно небольшое число более или менее однородных групп. Пусть имеется история дефолтов по кредитам в разрезе  $d$  отраслей. Кредитным событием (дефолтом) будем считать появление ненулевого остатка на счете просроченной задолженности по предоставленным кредитам и прочим размещенным средствам<sup>3</sup>. Обозначим матрицу относительных остатков на счете просроченной задолженности в разрезе отраслей как  $X_{[n \times d]} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)$ , где  $\bar{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})'$  — вектор суммарных относительных

<sup>2</sup> См. Инструкцию об обязательных нормативах банков № 110-И, Глава 4. ЦБ РФ, 2004.

<sup>3</sup> См. Положение о правилах ведения бухгалтерского учета в кредитных организациях, расположенных на территории Российской Федерации № 302-П. ЦБ РФ, 2007.

убытков по всем заемщикам  $i$ -й отрасли,  $x_{i,t} \in [0; 1]$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$ . Величина  $x_{i,t}$  принимает ненулевое значение только в те периоды, когда наблюдалось увеличение просроченной задолженности, и это значение отражает относительную величину просрочки. Под относительными убытками будем понимать величину просроченной задолженности, деленную на общую задолженность по данной отрасли. Причем, если по какому-либо просроченному кредиту удалось компенсировать часть убытков за счет реализации залогового имущества или иным способом, то соответственно уменьшается значение  $x_{i,t}$ , и полученную в итоге величину будем называть убытком по кредиту. Единичный временной период в настоящей работе принимается равным одному месяцу.

Такое представление позволяет не только фиксировать возникновение дефолта в случае  $x_{i,t} > 0$ , но и отслеживать размеры потерь, т. е. фактически принимать во внимание не только вероятность дефолта, но и потери в случае дефолта.

Общепринятыми измерителями риска являются показатели «граница потерь» (value at risk, VaR) и «ожидаемые потери» (expected shortfall, ES), которые могут определяться для различных уровней значимости. В работе (Крицкий, Ульянова, 2007) показано, что при наличии корреляции доходностей и убытков активов одномерные показатели VaR и ES некорректно оценивают портфельный риск. В нашем случае в роли активов выступают однородные группы кредитов, сформированные по отраслевому признаку, убытки по которым коррелированы, поэтому для оценки риска необходимо использовать многомерные показатели, определяемые через соответствующие квантили совместной функции распределения убытков. В силу этого возникает задача оценки совместного распределения потерь.

Методы оценки совместной функции распределения делятся на два класса: параметрические и непараметрические. Для непараметрических методов характерен высокий модельный риск, т. к. они очень хорошо улавливают закономерности исследуемой выборки и переносят их на всю генеральную совокупность, которая в целом может и не обладать характерными для данной конкретной выборки свойствами. Их использование может быть оправдано в ситуациях, когда оцениваемая функция имеет нестандартный вид, т. е. не принадлежит ни к одному из известных классов распределений. Напротив, параметрические методы позволяют учесть наиболее общие закономерности, которые с большой долей вероятности присущи как исследуемой выборке, так и генеральной совокупности в целом.

Среди параметрических методов наиболее часто используются многомерные распределения и копула-функции. В данной статье применяется аппарат копул, который позволяет отдельно моделировать частные распределения убытков по всем отраслям и корреляционные зависимости между ними, что является важным для построения модели, поскольку для каждой отрасли может быть характерна своя микроэкономическая специфика, обуславливающая вид частного распределения убытков.

Для облегчения понимания выводов, изложенных в эмпирической части работы, в следующем разделе описываются основные теоретические положения используемого математического аппарата.

## 2.2. Копула совместного распределения ожидаемых убытков

Поскольку предполагается коррелированность значений убытков по кредитам, сгруппированным по отраслевому признаку, представляет интерес функция их совместного распре-

деления. Совместное распределение убытков наиболее естественным образом можно сконструировать с помощью копулы.

Конечно, копула-функции — это не единственный возможный вариант моделирования совместного распределения, однако в анализе кредитных рисков этот аппарат используется часто, поскольку, кроме упоминавшейся уже гибкости подхода, он помогает избежать чисто технических трудностей оценки совместного распределения убытков.

Например, при использовании непараметрических методов возникает так называемый эффект «проклятия высоких размерностей», выражающийся в смещении непараметрических оценок совместного распределения при росте числа компонент. Многомерное гамма-распределение, которое иногда используется в качестве альтернативы копуле, является тяжелым в вычислительном плане. Вдобавок, сам алгоритм оценки совместного гамма-распределения, в отличие от копул, реализован лишь в немногих статистических пакетах.

Таким образом, использование копула-функций позволяет избежать проблем вычислительного характера, а полученные в работе результаты могут быть без проблем повторены другими исследователями. Ниже кратко изложим основы теории копул<sup>4</sup>.

Копулой называется такая функция  $C: [0; 1]^d \rightarrow [0; 1]$ , которая при подстановке в нее в качестве аргументов значений частных функций распределения некоторых случайных величин дает значение их совместной функции распределения. Формально  $d$ -мерная копула определяется как совместная функция распределения  $d$  стандартных равномерных компонент. Одним из наиболее важных результатов в теории копула-функций является теорема Склара. Суть ее состоит в следующем.

Пусть  $F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d)$  — непрерывные функции распределения некоторых случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_d$ ,  $H_{\xi_1, \dots, \xi_d}(x_1, \dots, x_d)$  — их совместная функция распределения. Тогда существует копула  $C(u_1, \dots, u_d)$  такая, что  $C(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d)) = H_{\xi_1, \dots, \xi_d}(x_1, \dots, x_d)$ . С другой стороны, при заданных частных распределениях  $F_{\xi_i}(x_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$  и копуле  $C(u_1, \dots, u_d)$  функция  $H_{\xi_1, \dots, \xi_d}(x_1, \dots, x_d)$ , полученная путем подстановки частных распределений в копулу, будет являться совместной функцией распределения величин  $\xi_1, \dots, \xi_d$ .

Теорема Склара позволяет разбить процедуру оценки параметров многомерного распределения на несколько шагов:

- 1) выбор семейств частных функций распределения  $F_{\xi_i}(x_i)$ ;
- 2) оценка параметров частных функций;
- 3) выбор семейства копулы  $C(F_{\xi_1}(x_1), \dots, F_{\xi_d}(x_d))$ ;
- 4) оценка параметров копула-функции.

Такое разделение позволяет обобщить традиционный подход к моделированию совместной функции распределения за счет возможности использования различных, наиболее подходящих, частных функций распределения. Копула, являясь нечувствительной к монотонным преобразованиям, позволяет моделировать нелинейную связь между компонентами активов.

