

А. И. Травкин

Конструкции из парных копул в задаче формирования портфеля акций

Задача выбора и оценки совместного распределения доходностей играет ключевую роль при формировании инвестиционного портфеля. В качестве такого распределения в работе используются конструкции из парных копул (КПК) на произвольных R -ветвлениях. Для инвестора с экспоненциальной функцией полезности сформированы портфели из акций нефтегазового сектора биржи NYSE. Показано, что портфели на основе КПК приносят большую доходность, а оценка VaR на основе КПК не хуже, чем оценка на основе более простых альтернатив. Применительно к российскому нефтегазовому рынку акций сформированы портфели с ограничением на риск, измеренный дисперсией. В этом случае КПК проигрывает альтернативным моделям по доходности, что может быть связано с используемым критерием оптимизации портфеля (не учитывающим моменты высших порядков), а также с несовершенством процедуры отыскания оптимального ветвления методом максимальных остовных деревьев.

Ключевые слова: конструкции из парных копул; правильные ветвления; EGARCH; оптимизация инвестиционного портфеля; ожидаемая полезность; VaR.

JEL classification: C32; C51; C53; G11.

1. Введение

Важным аспектом при формировании инвестиционного портфеля является прогнозирование совместного распределения доходностей входящих в него активов. Это распределение должно, в первую очередь, отражать так называемые стилизованные факты — ряд эмпирически выверенных свойств финансовых рынков. Стилизованные факты частных распределений доходностей акций хорошо известны: эти распределения имеют тяжелые хвосты и демонстрируют в основном отрицательную асимметрию, кроме того, относительно времени наблюдается кластеризация и асимметрия волатильности. Методы моделирования этих эмпирических свойств доходностей хорошо известны. В данной работе будут специфицироваться и оцениваться частные распределения, учитывающие именно эти стилизованные факты. Важно отметить, что на самом деле это не исчерпывающий список фактов, присущих частным распределениям: в реальности, к примеру, также наблюдается динамика третьего и четвертого моментов распределения, различные GARCH-М эффекты и т. д., которые по тем или иным причинам не учитываются в данной работе.

Наибольший интерес представляет учет стилизованных фактов совместного распределения доходностей. Известно, что цены финансовых активов склонны скорее к совместному падению, чем к совместному росту: данный эффект называют зависимостью в нижних хвостах распределений. Моделирование этой зависимости осуществляется посредством копул, позволяющих конструировать совместные функции распределения с желаемыми частными распределениями и типом зависимости. В экономической науке копулы впервые были

применены в работе (Frees, Valdez, 1998) для моделирования страховых рисков, где авторы продемонстрировали эффективность данного подхода. После выхода этой и ряда других работ (Joe, 1997; Embrechts et al., 1999; Nelsen, 1999) широкое распространение в финансовой литературе получили эллиптические, архимедовы и некоторые другие копулы. Со временем стали очевидны недостатки этих копул. Так, например, эллиптические копулы радикально симметричны, что приводит к одинаковой зависимости в верхнем и нижнем хвостах распределений, кроме того, они имеют слишком большое число параметров. Архимедовы копулы, напротив, имеют недостаточное количество параметров и являются перестановочными функциями распределения, что ведет к равенству всех частных распределений одной размерности (что означало бы, к примеру, одинаковое совместное распределение доходностей внутри сектора и между секторами). Появилась необходимость в более реалистичной модели, которая одновременно будет относительно проста при оценивании и позволит избавиться от проблем, присущих упомянутым выше копулам. Одной из таких моделей являются конструкции из парных копул (КПК).

Конструкции из парных копул впервые описаны в (Joe, 1996), но нашли свое первое применение в финансовом моделировании лишь в работе (Aas et al., 2009). По своей сути КПК представляют собой составную копулу, собранную из парных (двумерных) копул, подбираемых для каждой пары рассматриваемых активов. Они не являются перестановочными, позволяют оценивать зависимость в хвостах распределения для каждой пары активов отдельно (в то время как в эллиптических и архимедовых копулах зависимость в хвостах зачастую сильно зависит от единственного параметра), а также строить модели, обладающие «достаточным» количеством параметров. При конструировании и оценивании конструкций из парных копул возникает проблема с выбором так называемого правильного ветвления (*R*-ветвления), определяющего структуру КПК. Существует множество работ (Chollete et al., 2009; Zhang, Maringer, 2011; Aas, Berg, 2009; Riccetti, 2011 и др.), в той или иной мере затрагивающих портфельный анализ с использованием КПК. Недостатком большинства из них является то, что авторы рассматривают малую размерность (не более пяти активов) и зачастую ограничиваются только *C*- и *D*-ветвлениями (частными случаями *R*-ветвлений, дающими возможность использовать более простые алгоритмы генерации случайных чисел и вычисления плотности КПК), что не позволяет в полной мере раскрыть потенциал данных моделей. Например, в работе (Riccetti, 2011) автор строит КПК на *C*-ветвлениях и обнаруживает, что она проигрывает портфелю с равными весами.

В последнее время начинают появляться работы, использующие конструкции из парных копул на произвольных *R*-ветвлениях. Brechmann, Czado (2011) сравнивают КПК с рядом альтернативных моделей по качеству прогнозов *VaR*, в качестве альтернатив рассматриваются многомерные GARCH модели, эллиптические копулы и независимая копула. В результате они делают вывод, что использование КПК при оценке распределения ведет к более точным прогнозам *VaR*, чем использование других распределений. В работе (Dissman et al., 2013) авторы строят модель совместного распределения доходностей 16 индексов (в которые входят товарные, фондовые индексы и индексы облигаций), а в (Brechmann et al., 2012) исследуются вопросы снижения числа параметров КПК.

Цель данной работы — решить задачу отыскания оптимальных весов портфеля и оценить его качество (в смысле способности генерировать прибыль) с использованием конструкций из парных копул на *R*-ветвлениях по сравнению с рядом альтернативных моделей копул. Сравнение ведется вне выборки по двум критериям: полученному доходу и качест-

ву спрогнозированного *VaR* портфеля (при помощи теста, предложенного в (Kupiec, 1995)). Сравнение ведется в разрезе двух рынков: американского NYSE и российского RTS Standard применительно к акциям нефтегазового сектора.

Портфели из акций NYSE формируются в предположении, что инвестор имеет экспоненциальную функцию полезности, т. к. параметр этой функции имеет четкую экономическую интерпретацию и представляет собой абсолютную несклонность к риску. По результатам оценивания можно с уверенностью сказать, что портфель из акций, сформированный при помощи КПК на произвольных *R*-ветвлениях, приносит значительно больший доход, чем более простые альтернативные модели, при этом КПК позволяют прогнозировать *VaR* по крайней мере не хуже, чем альтернативные модели.

Портфели из акций RTS Standard формируются исходя из максимизации ожидаемой полезности при ограничении на риск, измеренный дисперсией. Здесь, однако, портфель на основе КПК проигрывает почти всем конкурирующим моделям, что может быть объяснено отсутствием учета асимметрии и эксцесса, а также несовершенством метода подбора оптимального *R*-ветвления. Тем не менее, КПК проходит тест, предложенный в (Kupiec, 1995), на 95%-ном уровне значимости.

2. Копулы: определение, оценивание и тестирование

Интенсивное проникновение копул в экономические науки началось только в конце 1990-х годов после выхода монографий (Joe, 1997; Nelsen, 1999) и статей (Frees, Valdez, 1998; Embrechts et al., 1999), обосновавших использование этих моделей в страховых и финансовых областях.