Для оценки совместного распределения необходимо построить модели для частных распределений. Эмпирическое распределение убытков по кредитному портфелю обладает рядом особенностей, таких как положительная область определения и тяжелые хвосты (см., например, (Lucas et al., 2003)). Для учета этих особенностей используются распределение Парето и гамма-распределение. Расчет совместного распределения убытков на основе распределения

<sup>4</sup> Более подробное изложение см., например, в работе (Благовещенский, 2012).

Парето проводится с помощью копулы экстремальных значений (extreme value copula) и наталкивается на трудности отсутствия программного обеспечения для экстремальных копул высокой размерности (больше 2). Поскольку данная статья носит прикладной характер, в ее рамках ограничим параметрический подход использованием гамма-распределения.

В качестве альтернативы параметрическому подходу естественно взять модель, основанную на непараметрическом ядерном сглаживании, которая подходит для моделирования любых случайных величин.

Следующие два раздела посвящены краткому теоретическому описанию этих подходов.

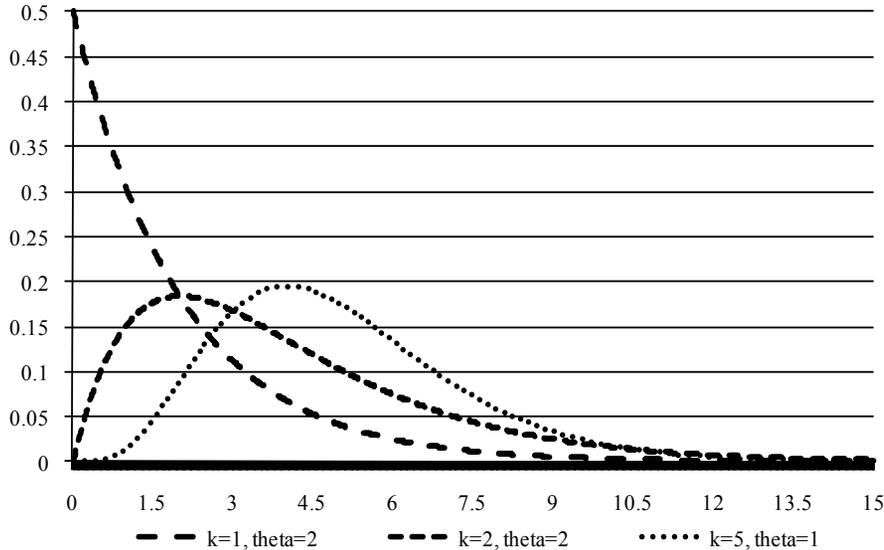
### 2.3. Гамма-распределение

Пусть случайная величина  $x_i$ , представляющая собой размер убытков по подпортфелю, состоящему из кредитов клиентам  $i$ -й отрасли, имеет гамма-распределение, тогда ее плотность запишется в следующем виде:

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1}}{\theta^k \Gamma(k)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x > 0, \quad k > 0, \quad \theta > 0, \quad (3)$$

где  $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{k-1} dt$  — гамма-функция.

Вид плотности гамма-распределения при различных значениях параметров формы ( $k$ ) и масштаба ( $\theta$ ) показан на рис. 1.



**Рис. 1.** Вид плотности гамма-распределения при различных значениях параметров

Если имеется выборка значений убытков по клиентам  $i$ -й отрасли  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$  размера  $T$ , то можно записать логарифмическую функцию правдоподобия:

$$l(k, \theta) = \ln \prod_{t=1}^T f(x_{i,t}; k, \theta) = (k-1) \sum_{t=1}^T \ln x_{i,t} - \frac{1}{\theta} \sum_{t=1}^T x_{i,t} - kT \ln \theta - T \ln \Gamma(k). \quad (4)$$

Рассмотрим необходимое условие первого порядка для параметра масштаба:

$$\frac{\partial l(k, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum_{t=1}^T x_{i,t} - \frac{kT}{\theta} = 0. \quad (5)$$

Отсюда

$$\hat{\theta} = \frac{1}{kT} \sum_{t=1}^T x_{i,t}. \quad (6)$$

Подставив выражение (6) в формулу (4), получим:

$$l(k, \hat{\theta}) = (k-1) \sum_{t=1}^T \ln x_{i,t} - kT - kT \ln \frac{\sum_{t=1}^T x_{i,t}}{kT} - T \ln \Gamma(k). \quad (7)$$

Рассмотрим необходимое условие первого порядка для параметра формы:

$$\frac{\partial l(k, \hat{\theta})}{\partial k} = \sum_{t=1}^T \ln x_{i,t} - T \ln \frac{\sum_{t=1}^T x_{i,t}}{kT} - \frac{T}{\Gamma(k)} \cdot \frac{d\Gamma(k)}{dk} = 0. \quad (8)$$

После приведения подобных слагаемых получим:

$$\ln k - \psi(k) = \ln \frac{\sum_{t=1}^T x_{i,t}}{T} - \frac{\sum_{t=1}^T \ln x_{i,t}}{T}, \quad (9)$$

где  $\psi(k) = \frac{d \ln \Gamma(k)}{dk}$  — дигамма-функция.

Уравнение (9) не решается аналитически, поскольку у функции  $\psi(k)$  отсутствует аналитическое представление, поэтому для оценки значения параметра формы используют следующую аппроксимацию:

$$\hat{k} \approx \frac{1}{12s} \cdot \left( 3 - s + \sqrt{(s-3)^2 + 24s} \right), \quad (10)$$

где  $s = \ln \frac{\sum_{t=1}^T x_{i,t}}{T} - \frac{\sum_{t=1}^T \ln x_{i,t}}{T}$ .

Оценку параметра формы (10) можно подставить в выражение (6) и получить оценку параметра масштаба.

## 2.4. Непараметрическое ядерное сглаживание

Ядерная оценка Розенблатта–Парзена (Rosenblatt, 1956) плотности распределения случайной величины  $x_i$  по выборке  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$  строится в виде

$$\hat{f}_i(x) = \frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T k\left(\frac{x - x_{i,t}}{h}\right), \quad (11)$$

где  $h = h(n)$  — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\lim_n h(n) = 0, \quad \lim_n nh(n) = +\infty, \quad (12)$$

а  $k(x)$  — ядро, т. е. некоторая четная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 k(x) dx > 0. \quad (13)$$

Значения частных функций распределения находятся по определению:  $\hat{F}_i(x) = \int_{-\infty}^x \hat{f}_i(t) dt$ .

Качество аппроксимации решающим образом зависит от выбора сглаживающего множителя  $h$  (ширины окна), тогда как вид функции  $k(x)$  определяет гладкость полученной оценки.

При построении оценок часто используют следующие виды функций:

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ — гауссовское ядро;}$$

$$k(x) = \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{x^2}{5}\right) \cdot \mathbf{I}(|x| < \sqrt{5}) \text{ — ядро Епанечникова;}$$

$$k(x) = (1 - |x|) \cdot \mathbf{I}(|x| < 1) \text{ — треугольное ядро;}$$

$$k(x) = 0.5 \cdot \mathbf{I}(|x| < 1) \text{ — прямоугольное (равномерное) ядро}$$

(здесь  $\mathbf{I}(A)$  — индикаторная функция множества  $A$ ).

Существует целый ряд способов оценки оптимальной ширины окна (Silverman, 1986). В последнее время наибольшей популярностью пользуется метод «перекрестной проверки» (cross validation, CV). Оптимальная ширина окна — это такое значение  $h$ , при котором оцененная функция плотности наиболее близка к фактической. Степень близости двух функций в методе перекрестной проверки измеряется показателем «интегральной квадратической ошибки» (integrated squared error, ISE):

$$ISE_i = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}_i(x) - f_i(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_i^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_i(x) f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_i^2(x) dx. \quad (14)$$

Последнее слагаемое в формуле (14) не зависит от  $h$  и, тем самым, не играет роли при минимизации интегральной ошибки. Также можно заметить, что величина  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_i(x) f(x) dx$  есть математическое ожидание оценки, которое аппроксимируется выражением

$E(\hat{f}_i(x)) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{f}_i^{(-t)}(x_{i,t})$ , где  $\hat{f}_i^{(-t)}(x)$  — оценка плотности распределения случайной величины  $x_i$  по выборке  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$  за исключением наблюдения  $x_{i,t}$ . Таким образом, минимизация интегральной квадратической ошибки сводится к минимизации выражения

$$CV_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_i^2(x) dx - \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \hat{f}_i^{(-t)}(x_{i,t}). \quad (15)$$

Описанный метод построения непараметрических оценок предполагает *фиксированное значение* ширины окна на все области определения функции плотности. Такой подход является базовым и наиболее простым. Но он не учитывает тот факт, что выборочные наблюдения обычно распределены неравномерно: большое их количество лежит возле моды распределения и малое — на хвостах. Из-за этого оценки оптимальной ширины окна, проведенные раздельно по центру распределения и по его хвостам, могут сильно различаться. Учесть эту особенность позволяют методы с переменной шириной окна.

Первый из них, *обобщенный метод ближайших соседей*, заключается в том, что в каждой точке, где оценивается плотность, ширина окна выбирается таким образом, чтобы в него попали  $k$  ближайших к этой точке наблюдений. Пусть оценивается значение плотности в точке  $x$ . Рассмотрим расстояния  $d_{i,t}(x) = |x - x_{i,t}|$  от точки  $x$  до точек  $x_{i,t}$  и отсортируем их таким образом, что  $d_{i,1}(x) \leq d_{i,2}(x) \leq \dots \leq d_{i,T}(x)$ . В этом случае можно сказать, что  $k$  ближайших к точке  $x$  наблюдений находятся на расстоянии, не превышающем  $d_{i,k}(x)$ . Иными словами, отрезок  $[x - d_{i,k}(x); x + d_{i,k}(x)]$  будет содержать  $k$  наблюдений. Положив  $h = h(x) = 2d_{i,k}(x)$ , можно переписать формулу (11) в следующем виде:

$$\hat{f}_i(x) = \frac{1}{2Td_{i,k}(x)} \sum_{t=1}^T k \left( \frac{x - x_{i,t}}{2d_{i,k}(x)} \right). \quad (16)$$

Изменяя значение  $k$ , можно варьировать степень гладкости получаемой оценки плотности, и по критерию интегральной квадратической ошибки выбрать наилучшую аппроксимацию.

Другим непараметрическим методом с переменной шириной окна является *адаптивный метод ближайших соседей*. Оценка плотности распределения в точке  $x$  записывается в виде

$$\hat{f}_i(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{hd_{i,k}(x_{i,t})} k \left( \frac{x - x_{i,t}}{hd_{i,k}(x_{i,t})} \right). \quad (17)$$

При этом сглаживающий множитель разделяется на две части: глобальную составляющую  $h$  и измеритель локальной концентрации наблюдений  $d_{i,k}(x_{i,t})$ . Метод требует априорного задания величины  $h$ , которую выбирают, минимизируя выражение (15) для некоторой предварительной оценки  $\tilde{f}_i(x)$ . В качестве такой предварительной оценки обычно используют функцию с фиксированной шириной окна. Вместо величины  $d_{i,k}(x_{i,t})$  также часто применяется параметр локальной концентрации  $\lambda_{i,t} = (g_i / \tilde{f}_i(x_{i,t}))^\alpha$ , где  $g_i$  — геометрическое среднее пилотных оценок плотности  $\{\tilde{f}_i(x_{i,t})\}_{t=1}^T$ ,  $\alpha$  — принимает значения от нуля до единицы.

### 3. Построение оценок кредитного риска

Все расчеты в рамках данной статьи проводились с помощью программной среды R (R Development Core Team, 2010), в рамках которой для подгонки моделей использовались специальные пакеты статистических функций.

#### 3.1. Алгоритм оценки риска кредитного портфеля

Суммируя изложенное в предыдущих разделах, предлагается следующий алгоритм оценки риска кредитного портфеля.

1. Разделить кредитный портфель на относительно небольшое число однородных групп по отраслевому признаку.
2. Для каждой группы по историческим данным построить частные функции распределения убытков, используя гамма-распределение либо с помощью ядерных оценок.
3. В случае отсутствия межотраслевой корреляции убытков на основе частных распределений рассчитать оценки риска для каждой отрасли. Общую величину ожидаемых убытков определить как средневзвешенное отраслевых значений.
4. Построить совместное распределение убытков по кредитному портфелю, используя аппарат копул.
5. Методом Монте-Карло сгенерировать модельные значения убытков.
6. По модельным данным рассчитать оценки кредитного риска.

В отличие от описанных во введении моделей оценки кредитного риска портфеля активов, которые рассматривают кредитный портфель, состоящий только лишь из обязательств юридических лиц, в рамках предлагаемой в данной статье методики можно также включить кредиты физическим лицам, рассматривая их или отдельные их виды (например: ипотечные кредиты, автокредиты и прочие потребительские кредиты) как самостоятельные «отрасли».

#### 3.2. Характеристика исходных данных

Для иллюстрации практического применения описанных методов используется статистика дефолтов (полных и частичных) компаний-контрагентов московского коммерческого банка<sup>5</sup> за период с января 2003 года по июнь 2012 года в разрезе шести укрупненных отраслей. Описательные статистики этих данных представлены в табл. 2.

Всю совокупность наблюдений разделим на обучающую и экзаменующую выборки. На пространстве обучающей выборки будем оценивать параметры моделей и затем на этой основе рассчитывать оценки кредитного риска. В обучающую выборку включены наблюде-

---

<sup>5</sup> В качестве исходных данных была использована внутренняя управленческая отчетность одного из московских банков. В целях сохранения коммерческой тайны суммы кредитов были умножены на равномерно распределенную случайную величину, а названия отраслей изменены. Описанные преобразования не затрагивали исторические данные о возникновении и относительной величине убытков и, следовательно, не исказили структуру их межотраслевой зависимости, являющуюся предметом данной статьи.