Будем обозначать единичный отрезок через $\mathbb{I} = [0, 1]$, единичный n -мерный куб через $\mathbb{I}^n = [0, 1]^n$.

Определение. Копула $C: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ есть совместная функция распределения n случайных величин U_i , $i = 1, 2, \dots, n$, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$.

Следовательно, копула обладает стандартными свойствами функции распределения.

1. Если хотя бы один из аргументов достигает нижней границы, то копула равна нулю:

$$\text{если } u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{I}^n \text{ и } \prod_{i=1}^n u_i = 0, \text{ то } C(u) = 0. \quad (1)$$

2. Поскольку частные распределения есть равномерные случайные величины из $\mathbb{I}$, то:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad C(u_i, \iota_{n-1}) = u_i, \quad (2)$$

где ι_{n-1} — вектор размерности $n-1$, состоящий из единиц.

3. Вероятность случайного вектора U попасть внутрь n -мерного параллелепипеда $\mathbb{B}^n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{I}^n$ должна быть неотрицательной:

$$\forall \mathbb{B}^n \subseteq \mathbb{I}^n \quad P(U \in \mathbb{B}^n) \geq 0. \quad (3)$$

Гибкость подхода, основанного на использовании копул, демонстрирует следующая теорема (Sklar, 1959): для любой n -мерной совместной функции распределения F с непрерыв-

ными частными распределениями $F_1, \dots, F_n$ случайных величин $X = (X_1, \dots, X_n)$ найдется единственная функция C , такая, что будет выполняться равенство:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^n \quad F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad (4)$$

где $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ — расширенная числовая прямая.

Верно и обратное, т. е. для любых частных распределений $F_1, \dots, F_n$ существует функция C , такая, что $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ является совместной функцией распределения случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с данными частными распределениями. Это означает, что задача конструирования совместной функции распределения с желаемыми свойствами взаимосвязи случайных величин становится тривиальной — необходимо только подобрать необходимые частные распределения $F_1, \dots, F_n$ и копулу C . Обозначим $u_i = F_i(x_i)$ и условимся далее писать $C(u_1, \dots, u_n)$ или $C(u)$ вместо $C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.

Зависимость в хвостах распределения (tail dependence) — важный стилизованный факт совместного распределения финансовых доходностей, неоднократно подтвержденный эмпирическими исследованиями (Erb et al., 1994; Longin, Solnik, 2001; Ang, Chen, 2002; Jondeau, Rockinger, 2003). Данный факт означает, что доходности финансовых активов склонны скорее к совместному падению, чем к совместному росту. Рассмотрим так называемые экстремальные корреляции вида:

$$\begin{aligned} \rho_U &= \text{Corr}(X, Y | X \geq F_X^{-1}(q), Y \geq F_Y^{-1}(q)), \\ \rho_L &= \text{Corr}(X, Y | X \leq F_X^{-1}(q), Y \leq F_Y^{-1}(q)). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь X и Y — случайные величины, $F^{-1}(q)$ — некоторый квантиль распределения F в точке $q \in \mathbb{I}$. В работе (Longin, Solnik, 2001) на примере доходностей акций показано, что при $q \rightarrow 1$ корреляция ρ_U стремится к нулю, однако при $q \rightarrow 0$ корреляция ρ_L стремится к некоторому числу, отличному от нуля, что иллюстрирует зависимость в нижних хвостах распределения (lower tail dependence) и отсутствие зависимости в верхних хвостах распределения (upper tail dependence). Кроме того, активы, имеющие низкие бета-коэффициенты, и традиционно считающиеся менее рисковыми, могут иметь высокую зависимость в хвостах распределений (Ang, Chen, 2002). Все это обуславливает важность учета данного вида зависимости. Использование копул значительно облегчает эту задачу: существует множество классов копул, позволяющих моделировать различные виды зависимости как в верхних, так и в нижних хвостах распределений. Ниже кратко рассмотрим несколько таких классов, используемых в данной работе:

Копула дожития $\bar{C}$ определяется из соотношения:

$$\bar{F}(x) = \bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)) = \bar{C}(1_n - u). \quad (6)$$

Здесь $\bar{F}(x) =: \bar{F}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n)$ — совместная функция дожития случайного вектора X , а $\bar{F}_i$ — частная функция дожития i -й компоненты вектора X . Такие копулы полезны, к примеру, если требуется смоделировать нижнюю хвостовую зависимость при помощи копулы с верхней хвостовой зависимостью.

Эллиптическими копулами называют копулы эллиптических распределений¹. Эллиптические копулы наследуют радиальную симметрию от эллиптических распределений, т. е. для

¹ Подробнее об эллиптических распределениях и копулах см., например, (Frahm et al., 2003).

них выполняется соотношение $C(u) = \bar{C}(u)$. Из этого вытекает одинаковая зависимость в хвостах распределения (хотя доходности акций скорее склонны одновременно падать, чем одновременно расти). Кроме того, такие копулы каждой паре случайных величин ставят в соответствие параметр — коэффициент корреляции. В задачах больших размерностей число параметров может быть слишком велико и приводить к перепараметризации модели.

Архимедовыми копулами² называют копулы вида $C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n))$, $2 \leq n \leq d$, где $\varphi: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неотрицательная непрерывная убывающая выпуклая функция (называемая генератором копулы), для которой выполняется соотношение $\varphi(1) = 0$, а $\varphi^{[-1]}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{I}$ — псевдообратная к φ функция вида

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

для которой выполняется свойство d -монотонности:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi^{[-1]}(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Архимедовы копулы позволяют моделировать доходности с радиальной асимметрией, выражаются в элементарных функциях и включают в себя множество семейств, что позволяет подбирать желаемые типы зависимости. Недостатком является, во-первых, перестановочность этих копул: все частные распределения одной размерности идентичны. Во-вторых, такие копулы зачастую имеют всего один параметр, чего явно недостаточно для адекватного отражения действительности. В-третьих, лишь некоторые копулы с d -монотонными обратными генераторами, где d мало, позволяют моделировать отрицательную зависимость. Одной из важнейших архимедовых копул является независимая копула Π , характеризующая независимость компонент случайного вектора U :

$$\Pi(u) = \prod_{i=1}^n u_i. \quad (7)$$

Оценивание. В соответствии с теоремой Склара (4), распределение случайного вектора можно записать в виде:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) =: C(u_1, \dots, u_n). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по $x_1, \dots, x_n$, получим плотность этого распределения:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = c(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i). \quad (9)$$

Таким образом, плотность совместного распределения распадается на произведение плотностей частных распределений и плотности копулы, поэтому логарифмическая функция максимального правдоподобия имеет вид:

$$L = \sum_{t=1}^T \ln f_t(x_{1t}, \dots, x_{nt}) = \sum_{t=1}^T \ln c(u_{1t}, \dots, u_{nt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}). \quad (10)$$

² Подробнее об архимедовых копулах см. (McNeil, Neslehova, 2009).

На этом факте основан метод оценивания копул IFM (Inference Functions for Margins), заключающийся в последовательном оценивании сначала частных распределений (второе слагаемое из (10)), а затем копулы (первое слагаемое из (10)). Этот метод становится единственным возможным вариантом оценивания моделей, число параметров в которых слишком велико. Данная работа не является исключением: каждая из рассматриваемых ниже моделей включает порядка 100 параметров. В разделе 4 рассматриваются модели частных распределений, в разделах 5 и 6 — КПК и альтернативные модели копул.