**Таблица 2.** Описательные статистики исходных данных

Показатель	Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 3	Отрасль 4	Отрасль 5	Отрасль 6
Число наблюдений	114	114	114	114	114	114
Число зафиксированных убытков	22	28	30	12	29	25
Минимум	0	0	0	0	0	0
Максимум	0.025	0.019	0.040	0.026	0.065	0.037
Среднее	0.003	0.002	0.002	0.002	0.003	0.004
Стандартное отклонение	0.006	0.004	0.006	0.005	0.010	0.008

ния с января 2003 года по декабрь 2009 года общим числом  $84 \cdot 6 = 504$  штуки. Оставшаяся часть из  $30 \cdot 6 = 180$  наблюдений формирует экзаменационную выборку. С ее помощью проводится сравнение качества подгонки моделей путем построения последовательных (во времени) оценок доверительной границы ожидаемых потерь — так называемой «кривой VaR». На основе сравнения этой кривой с фактическими данными об относительных потерях по дефолтам формулируются выводы о практической применимости моделей.

### 3.3. Методы оценки качества моделей

Для сравнения моделей по качеству производимых ими оценок риска широко используется тест Купика и функции потерь.

**Тест Купика.** Основной процедурой проверки качества построенных оценок доверительного уровня ожидаемых потерь (оценки качества прогноза) является тест Купика.

Пусть имеется набор последовательных (во времени) оценок доверительного уровня потерь по кредитному портфелю, построенных с помощью показателя «граница потерь» (VaR) с некоторым уровнем значимости  $1 - \alpha$ . Легко понять, что если модель, лежащая в основе расчета VaR, адекватно описывает исследуемый объект, то относительное количество пробоев кривой VaR (т. е. количество элементов экзаменующей выборки, превышающих эту границу, по отношению к длине всей экзаменующей выборки) должно быть равно  $\alpha$ . В противном случае модель либо переоценивает (в случае большего количества пробоев), либо недооценивает (в случае меньшего количества) риск<sup>6</sup>. Пусть  $N$  — длина экзаменующей выборки,  $K$  — количество пробоев кривой VaR, тогда  $\alpha_0 = K/N$  — эмпирический уровень превышения этой границы. Тест Купика заключается в проверке следующей статистической гипотезы:

$$H_0 : \alpha_0 = \alpha \text{ против альтернативы } H_{alt} : \alpha_0 \neq \alpha.$$

Проверка осуществляется с помощью статистики

$$S_{Cup} = -2 \ln \left( (1 - \alpha)^{N-K} \alpha^K \right) + 2 \ln \left( (1 - \alpha_0)^{N-K} \alpha_0^K \right), \quad (18)$$

которая в случае истинности нулевой гипотезы имеет  $\chi^2(1)$  распределение.

<sup>6</sup> См. также (Fantazzini, 2006).

**Функции потерь.** Еще одним показателем качества, помогающим сделать выбор между моделями, прошедшими тест Купика, является значение функции потерь, измеряющей среднюю величину превышения фактическими убытками уровня VaR. Чем меньше значение функции потерь, тем более адекватно рассматриваемая модель оценивает риски.

Наиболее часто используемыми функциями потерь являются функции Лопеса<sup>7</sup> и Бланко–Ила:

$$L_{Lo} = \frac{10^4}{K} \sum_{i=1}^T (y_i - VaR_t)^2 \cdot \mathbf{I}(x_i > VaR_t), \quad (19)$$

$$L_{BI} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^T \left( \frac{y_i - VaR_t}{VaR_t} \right) \cdot \mathbf{I}(y_i > VaR_t). \quad (20)$$

Функция потерь Лопеса отличается тем, что она придает больший вес значительным отклонениям. Это обосновано с содержательной точки зрения, поскольку единичные крупные превышения, как правило, более опасны, чем несколько мелких.

### 3.4. Оценка кредитного риска в случае отсутствия межотраслевой корреляции убытков (одномерный случай)

**Гамма-распределение.** На рисунке 2 представлены графики частных условных функций плотностей убытков, полученные с использованием гамма-распределения<sup>8</sup>. Графики оценок частных условных плотностей изображены сплошной линией на фоне пунктирной эмпирической плотности и точек исходных значений убытков.

Графики «квантиль–квантиль» на рис. 3 показывают, что отклонения теоретических квантилей от эмпирических на хвостах распределений невелики. Это дает основание полагать, что рассчитанные с использованием гамма-распределения показатели «границы потерь» и «ожидаемых потерь» будут адекватно измерять риск.

На рисунке 4 изображена кривая VaR, рассчитанная с использованием гамма-распределения в одномерном случае на уровнях значимости 0.9, 0.95 и 0.975.

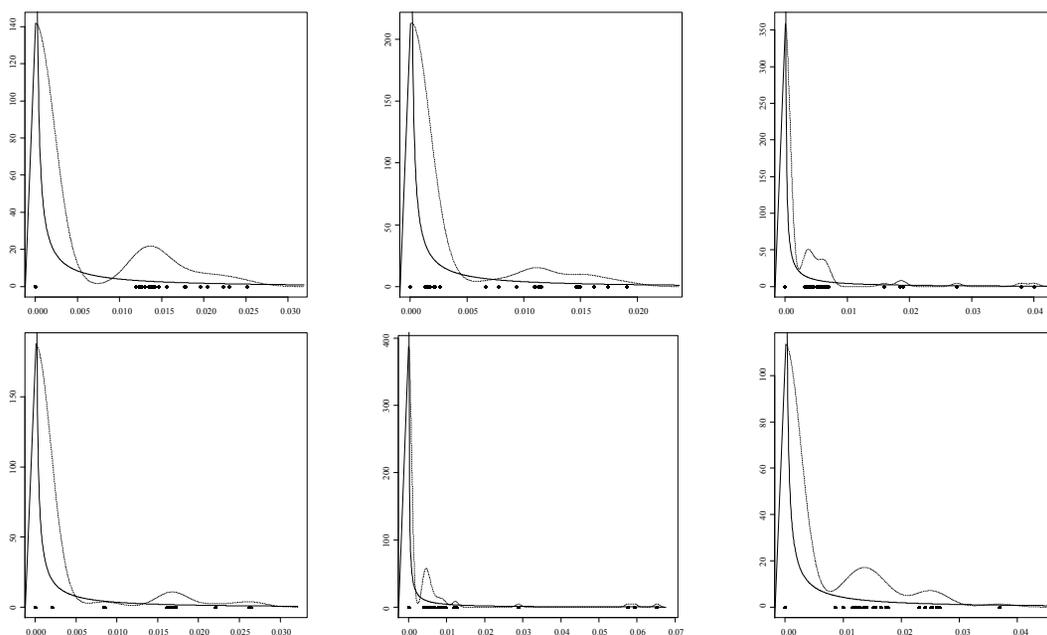
Количество пробоев этой кривой равно 5, 1, 1 для уровней значимости 90, 95 и 97.5% соответственно, что удовлетворяет тесту Купика. Значение функции потерь равно 0.602, 1.025, 0.066 (для функции Лопеса) и 1.030, 0.907, 0.137 (для функции Бланко–Ила).

**Ядерное сглаживание.** В разделе 2.4. были описаны три вида непараметрических ядерных оценок: с фиксированной шириной окна, обобщенный метод ближайших соседей и адаптивный метод. В таблице 3 сравнивается качество оценок риска, полученных этими методами. Сравнение осуществляется по *P*-значению теста Купика для соответствующей кривой VaR.

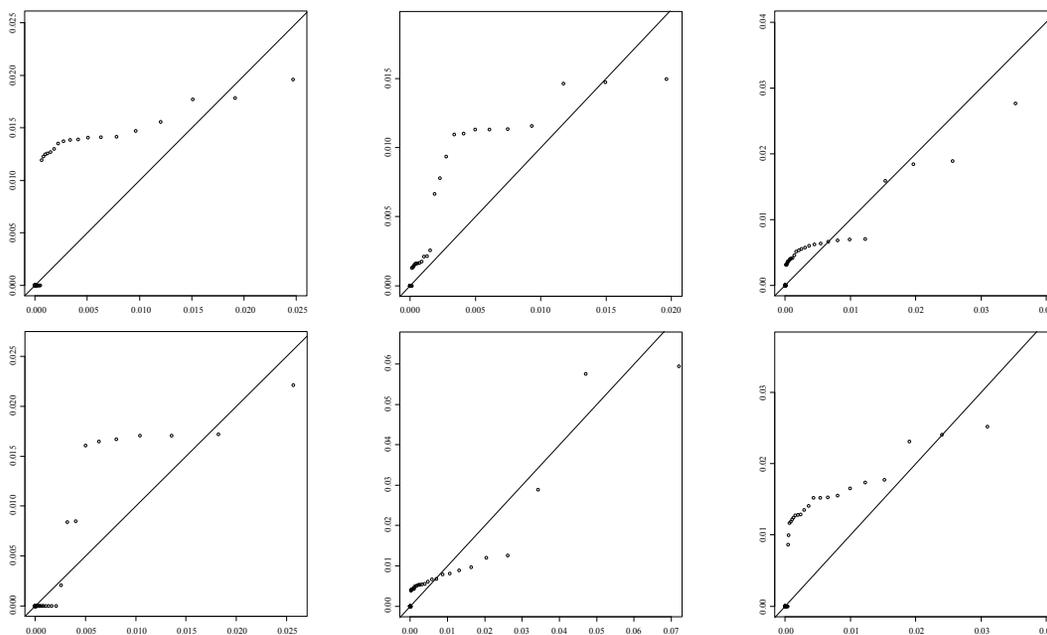
По совокупности результатов на трех уровнях значимости для дальнейшего моделирования целесообразно использовать обобщенный метод ближайших соседей.

<sup>7</sup> Множитель  $10^4$  был введен для удобства численной записи значений этой функции.

<sup>8</sup> Расчеты производились с помощью статистического пакета «stats» (R Development Core Team, 2010).



**Рис. 2.** Графики частных функций плотности ожидаемых убытков (по вертикальным осям — значения плотностей распределений, по горизонтальным — величины относительных убытков) на основе гамма-распределения



**Рис. 3.** Графики «квантиль–квантиль» для частных функций распределения (по вертикальным осям — эмпирические квантили, по горизонтальным — теоретические) на основе гамма-распределения

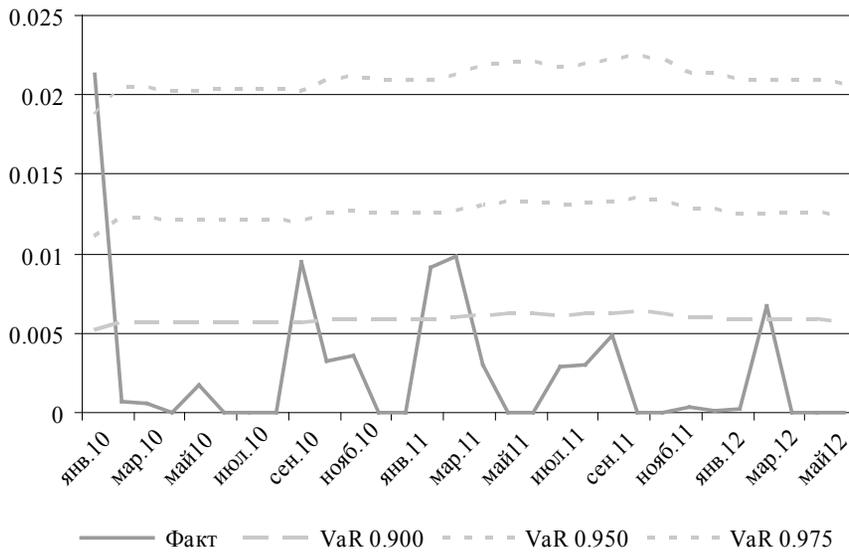


Рис. 4. Кривая VaR для гамма-распределения в одномерном случае

Таблица 3. *P*-значения теста Купика для непараметрических моделей

Модель	Уровень значимости		
	0.900	0.950	0.975
Фиксированная ширина окна	0.262	0.019	0.001
Обобщенный метод ближайших соседей	0.560	0.080	0.007
Адаптивный метод	0.262	0.019	0.007