Тестирование. Разработка параметрических тестов копул случайных векторов является довольно трудной задачей, однако на сегодняшний день существует много непараметрических тестов (Berg, 2009). Нулевая гипотеза состоит в том, что выборка Y (матрица размерности $T \times n$, строки которой представляют собой реализации случайного вектора U ; T — число реализаций) получена из копулы C , принадлежащей параметрическому классу $\mathcal{C} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$:

$$H_0: C \in \mathcal{C}. \quad (11)$$

Альтернативная гипотеза, соответственно, $H_1: C \notin \mathcal{C}$. Для тестирования H_0 наблюдения U трансформируются в так называемые псевдо-наблюдения Z по следующему правилу:

$$z_t = (z_{1t}, \dots, z_{nt}) = \left(\frac{r_{1t}}{T+1}, \dots, \frac{r_{nt}}{T+1} \right). \quad (12)$$

Величина r_{it} — это ранг t -го наблюдения i -й переменной по убыванию, а z_t — строки матрицы Z . Копулы устойчивы к строго возрастающим преобразованиям, поэтому Y и Z имеют одну и ту же копулу C . Использование псевдо-наблюдений z_t позволяет избежать тестирования более узкой гипотезы $H_0^*: F \in \mathcal{F} = \{F_\vartheta; \vartheta \in \Theta\}$ (Berg, 2009), где F — совместная функция распределения вектора X , а $\vartheta \in \Theta$ — вектор параметров копулы и частных распределений из Θ . Однако псевдо-наблюдения z_t уже не являются независимыми, поэтому для получения надежных p -значений требуется применять процедуры бутстрапирования.

Читателям, не знакомым с теорией копул, рекомендуется обратиться к книге (Nelsen, 1999), во многом более объемлющий материал представлен также в серии публикаций (Фантаццини, 2011a, 2011b, 2011c). Базовые элементы теории копул рассмотрены в (Благовещенский, 2012), а обзор областей применения копул дан в работе (Пеникас, 2010).

3. Данные

Будем строить портфель из акций компаний нефтегазового сектора. В выборку попали акции, торгующиеся на NYSE не менее чем 1000 недель. Недельные доходности были выбраны во избежание проблем с пропущенными наблюдениями и эффектами начала и конца недели. Рассматриваемый период времени — с 31.01.1994 по 31.03.2013 (1000 недель). Инвестиционный период, для которого осуществляется ретроспективный прогноз, включает последние 100 недель начиная с 02.05.2011.

Нефтяной рынок делится на шесть секторов:

- 1) Integrated Oil & Gas;
- 2) Independent Oil & Gas;

- 3) Drilling & Exploration;
- 4) Equipment & Services;
- 5) Pipelines;
- 6) Refining & Marketing.

Из каждого сектора были выбраны две акции, имеющие наибольшую рыночную капитализацию. Описательные статистики приведены в табл. 1.

Таблица 1. Описательные статистики доходностей акций нефтегазового сектора NYSE

Сектор	Компания	Тикер	Минимум	Максимум	Медиана	Среднее
Integrated Oil & Gas	Chevron	CVX	-31.67	15.47	0.272	0.165
	Exxon Mobil	XOM	-22.30	9.77	0.201	0.171
Independent Oil & Gas	Apache	APA	-30.34	16.65	0.206	0.184
	Anadarko Petroleum	APC	-41.25	21.62	0.318	0.203
Drilling & Exploration	Ensco	ESV	-42.09	21.37	0.335	0.215
	Noble	NE	-39.96	23.97	0.397	0.230
Equipment & Services	Halliburton	HAL	-57.99	35.45	0.188	0.176
	Schlumberger	SLB	-26.11	16.71	0.234	0.164
Pipelines	Enbridge	ENB	-19.76	13.60	0.287	0.270
	Kinder Morgan Energy	KMP	-15.65	19.74	0.245	0.241
Refining & Marketing	Marathon Oil	MRO	-33.08	21.12	0.275	0.199
	Valero Energy	VLO	-34.00	25.42	0.426	0.259

Сектор	Компания	Станд. отклонение	Коэффициент асимметрии	Коэффициент экссцесса
Integrated Oil & Gas	Chevron	3.320	-1.00	11.60
	Exxon Mobil	3.048	-0.58	6.43
Independent Oil & Gas	Apache	5.047	-0.42	5.05
	Anadarko Petroleum	5.293	-0.54	7.86
Drilling & Exploration	Ensco	6.591	-0.42	5.37
	Noble	6.318	-0.38	5.59
Equipment & Services	Halliburton	6.373	-1.15	13.40
	Schlumberger	4.831	-0.36	4.94
Pipelines	Enbridge	2.940	-0.48	6.29
	Kinder Morgan Energy	3.043	0.29	8.71
Refining & Marketing	Marathon Oil	4.535	-0.48	7.48
	Valero Energy	5.657	-0.41	6.32

4. Частные распределения

При моделировании частных распределений, в первую очередь, хочется отразить известные стилизованные факты о распределениях финансовых доходностей.

Тяжелые хвосты. Впервые проблема моделирования тяжелых хвостов, порождаемых редкими экстремальными событиями, поднята в работе (Mandelbrot, 1963) при анализе доходностей цен на хлопок. В этой работе приведены ссылки на ряд более ранних эмпирических исследований, задокументировавших тяжелые хвосты, самое раннее из них относится к 1915 году. Применительно к доходностям акций моделирование тяжелых хвостов впервые осуществлено в (Fama, 1965) с использованием идей работы (Mandelbrot, 1963).

Асимметрия распределения. Распределение доходностей не симметрично. Впервые это теоретически обосновано и эмпирически выверено в работе (Arditti, 1967). В дальнейшем этот факт неоднократно подтвержден — см., например, (McEnally, 1974; Singleton, Wingender, 1986; Peiro, 1999).

Кластеризация волатильности. Эффект описан еще Мандельбро: «большие изменения цен с большей вероятностью следуют за большими, а малые — за малыми»³. Необходимость учета кластеризации волатильности породила класс GARCH моделей, впервые сформулированных в работах (Engle, 1982; Bollerslev, 1986).

Асимметрия волатильности. Рынок по-разному реагирует на положительные и отрицательные новости. Как правило, отрицательные новости приводят к большему росту волатильности, чем положительные (Christie, 1982; French et al., 1987; Brown et al., 1988). Оказалось, что GARCH модели представляют собой естественное средство для учета асимметрии волатильности посредством введения зависимости волатильности от знака предыдущих наблюдений доходности или остатков, см., например, (Nelson, 1991; Glosten et al., 1993; Zakoian, 1994).

Принимая во внимание четыре стилизованных факта, названных выше, строится следующая модель частных распределений:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \alpha x_{t-1} + \sigma_t \varepsilon_t, \\ \ln \sigma_t^2 &= \beta_0 + \beta_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_2 \varepsilon_{t-1} + \beta_3 \ln \sigma_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где μ, α, β — коэффициенты, подлежащие оцениванию.

Эта модель известна как EGARCH (Exponential GARCH) и описана в (Nelson, 1991). Как любая GARCH модель, она позволяет учесть эффект кластеризации волатильности. Кроме того, зависимость логарифма дисперсии отдельно от предыдущих ошибок и их модулей позволяет учесть асимметрию волатильности. Кроме того, перед оценкой ряд наблюдений проверяется на автокорреляцию с помощью теста Льюнга–Бокса. Если гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается, принимаем $\alpha = 0$. Ошибка ε имеет скошенное t -распределение из (Hansen, 1994) со следующей функцией плотности:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{b\varepsilon + a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, & \varepsilon \leq -\frac{a}{b}, \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{b\varepsilon + a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, & \varepsilon \geq -\frac{a}{b}, \end{cases} \quad (14)$$

³ Mandelbrot (1963, p. 418).