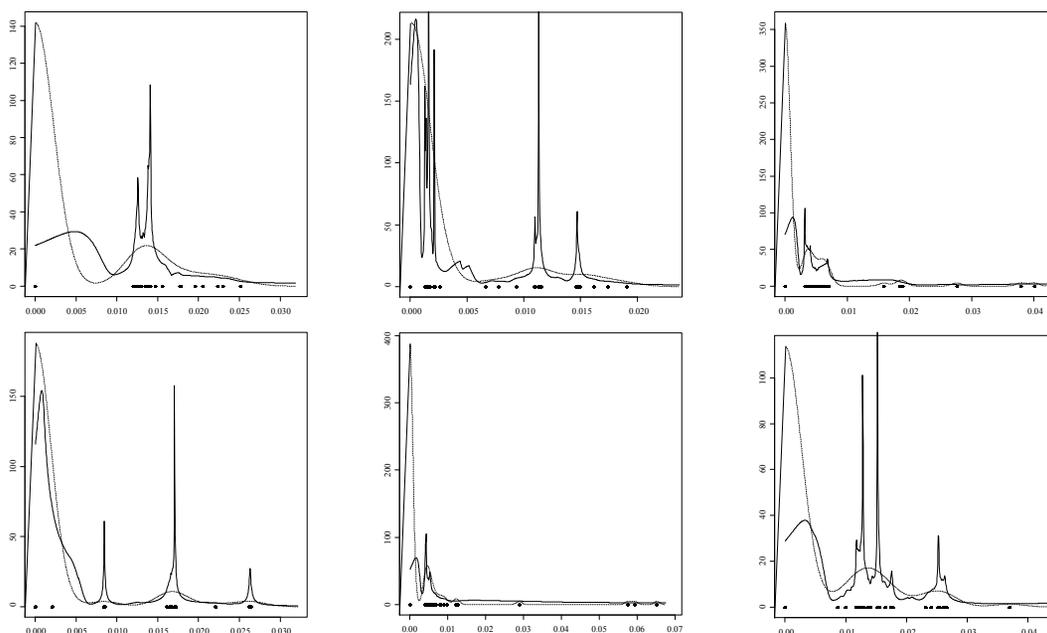
На рисунке 5 представлены графики частных условных функций плотностей убытков, полученные с использованием непараметрического ядерного сглаживания<sup>9</sup>. Графики оценок частных условных плотностей изображены сплошной линией на фоне пунктирной эмпирической плотности и точек исходных значений убытков.

На рисунке 6 представлены графики «квантиль–квантиль». Отклонения теоретических квантилей от эмпирических на хвостах распределений свидетельствуют о том, что эмпирическое распределение убытков обладает более толстыми хвостами, чем модельное, что характерно для непараметрических оценок. Однако сами эти отклонения невелики.

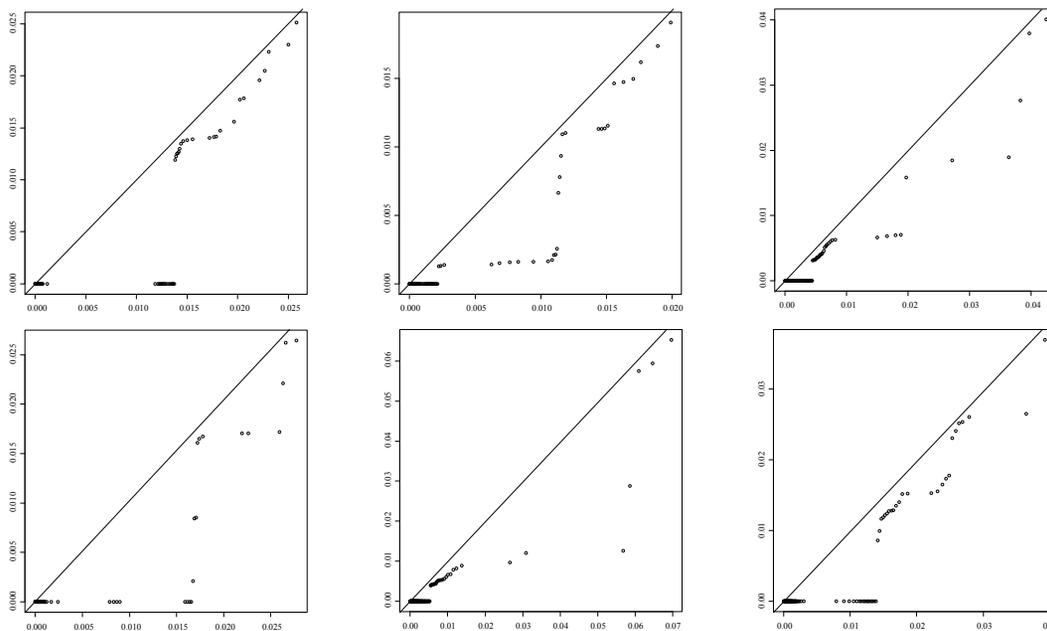
На рисунке 7 изображена кривая VaR, рассчитанная с использованием ядерных оценок в одномерном случае на уровнях значимости 0.9, 0.95 и 0.975.

Количество пробоев этой кривой равно четырем при всех уровнях значимости. Тесту Купика удовлетворяет 90%-ная кривая VaR на высоком уровне значимости и 95%-ная — на уровне значимости 8%. Значение функции потерь равно 0.597, 0.506, 0.492 (для функции Лопеса) и 0.941, 0.651, 0.585 (для функции Бланко-Ила). Близость кривых «границы потерь» друг к другу, а также большое количество пробоев кривых на высоких уровнях значимости является иллюстрацией недостаточной тяжести хвостов ядерных оценок.

<sup>9</sup> Для расчетов использовался статистический пакет «np» (Hayfield, Racine, 2008).



**Рис. 5.** Графики частных функций плотности ожидаемых убытков (по вертикальным осям — значения плотностей распределений, по горизонтальным — величины относительных убытков) на основе ядерных оценок



**Рис. 6.** Графики «квантиль–квантиль» для частных функций распределения (по вертикальным осям — эмпирические квантили, по горизонтальным — теоретические) на основе ядерных оценок

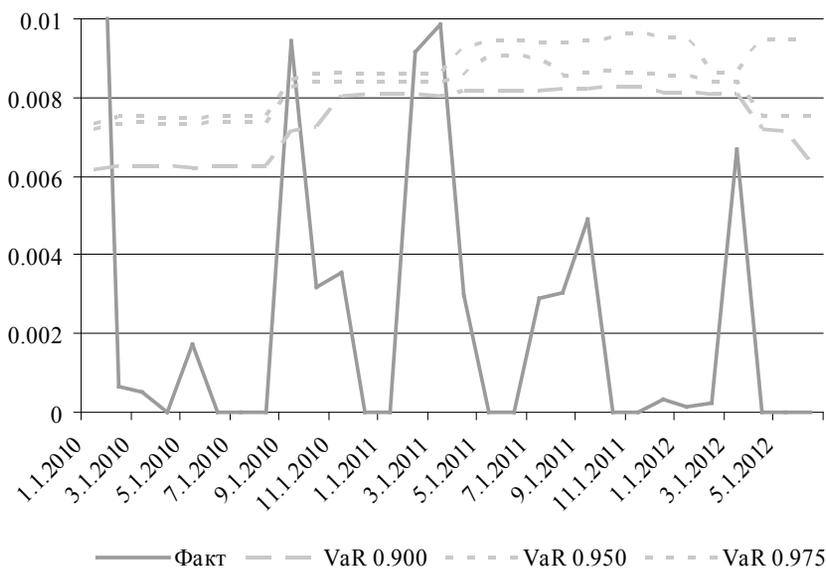


Рис. 7. Кривая VaR для ядерных оценок в одномерном случае

### 3.5. Оценка кредитного риска в случае наличия межотраслевой корреляции убытков (многомерный случай)

Как видно из табл. 4, в рассматриваемом примере корреляционная матрица изменений остатков на пассивных счетах содержит только положительные элементы. Это дает основание предположить, что оценки кредитного риска, построенные с учетом корреляционных зависимостей между различными их видами, будут в целом выше, чем оценки, полученные в одномерном случае. В самом деле, положительные корреляции содержательно означают, что убытки имеют тенденцию к кластеризации, а это в целом увеличивает риск возникновения больших потерь.

Таблица 4. Межотраслевые корреляции убытков по кредитному портфелю

	Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 3	Отрасль 4	Отрасль 5	Отрасль 6
Отрасль 1	1					
Отрасль 2	0.229	1				
Отрасль 3	0.100	0.293	1			
Отрасль 4	0.193	0.415	0.002	1		
Отрасль 5	0.302	0.433	0.411	0.361	1	
Отрасль 6	0.269	0.469	0.261	0.261	0.623	1

Выбор копулы<sup>10</sup> для построения совместного распределения убытков сделаем на основе целевого критерия — качества оценок риска. Измерителем качества будет служить, во-пер-

<sup>10</sup> Моделирование совместного распределения осуществлялось с помощью статистического пакета «copula», см. (Yan, 2007; Kojadinovic, Yan, 2010).

вых,  $P$ -значение теста Купика для кривой VaR, построенной на пространстве экзаменуемой выборки (степень ее соответствия заявленному уровню значимости). Во-вторых, для моделей с близкими  $P$ -значениями используется критерий функций потерь.

В таблице 5 представлены  $P$ -значения для кривых VaR, построенных с использованием параметрического (П) и непараметрического (Н) метода и различных копул<sup>11</sup>. В качестве параметрического метода используется гамма-распределение, в качестве непараметрического — обобщенный метод ближайших соседей, показавший наилучшие результаты среди ядерных оценок при моделировании частных распределений убытков.

**Таблица 5.**  $P$ -значения для различных копул

Метод	Уровень значимости	Копула					
		Нормальная	Стьюдента ( $df=5$ )	Стьюдента ( $df=10$ )	Стьюдента ( $df=20$ )	Гумбеля	Клейтона
П	0.900	0.262	0.262	0.262	0.262	0.262	0.262
	0.950	0.266	0.657	0.657	0.657	0.080	0.690
	0.975	0.781	0.781	0.781	0.781	0.781	0.781
Н	0.900	0.262	0.560	0.262	0.262	0.560	0.262
	0.950	0.080	0.080	0.080	0.080	0.080	0.019
	0.975	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.001

В сочетании с гамма-распределением по совокупности результатов на трех уровнях значимости наиболее предпочтительно выглядит копула Клейтона и семейство копул Стьюдента, различающихся числом степеней свободы. В таблице 6 кривые VaR, построенные с помощью этих копул, сравниваются по значениям функций потерь.

**Таблица 6.** Значения функций потерь в параметрическом подходе

Уровень значимости	Функция потерь	Копула			
		Стьюдента ( $df=5$ )	Стьюдента ( $df=10$ )	Стьюдента ( $df=20$ )	Клейтона
0.900	Лопеса	0.585	0.574	0.569	0.526
	Бланко-Ила	0.975	0.938	0.926	0.795
0.950	Лопеса	0.904	1.503	1.558	0.774
	Бланко-Ила	0.857	1.358	1.418	0.705
0.975	Лопеса	0.447	0.627	0.737	0.890
	Бланко-Ила	0.458	0.593	0.676	0.796

На низких уровнях значимости наименьшее расхождение между кривой VaR и экстремальными значениями относительных потерь показывают стьюдентовские копулы с боль-

<sup>11</sup> В связи с вычислительной трудностью оценки числа степеней свободы используются три фиксированных варианта для копулы Стьюдента.

шим числом степеней свободы, а на высоких уровнях значимости — с малым. Это связано с повышенной вероятностью экстремальных событий, которую подразумевает копула-модель с небольшим числом степеней свободы. Кривая VaR при этом располагается высоко по отношению к величинам фактических убытков, что хорошо для высокого уровня значимости и плохо для низкого.

Копула Клейтона в терминах функций потерь ведет себя аналогично копуле Стьюдента с большим числом степеней свободы.

Поскольку на практике, как правило, оперируют высокими уровнями значимости, то можно заключить, что для построения оценок кредитного риска в рамках параметрического подхода целесообразно использовать копулу Стьюдента с пятью степенями свободы.

Использование копул Стьюдента показывает лучшие результаты и в непараметрическом подходе. В таблице 7 показано их сравнение по значению функций потерь.

**Таблица 7.** Значения функций потерь в непараметрическом подходе.

Уровень значимости	Функция потерь	Копула		
		Стьюдента ( $df=5$ )	Стьюдента ( $df=10$ )	Стьюдента ( $df=20$ )
0.900	Лопеса	0.647	0.540	0.555
	Бланко-Ила	0.945	0.822	0.871
0.950	Лопеса	0.531	0.582	0.613
	Бланко-Ила	0.654	0.780	0.857
0.975	Лопеса	0.504	0.518	0.535
	Бланко-Ила	0.586	0.621	0.611

Рассуждения о числе степеней свободы копулы Стьюдента и его влиянии на оценки риска справедливы и для непараметрического подхода, в котором также предпочтительнее использовать копулу Стьюдента с пятью степенями свободы.

Заметим, однако, что на высоких уровнях значимости во всех случаях непараметрический подход показал неудовлетворительные результаты.

Общий вид кривых VaR в многомерном случае аналогичен тем зависимостям, которые были получены в одномерном случае, однако они расположены выше по отношению к фактическим убыткам, что соответствует более высоким оценкам риска.

В следующем разделе обсудим качество подгонки моделей в одномерном и многомерном случаях, а также оценки риска, основанные на этих моделях.

### 3.6. Сравнительная характеристика параметрической и непараметрической методик

В таблице 8 представлены основные характеристики качества прогноза одномерных вариантов обсуждаемых моделей (для трех уровней значимости).

Таблица 8. Характеристики качества прогноза одномерных вариантов моделей

	Гамма-распределение			Ядерные оценки		
	0.900	0.950	0.975	0.900	0.950	0.975
Количество пробоев кривой VaR	5	1	1	4	4	4
Эмпирическая частота пробоев ( $\alpha_0$ )	0.167	0.033	0.033	0.133	0.133	0.133
$P$ -значение для $H_0 : \alpha_0 = \alpha$	0.262	0.657	0.781	0.560	0.080	0.007
Значение функции потерь Лопеса	0.602	1.025	0.066	0.597	0.506	0.492
Значение функции потерь Бланко-Ила	1.030	0.907	0.137	0.941	0.651	0.585

Таблица 9. Характеристики качества прогноза многомерных вариантов моделей

	Гамма-распределение			Ядерные оценки		
	0.900	0.950	0.975	0.900	0.950	0.975
Количество пробоев кривой VaR	5	1	1	4	4	4
Эмпирическая частота пробоев ( $\alpha_0$ )	0.167	0.033	0.033	0.133	0.133	0.133
$P$ -значение для $H_0 : \alpha_0 = \alpha$	0.262	0.657	0.781	0.560	0.080	0.007
Значение функции потерь Лопеса	0.585	0.904	0.447	0.646	0.530	0.503
Значение функции потерь Бланко-Ила	0.975	0.857	0.458	0.785	0.590	0.556

Таблица 9 содержит характеристики качества прогноза многомерных вариантов.