где

$$a = 4\lambda c \frac{\nu - 2}{\nu - 1}, \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu - 2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Нетрудно увидеть, что это стандартизированное распределение, т.е. $E(\varepsilon) = 0$ и $\text{Var}(\varepsilon) = 1$. Параметры, контролирующие математическое ожидание и дисперсию, введены линейным преобразованием в модели (6). Параметры λ и ν отвечают, соответственно, за асимметрию и эксцесс распределения, что позволяет учесть асимметрию и толстые хвосты в распределении доходности. Для оценки модели (13) используется метод максимального правдоподобия с распределением (14). Всего необходимо оценить 100×12 моделей: для всех 12 акций осуществляется ретроспективный прогноз на каждую из 100 недель инвестиционного периода.

Отметим, что помимо стилизованных фактов, упомянутых выше, существуют и некоторые другие, которые здесь не учитываются. Так, например, асимметрия и эксцесс, вообще говоря, зависят от времени. Существуют веские доказательства динамической природы асимметрии доходности (Singleton, Wingender, 1986). Для моделирования динамики моментов более высоких порядков используют ARCD модели (Hansen, 1994; Jondeau, Rockinger, 2003; Harvey, Siddique, 1999; Leon et al., 2005). Добиться качественного приближения асимметрии и эксцесса, используя только их предыдущие значения и значения ошибок, уже не удастся. Необходимо вводить дополнительные экзогенные переменные, обусловленные с точки зрения экономической теории. Кроме того, оценка таких моделей сопряжена с большими вычислительными трудностями (Jondeau, Rockinger, 2003).

Также пришлось отказаться от GARCH-M модели, в которой доходность в момент t зависит от стандартного отклонения в момент t , т.е. в уравнение для x_t модели (13) добавляется слагаемое $\gamma g(\sigma_t)$, где g — некоторая возрастающая функция в $\mathbb{R}$ с коэффициентом γ . Однако при оценке такой модели коэффициенты зачастую оказывались не интерпретируемыми (наблюдались либо отрицательные значения коэффициента γ , либо слишком большие отрицательные значения константы μ , скомпенсированные большими положительными значениями коэффициента γ).

5. Конструкции из парных копул

Впервые конструкции из парных копул появились в работе (Joe, 1996), хотя автор еще не употреблял терминов «vine copula» или «pair copula construction». Идея построения КПК заключается в следующем. Рассмотрим разложение плотности совместного распределения случайных величин в произведение их условных плотностей:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1)f(x_2 | x_1)f(x_3 | x_1, x_2) \dots f(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1). \quad (15)$$

Используя (9), запишем второй множитель в следующем виде:

$$f(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_1)} = c_{12}(u_1, u_2)f_2(x_2). \quad (16)$$

Аналогично, третий множитель представим в виде:

$$f(x_3 | x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2)} = c_{13|2}(u_{1|2}, u_{3|2})f(x_3 | x_2) = c_{13|2}(u_{1|2}, u_{3|2})c_{23}(u_2, u_3)f_3(x_3). \quad (17)$$

Вообще говоря, для k -мерного вектора v данное представление выглядит следующим образом (Джозе, 1996):

$$f(x, v) = c_{xv_j | v_{-j}}(u_{x | v_{-j}}, u_{v_j | v_{-j}})f(x | v_{-j}), \quad (18)$$

где символ v_{-j} означает вектор v без j -го элемента. В итоге можно получить стандартное представление совместной плотности распределения (9), где $c(u_1, \dots, u_n)$ будет представлять собой произведение из $n(n-1)/2$ парных копул, называемое конструкцией из парных копул. Например, можно проверить, что для $n=3$ существует три декомпозиции трехмерной копулы в КПК:

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2, u_3) &= c_{12|3}(u_{1|3}, u_{2|3})c_{13}(u_1, u_3)c_{23}(u_2, u_3)f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3), \\ c(u_1, u_2, u_3) &= c_{13|2}(u_{1|2}, u_{3|2})c_{12}(u_1, u_2)c_{23}(u_2, u_3)f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3), \\ c(u_1, u_2, u_3) &= c_{23|1}(u_{2|1}, u_{3|1})c_{12}(u_1, u_2)c_{13}(u_1, u_3)f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3). \end{aligned} \quad (19)$$

Оказалось, что для работы с КПК удобно использовать графы особого вида, называемые ветвлениями (Bedford, Cooke, 2002).

Для описания ветвлений необходимо привести некоторые определения из теории графов. Граф представляет собой пару $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$, где $\mathcal{N} \neq \emptyset$ есть набор вершин, а $\mathcal{E}$ — набор ребер (попарных связей между вершинами). Например, на рис. 1 изображен граф с шестью вершинами $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 12, 23, 13 | 2\}$ и тремя ребрами $\mathcal{E} = \{12, 23, 13 | 2\}$. Вершины a и b , соединенные ребром, называют *смежными* и обозначают (a, b) . *Степень* вершины равна числу смежных с ней вершин. *Путь* называют последовательность вершин, соединенных ребрами. Нам потребуются следующие особые виды графов. *Полный граф* — граф, в котором две любые вершины смежны. *Подграфом* $\mathcal{G}' = \{\mathcal{N}', \mathcal{E}'\}$ графа $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$ называют такой граф, для которого выполняется $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ и $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. *Дерево* — связный ациклический граф. Термин «связный» означает, что между любыми двумя вершинами графа существует путь; «ациклический» означает, что этот путь — единственный. *Остовное дерево* — дерево, являющееся подграфом связного графа $\mathcal{G}$ и включающее все его вершины. *Лес* — ациклический граф. Такой граф можно представить как множество деревьев. На рисунке 1 изображен лес, состоящий из трех деревьев. Лес называют *ориентированным*, если множество деревьев упорядочено.

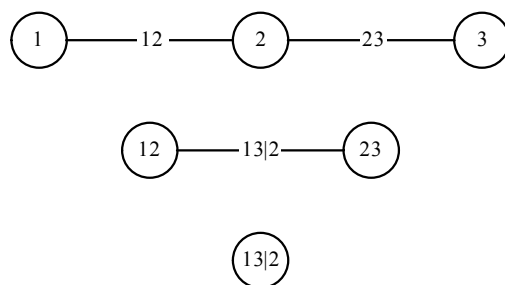


Рис. 1. Трехуровневое ветвление для

$$c(u_1, u_2, u_3) = c_{13|2}(u_{1|2}, u_{3|2})c_{12}(u_1, u_2)c_{23}(u_2, u_3)f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)$$

Имея n активов, КПК можно представить в виде ориентированного леса $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$, состоящего из n деревьев $\mathcal{T}_j = \{\mathcal{N}_j, \mathcal{E}_j\}$, $j = 1, \dots, n$, причем j -е дерево состоит из $n - j + 1$ вершин $\eta_{js} \in \mathcal{N}_j$, $s = 1, \dots, n - j + 1$ и $n - j$ ребер $e_{jk} \in \mathcal{E}_j$, $k = 1, \dots, n - j$, и на последнем дереве множество ребер пусто $\mathcal{E}_n = \emptyset$. Кроме того, должно выполняться условие смежности, т. е. для любых вершин $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{N}_{j+1}$, $b = (b_1, b_2) \in \mathcal{N}_{j+1}$ и $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{N}_j$ ($j = 1, \dots, n - 1$) выполняться соотношение:

$$(a, b) \Rightarrow |a \cap b| = 1 \Leftrightarrow |a \Delta b| = 2, \quad (20)$$

где $|A|$ означает мощность множества A (для конечного множества она совпадает с числом элементов множества), а $A \Delta B$ — симметрическую разность A и B . Если условие смежности выполнено, то говорят, что $\mathcal{T}_{j+1}$ является реберным графом графа $\mathcal{T}_j$, а ребра (a_1, a_2) и (b_1, b_2) называют смежными. Леса, удовлетворяющие этим условиям, называются правильными ветвлениями или R -ветвлениями (regular vine). Между правильными ветвлениями и КПК существует биективное отображение. Например, для второй из трех приведенных в (19) КПК R -ветвление имеет вид, как на рис. 1. Это ветвление имеет три уровня. Первый уровень характеризует дерево с тремя вершинами, каждая из которых соответствует плотности частного распределения $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Ребра показывают наличие копул между соответствующими частными распределениями. После преобразования переменных $u_i = F_i(x_i)$ для пар u_1, u_2 и u_2, u_3 строятся парные копулы $C(u_1, u_2)$ и $C(u_2, u_3)$. На втором уровне строится условная копула $C(u_1, u_3 | u_2)$ для условных наблюдений $u_1 | u_2$ и $u_3 | u_2$. Чтобы получить эти наблюдения, используется так называемая h -функция, введенная в (Aas et al., 2009):

$$u | v = h(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}. \quad (21)$$

Третий уровень констатирует построение копулы $C(u_1, u_3 | u_2)$ и важен при получении случайных чисел из КПК, поскольку в этом случае необходимо получать $u_1 | u_2$ из $u_1 | u_2, u_3$, либо $u_3 | u_2$ из $u_3 | u_1, u_2$ с помощью обратной h -функции.

Существует два частных случая правильных ветвлений, имеющих одинаковую структуру деревьев на каждом уровне. Это, во-первых, C -ветвление или каноническое ветвление (canonical vine), каждое дерево которого представляет собой звезду (дерево на j -м уровне имеет вершину со степенью $n - j$). Во-вторых, это D -ветвление (D -vine), каждое дерево которого представляет собой цепь (все вершины имеют степень не больше двух). Для $n = 3$, как можно заметить, все ветвления являются одновременно C - и D -ветвлениями. Для $n = 4$ все ветвления являются либо C -, либо D -ветвлениями, однако они уже не совпадают. При $n \geq 5$ появляются нетривиальные R -ветвления.

При построении КПК возникает два основных вопроса: 1) как выбрать оптимальное R -ветвление? и 2) как выбрать $n(n - 1) / 2$ парных копул? Рассмотрим первый вопрос в предположении, что уже есть надежный способ подбора «правильной» копулы для каждой пары наблюдений. Для того чтобы в случае $n = 3$ отыскать методом максимального правдоподобия оптимальную КПК, необходимо оценить все три потенциальных R -ветвления (19) и выбрать то, при котором достигается максимум функции правдоподобия. В работе (Morales-Napoles, 2010) показано, что для набора из n случайных величин существует $C_n^2(n - 2)! 2^{C_{n-2}^2}$ уникальных R -ветвлений, что в случае $n = 12$ означало бы необходимость оценки более $8.4 \cdot 10^{21}$ моделей. Такая процедура, конечно, обеспечила бы максимум функции правдоподобия, однако она становится технически нереализуемой уже для $n = 7$ (в этом случае число R -ветвлений

равняется 2 580 480). Поэтому хотелось бы получить критерий, который давал бы, возможно, не самое точное решение, но был бы удобен с точки зрения вычислений.

Простым критерием является максимум суммы коэффициентов корреляции (или метод максимальных остовных деревьев), используемый, например, в (Dissmann et al., 2013). Процесс подбора ветвления в этом случае включает $n - 1$ итерацию. Обозначим через $\mathcal{L}_j^{\max} = \{\mathcal{N}_j, \mathcal{E}_j^{\max}\}$, $j = 2, \dots, n - 1$ такой реберный граф дерева $\mathcal{T}_j$, который включает все смежные ребра дерева $\mathcal{T}_j$ в качестве вершин; предположим также, что $\mathcal{L}_1^{\max} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{E}_1^{\max}\}$ есть полный граф. Обозначим выборку Y на j -й итерации через Y_j . Наблюдения Y_1 — это безусловные наблюдения, они совпадают с Y ; для $j > 1$ матрица Y_j содержит условные наблюдения, рассчитанные с помощью h -функции (9). На j -й итерации вычисляются корреляции ρ_{sl} для всех пар наблюдений u_s, u_l из Y_j , для которых существует соответствующее ребро в графе $\mathcal{L}_j^{\max}$, т. е. $(s, l) \in \mathcal{E}_j^{\max}$. Далее ищется остовное дерево графа $\mathcal{L}_j^{\max}$, максимизирующее сумму коэффициентов корреляции:

$$\sum_{\mathcal{E}_j^{\max}} \rho_{sl} \rightarrow \max, \quad (22)$$

где сумма берется по всевозможным наборам из $j - 1$ ребер множества $\mathcal{E}_j^{\max}$. В настоящей статье для построения первого дерева использовалась частная корреляционная матрица Спирмена. Для построения остальных деревьев использовалась обычная ранговая корреляция Спирмена.

Второй вопрос заключается в выборе $n(n - 1) / 2$ парных копул для нашей модели. После построения очередного дерева из ветвления необходимо подобрать парные копулы для ребер этого дерева (чтобы потом преобразовать наблюдения для следующего уровня через h -функцию). Для этого, имея некоторый набор копул, можно проверить гипотезу (11) для каждой копулы из данного набора и выбрать ту, для которой p -значение оказалось наибольшим. Работы (Berg, 2009; Genest et al., 2009) направлены на сравнение характеристик различных тестов путем имитационного моделирования случайных величин. В данной статье будет использоваться EDF (Empirical Distribution Function) критерий со статистикой Крамера–фон Мизеса, т. к. он показывает хорошие результаты в обеих вышеуказанных работах. Тестовая статистика записывается в виде:

$$KM = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{C}(z_i) - C_{\theta}(z_i))^2 d\hat{C}(z_i) = \sum_{i=1}^m (\hat{C}(z_i) - C_{\theta}(z_i))^2. \quad (23)$$

Здесь $\hat{C}(z_i)$ — эмпирическая копула, $C_{\theta}(z_i)$ — теоретическая копула с параметром θ , оцененным по выборке Z , m — число точек сетки в $\mathbb{I}^n$.

6. Построение портфеля

Схема построения портфеля. Построить портфель означает каким-нибудь образом опделить для имеющихся активов оптимальный вектор весов w , характеризующий доли средств, вкладываемых в каждый актив. В общем виде задача отыскания оптимального вектора w^* , когда в качестве функции-критерия V берется функция ожидаемой полезности $EU(W)$, записывается в виде:

$$w^* = \arg \max_{w \in \mathcal{W}} V(W) = \arg \max_{w \in \mathcal{W}} EU(W) = \arg \max_{w \in \mathcal{W}} \int_{\mathbb{R}^n} U(W) d\hat{F}_{\vartheta}(x), \quad (24)$$

$$W = 1 + \frac{1}{100} w^T X, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

В нашем случае $n = 12$, короткие продажи запрещены (в противном случае стоимость портфеля получалась слишком волатильной), т. е. $\mathcal{W} = [0, 1]^{12}$, а в качестве функции полезности выступает экспоненциальная полезность:

$$U(W) = 1 - e^{-aW}. \quad (25)$$

В этой функции полезности параметр a имеет четкую интерпретацию — он характеризует абсолютную несклонность к риску. Функция распределения $\hat{F}_{\vartheta}(x)$ с параметрами ϑ — это оцененная совместная функция распределения доходностей рассматриваемых акций. В ϑ собраны все параметры частных распределений и параметры копулы. В качестве альтернатив КПК используются следующие копулы (перечень используемых в данной работе, а также некоторых других копул, их функции плотности и ограничения на параметры приведены в Приложении).