Допустимые интервалы количества пробоев для прохождения теста Купика на 10%-ном уровне значимости в примере равны: 1–6 для 90%-ной кривой VaR, 1–3 для 95%-ной и 0–2 для доверительной границы на уровне значимости 97.5%. Тесту удовлетворяют все модели, основанные на использовании гамма-распределения, и модели, основанные на ядерных оценках, при 90%-ном уровне значимости кривой VaR.

Метод ядерных оценок показал в целом плохие результаты в основном из-за того, что распределение исследуемых величин имеет толстые хвосты. Вследствие этого оценки кредитного риска, полученные этим методом, оказываются сильно заниженными, что выражается в высокой частоте пробоев кривой VaR. Поскольку тяжелые хвосты являются общим свойством распределений убытков по кредитному портфелю, можно заключить, что использование эмпирических оценок распределения убытков по портфелю кредитов не дает приемлемых оценок кредитного риска. Однако при низких уровнях значимости, благодаря тому, что непараметрические методы хорошо аппроксимируют особенности конкретной выборки, метод ядерных оценок показал наилучшие из представленных в табл. 8 и 9 результатов, как в терминах  $P$ -значения для теста Купика, так и по критерию функций потерь.

Модели, основанные на гамма-распределении, показали адекватные результаты и в одномерном, и в многомерном случаях. Многомерный вариант является более предпочтительным в плане соответствия количества пробоев теоретическим значениям. Также на двух уровнях значимости из трех значения функций потерь для многомерного варианта оказались меньше, чем для одномерного.

Таблица 10. Оценки кредитного риска

		Граница потерь (VaR)			Ожидаемые потери (ES)		
		0.900	0.950	0.975	0.900	0.950	0.975
Гамма-распределение	Одномерный	0.005	0.015	0.029	0.024	0.038	0.055
	Многомерный	0.006	0.011	0.016	0.014	0.020	0.027
Ядерные оценки	Одномерный	0.006	0.007	0.007	0.023	0.028	0.031
	Многомерный	0.007	0.007	0.008	0.025	0.031	0.033

В таблице 10 представлены оценки портфельного кредитного риска по состоянию на 01.07.2012 с учетом всей совокупности наблюдений. Горизонт моделирования — один месяц.

#### 4. Заключение

В работе рассматривалась задача оценки портфельного кредитного риска на примере ссудного портфеля одного из коммерческих банков. Были предложены алгоритмы оценки риска для случаев наличия и отсутствия межотраслевой корреляции возникновения и величины убытков. Использовался инструментарий гамма-распределений, непараметрических ядерных оценок и копула-функций.

Было показано, что хвосты эмпирического распределения убытков хорошо аппроксимируются как гамма-распределением, так и непараметрическими оценками до уровня 90%. При моделировании более высоких квантилей непараметрические методы из-за сравнительно небольшой толщины хвостов модельного распределения склонны занижать оценки риска, что выражается в повышенной частоте пробоев кривой VaR. Таким образом, для практического применения целесообразно использовать непараметрические модели на низких уровнях значимости и гамма-распределение — на высоких.

Для оценки совместного распределения относительных потерь рекомендуется использовать копулу Стьюдента с малым числом степеней свободы, позволяющую точнее моделировать большие величины убытков.

При сравнении одномерного и многомерного подходов в случае наличия значительной межотраслевой корреляции убытков последний выглядит предпочтительнее в терминах соответствия модельной и фактической частот пробоев кривой VaR и по значению функций потерь. Рекомендации относительно применимости параметрических и непараметрических моделей в многомерном случае аналогичны тем, что были сформулированы для одномерного.

#### Список литературы

Благовещенский Ю. Н. (2012). Основные элементы теории копул. *Прикладная эконометрика*, 26 (2), 113–130.

Крицкий О. Л., Ульянова М. К. (2007). Определение многомерного финансового риска портфеля акций. *Прикладная эконометрика*, 8 (4), 3–17.

Фантаzzини Д. (2008). Управление кредитным риском. *Прикладная эконометрика*, 12 (4), 84–137.

Фантаzzини Д. (2009). Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском. *Прикладная эконометрика*, 13 (1), 105–138.

Altman E. I., Brady B., Resti A., Sironi A. (2005). The link between default and recovery rates: theory, empirical evidence, and implications. *Journal of Business*, 78 (6), 2203–2227.

Black F., Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637–654.

Credit Suisse Financial Products. (1997). CreditRisk+ — A credit risk management framework. *Technical document*. L. / N. Y.

Fantazzini D. (2006). Dynamic copula modeling for Value at Risk. *Frontiers in Finance and Economics*, 2 (5), 1–38.

Frey R., McNeil A., Nyfeler M. (2001). Copulas and credit models. *RISK*, October, 111–114.

Hayfield T., Racine J. S. (2008). Nonparametric econometrics: The np package. *Journal of Statistical Software*, 27 (5), 1–32.

Morgan J. P. (1997). CreditMetrics — technical document. J. P. Morgan. N. Y. [http://www.creditrisk.ru/publications/files\\_attached/creditmetrics\\_techdoc.pdf](http://www.creditrisk.ru/publications/files_attached/creditmetrics_techdoc.pdf).

Kealhofer S. (1998). Portfolio management of default risk. KMV Corporation. <http://www.complexity.ru/papers/999-0000-033.pdf>.

Kojadinovic I., Yan J. (2010). Modeling multivariate distributions with continuous margins using the copula R package. *Journal of Statistical Software*, 34 (9), 1–20.

Lucas A., Klaassen P., Spreij P. (2003). Tail behavior of credit loss distributions for general latent factor models. *Applied Mathematical Finance*, 10 (4), 337–357.

McKinsey. (1997). Credit Portfolio View. *Technical Report*. McKinsey & Company.

Merton R. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29, 449–470.

R Development Core Team. (2010). R: A language and environment for statistical computing. *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria.

Rosenblatt M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals of Mathematical Statistics*, 27 (3), 832–837.

Silverman B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London, New York.

Yan J. (2007). Enjoy the joy of copulas: With a package copula. *Journal of Statistical Software*, 21 (4), 1–21.