1. *Независимая* копула. Самая простая модель, не специфицирует никакой зависимости между частными распределениями финансовых активов.

2. *Эллиптические* копулы. Радиально симметричны и имеют слишком много параметров, что может приводить к перепараметризации модели. В работе используются гауссова копула и t -копула.

3. *Архимедовы* копулы. Зачастую имеют всего один параметр и имплицируют равенство всех частных распределений одной размерности. В работе использованы копулы Клейтона и Гумбеля — обе имеют зависимость в нижних хвостах распределения.

Задача (24) не будет решаться непосредственно, т. к. это весьма трудоемко и требует больших затрат времени. Вместо этого разложим функцию полезности $U(W)$ в ряд Тейлора до пятого слагаемого:

$$EU(W) \approx \sum_{k=0}^4 \frac{U^{(k)}(\bar{W})}{k!} E(W - \bar{W})^k. \quad (26)$$

Такой способ почти не приносит потери точности (Jondeau, Rockinger, 2006). В нашем случае функция-критерий примет вид:

$$V(W) = 1 - e^{-a\bar{W}} - \frac{a^2}{2} e^{-a\bar{W}} E(W - \bar{W})^2 + \frac{a^3}{6} e^{-a\bar{W}} E(W - \bar{W})^3 - \frac{a^4}{24} e^{-a\bar{W}} E(W - \bar{W})^4. \quad (27)$$

Для отыскания оптимального вектора w^* необходимо пройти три этапа.

1. Генерация случайной выборки Y из копулы. Для ускорения сходимости используем числа Соболя (квазислучайные числа, обеспечивающие максимальную скорость сходимости средних значений к их математическим ожиданиям при применении методов Монте-Карло) в 12-мерном гиперкубе $\mathbb{I}^{12}$.

2. Получение случайных величин X путем обращения функции распределения Хансена $x_i = F_i^{-1}(u_i)$.

3. Приближенное решение задачи (24) с использованием аппроксимации (27).

Доходность портфелей. На имеющихся данных и с использованием моделей, описанных выше, был сделан ретроспективный прогноз функции распределения, и на ее основе сформирован оптимальный портфель для последних 100 периодов⁴. Начальный капитал равен единице. Портфели строились для четырех значений абсолютной несклонности к риску $a = 1, 2, 5, 10$. На рисунке 2 изображены деревья T_1 , которые встречаются в ветвлениях, построенных при помощи критерия (22). С 1-й по 45-ю неделю, а затем с 51-й по 55-ю первое дерево построенных ветвлений имеет структуру, обозначенную на рис. 2 как «дерево №1». В остальные периоды первое дерево ветвления имеет структуру, обозначенную как «дерево №2». Заметим, что в обоих деревьях все сектора на первом уровне объединены в пары, кроме сектора Pipelines: частная корреляция Спирмена между ENB и KMP оказалась слишком низкой. Возможны две ситуации.

1. В силу неполноценности критерия (22), либо каких-то других причин, не удалось определить подходящую структуру ветвления. Эта ситуация кажется вполне реальной, т. к. разумно предположить, что взаимосвязь внутри сектора должна быть выше взаимосвязи между секторами.

2. Взаимосвязь внутри сектора Pipelines действительно меньше, чем взаимосвязь между Pipelines и Refining & Marketing, и ветвления, определенные с использованием критерия (22), верно описывают текущую ситуацию на рынке.

Чтобы учесть обе возможности, на основе КПК был рассчитан еще один портфель, на первое дерево которого было наложено ограничение: ребра CVX-XOM, APA-APC, ESV-NE, HAL-SLB, ENB-KMP и MRO-VLO изначально были включены в $\mathcal{E}_1$ (данную КПК будем называть «КПК с ограничением», а КПК, построенную в соответствии с критерием (22) — «КПК без ограничения»). По результатам оценивания КПК с ограничением в течение инвестиционного периода были получены деревья T_1 , изображенные на рис. 3. Начиная с 56-й недели первые уровни ветвлений имеют структуру, как у «дерева №5», до этого момента на первом уровне наблюдаются «дерево №3» и «дерево №4» вперемешку.

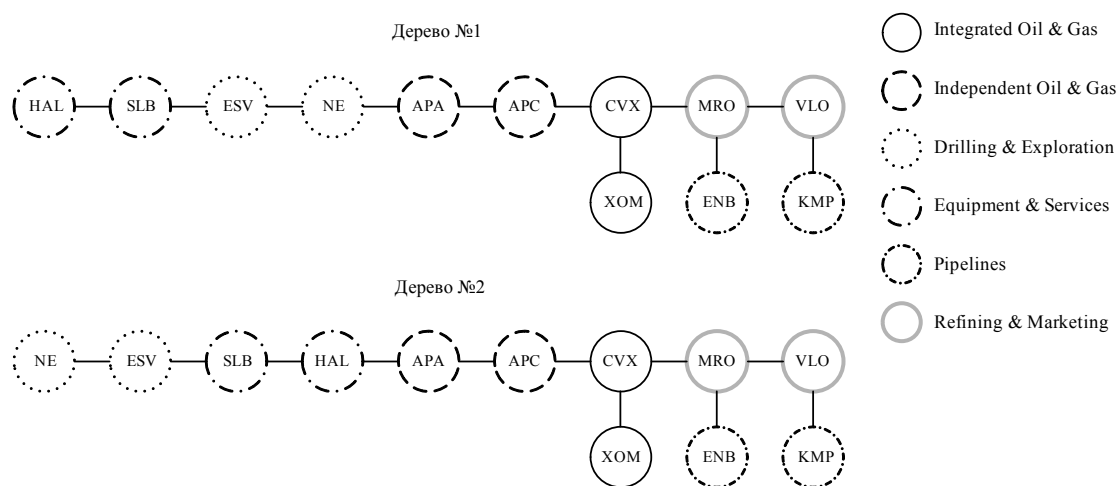


Рис. 2. Деревья на первом уровне ветвлений, построенных без ограничения

⁴ Программный код и оцененные параметры доступны по запросу на электронный адрес AlexandrTr@yandex.ru.

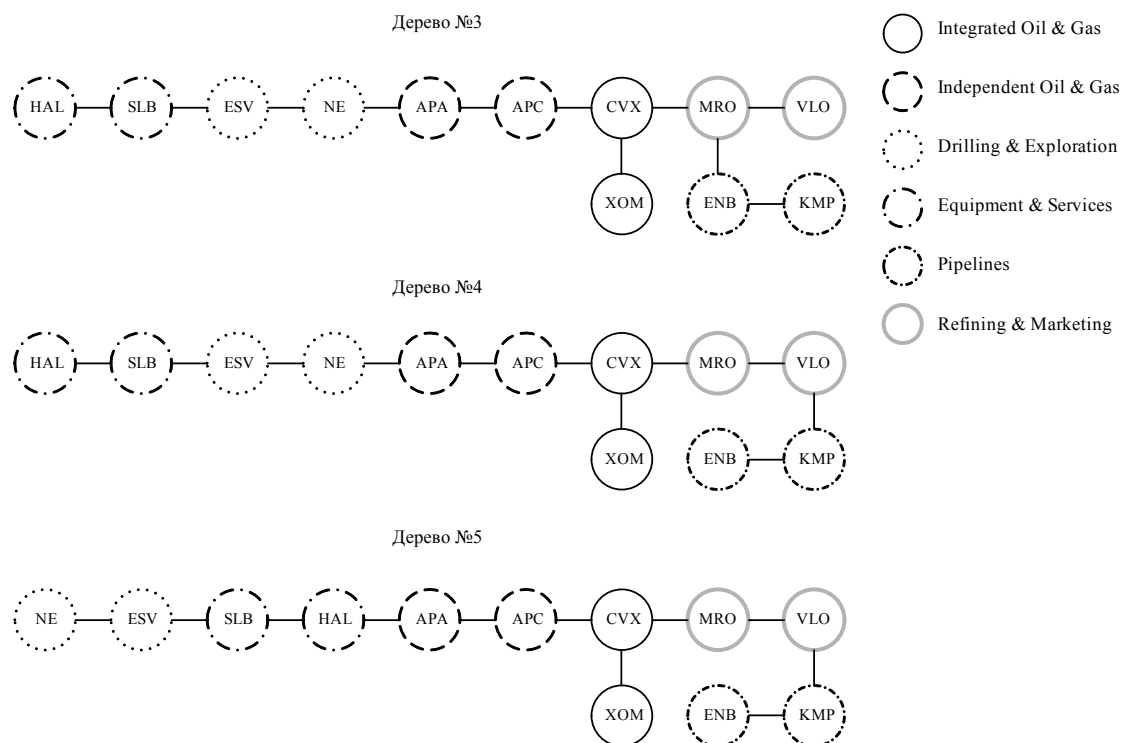


Рис. 3. Деревья на первом уровне ветвлений, построенных с ограничением: взаимосвязь внутри секторов наибольшая

На рисунке 4 изображена динамика стоимости портфеля за инвестиционный период для различных значений несклонности к риску, а в табл. 2 приведены результаты на конец периода.

Таблица 2. Стоимость портфелей на конец инвестиционного периода

a	Независимая копула	Гауссова копула	t -копула	Копула Клейтона	Копула дожития Гумбеля	КПК без ограничения	КПК с ограничением
1	1.5131	1.5426	1.5609	1.5407	1.5560	1.5454	1.9873
2	1.4834	1.4794	1.4800	1.4067	1.3978	1.6392	1.8763
5	1.3215	1.2712	1.2853	1.2752	1.2592	1.3944	1.3717
10	1.2296	1.1281	1.1012	1.1086	1.0891	1.2659	1.2569

Для $a = 1$ (рис. 4а) явным лидером является портфель, построенный с использованием КПК с ограничением: первую половину инвестиционного периода этот портфель не уступает альтернативным моделям, однако во второй половине происходит быстрый рост его стоимости, что в результате позволяет почти удвоить начальный капитал. Отметим, что рост начинается ровно с момента построения «дерева № 5». Другой портфель на основе КПК без ограничений также демонстрирует неплохой рост своей стоимости во второй половине инвестиционного периода, однако за счет наличия больших убытков в первой половине периода

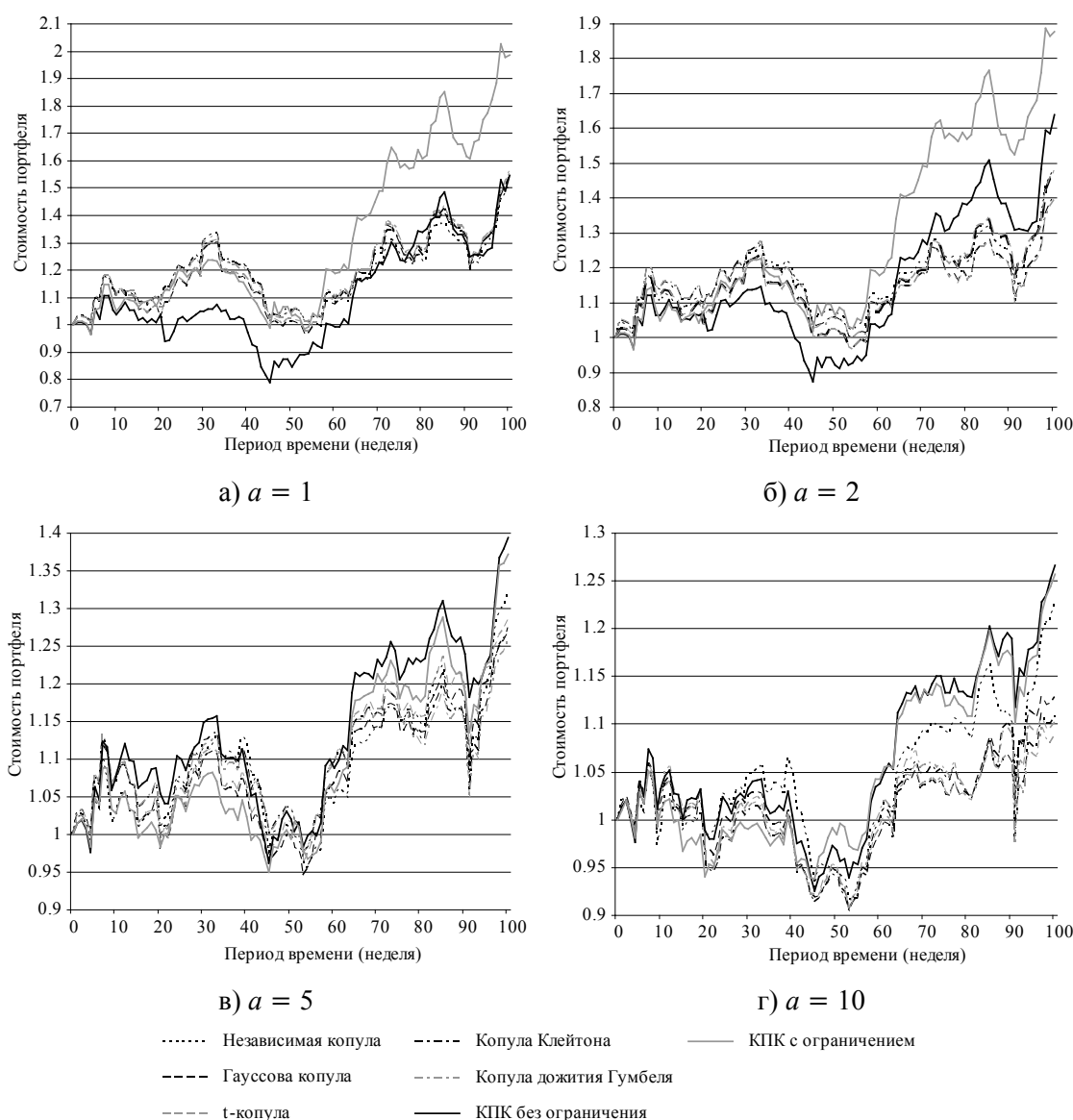


Рис. 4. Динамика стоимости портфеля при различных несклонностях к риску a

в результате приносит доход, сопоставимый с портфелями, использующими эллиптические и архимедовы модели копул (около 50–55%).

Более интересная ситуация возникает в случае $a = 2$ (рис. 4б). Портфель на основе КПК с ограничением все так же приносит наибольшую прибыль во второй половине периода (87.6%), однако теперь результаты для других портфелей качественно отличаются. Во-первых, очевидно преимущество эллиптических и независимой копул над архимедовыми: разница составляет около 8%. Это можно объяснить тем, что архимедовы копулы переоценивают риск, как можно будет заметить ниже при прогнозировании VaR портфелей. Во-вторых, портфель на основе КПК без ограничения теряет значительно меньше в начале инвести-

ционного периода, за счет чего во второй половине периода его доход оказывается значительно выше, чем у портфелей с эллиптическими, архимедовыми и независимой копулами, и составляет почти 164% от начального капитала.

Ситуация меняется в случае $a = 5$ (рис. 4в). На этот раз портфель на основе КПК без ограничения проявляет себя лучше, чем портфель на основе КПК с ограничением: он доминирует (по стоимости) над альтернативными портфелями почти на протяжении всего инвестиционного периода, а также не показывает убытков в первой половине периода, как в случаях более рискованных портфелей. Кроме того, независимая копула принесла значительно больший доход (32%), чем эллиптические и архимедовы копулы, вышедшие примерно на один уровень в 26–29% прибыли.

Наконец, для $a = 10$ (рис. 4г) ситуация аналогична случаю $a = 5$. Портфели на основе КПК показывают схожие результаты в конце периода (около 26% прибыли), однако, как и для случая $a = 5$, портфель на основе КПК с ограничением приносит такую доходность за счет стремительного роста во второй половине периода, в то время как портфель на основе КПК без ограничения показывает хорошую доходность на протяжении всего периода. Портфели, построенные с использованием эллиптических и архимедовых копул, приносят одинаково низкий доход около 9–13%. Портфель с независимой копулой оказался не намного хуже портфелей с КПК, принеся 23% прибыли.

Отметим, что для случаев $a = 2, 5, 10$ доходность портфеля с независимой копулой оказалась лучше, чем для портфелей с эллиптическими и архимедовыми копулами, а в случае $a = 10$ динамика накопленной доходности для этой модели вообще близка к накопленной доходности портфелей, построенных при помощи КПК. Это может свидетельствовать о том, что, возможно, лучше не специфицировать модель вовсе, чем строить неправдоподобную модель. Тем не менее, как будет видно ниже, модель с независимой копулой не может адекватно оценивать VaR портфеля, что не позволяет говорить о ее превосходстве по сравнению с эллиптическими и архимедовыми копулами.

Риск портфелей. Важным аспектом при формировании инвестиционного портфеля является оценка его риска. Существует ряд работ, демонстрирующих превосходство КПК в оценке риска по сравнению с альтернативными моделями, например (Chollete et al., 2009; Zhang, Maringer, 2011; Aas, Berg, 2009), хотя в этих работах рассматриваются размерности не выше пяти и лишь C - и D -ветвления. Работа (Brechmann, Czado, 2011) на сегодняшний день является единственной, где авторы осуществляют прогнозирование VaR портфеля при помощи КПК на произвольных R -ветвлениях (для портфелей с заранее предопределенными весами). Как показано в этой работе, такие модели осуществляют более качественную оценку риска, чем ряд альтернатив, в качестве которых используются многомерные GARCH модели, эллиптические копулы и независимая копула. В целях сравнения моделей по качеству оценки риска для каждого из 100 периодов был спрогнозирован 95% VaR , а затем подсчитано число периодов ξ , в которых доходность оказалась меньше спрогнозированного значения VaR (табл. 3). Для проверки гипотезы о точности прогнозов VaR используется тест, предложенный в (Куріес, 1995), в соответствии с которым рассматриваются следующие гипотезы:

H_0 : модель достаточно точно прогнозирует VaR ,

H_1 : модель неточно прогнозирует VaR .

Данный тест предполагает, что случайная величина ξ , характеризующая число периодов, в которых убыток превысил спрогнозированный VaR , имеет биномиальное распределение $B(m, p)$, где m — число испытаний, а p — вероятность успеха в одном испытании.

В рассматриваемом случае можно считать, что $\xi \sim B(100, 0.05)$, остается определить доверительный интервал, в который попадет величина ξ с уровнем значимости γ . Если использовать нормальную аппроксимацию биномиального распределения, то нулевая гипотеза H_0 не отвергается, если

$$\xi \in \left[-m\Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)\sqrt{\frac{p(1-p)}{m}}, m\Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)\sqrt{\frac{p(1-p)}{m}} \right]. \quad (28)$$

Для рассматриваемого случая $\xi \sim B(100, 0.05)$ доверительный интервал (с учетом округления концов интервала) оказался равен $1 \leq \xi \leq 9$. Из таблицы 3 видно, что тест не проходят только портфели, построенные с использованием независимой копулы для $a = 2, 5, 10$. Архимедовы копулы переоценивают риск для всех рассматриваемых значений a . Наиболее близкими к целевому значению $\xi = 5$ оказались t -копула, копула Клейтона и КПК с ограничением. Для всех копул, кроме независимой, тест не позволяет отвергнуть гипотезу H_0 , поэтому можно сказать, что они достаточно точно предсказывают VaR портфеля.

Таблица 3. Число периодов ξ для соответствующих портфелей

a	Независимая копула	Гауссова копула	t -копула	Копула Клейтона	Копула дожития Гумбеля	КПК без ограничения	КПК с ограничением
1	6	4	4	3	3	3	4
2	10*	4	4	3	3	3	6
5	14*	8	6	4	3	7	6
10	18*	7	8	4	4	8	8

Примечание. Символом * отмечены модели, не прошедшие тест на уровне значимости 5%.

7. Российский нефтегазовый рынок

В выборку были отобраны «голубые фишки» российского нефтегазового сектора — шесть акций, торгующихся в системе RTS Standard. Использовались недельные доходности акций за период с 24.07.2006 по 13.10.2013, что составляет 377 наблюдений. Такой период определяется самым коротким из рядов данных (для ROSN), доступных в DataStream. Прогнозный период составляет последние 100 недель: с 14.11.2011 по 13.10.2013. Описательные статистики приведены в табл. 4.

Как и раньше, частные распределения моделируются при помощи (13)–(14), а в качестве альтернативных моделей используются эллиптические, архимедовы и независимая копулы; КПК строится на основе критериев (22)–(23). Однако теперь для отыскания весов используется критерий максимальной ожидаемой доходности при ограничении на риск портфеля. Этот критерий хотя и не учитывает моменты высших порядков, но более близок к реальным задачам, решаемым при оптимизации портфеля, т. к. не требует спецификации функции полезности инвестора. Данный критерий записывается следующим образом:

$$w^* = \arg \max_{w \in W} Ex_p, \quad (29)$$

$$w^T \Sigma w \leq \sigma_{p, \max}^2, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

где x_p — доходность портфеля, Σ — ковариационная матрица доходностей акций, а $\sigma_{p, \max}^2$ — некоторый максимально допустимый риск портфеля, измеренный дисперсией. В данном случае ограничений на короткие продажи не накладывалось, т. к. в противном случае динамика доходности портфелей практически совпадала, и не получалось выделить наилучшую модель. В течение инвестиционного периода спрогнозированные дисперсии различных активов колебались приблизительно в интервале от 15 до 55. Исходя из этого, были оценены веса активов для некоторого промежуточного значения $\sigma_{p, \max}^2 = 30$ (рис. 8). Для других значений $\sigma_{p, \max}^2$ веса и доходность меняются пропорционально.

Таблица 4. Описательные статистики доходностей акций нефтегазового сектора RTS Standard

Компания	Тикер	Минимум	Максимум	Медиана	Среднее	Дисперсия	Коэфф. асимметрии	Коэфф. эксцесса
Газпром	GAZP	-33.70	43.28	-0.06	-0.15	34.42	0.43	14.7
Лукойл	LKOH	-31.89	33.33	0	-0.01	28.55	0.05	11.68
Новатэк	NVTK	-30.12	25.08	0.3	0.33	33.47	-0.63	7.53
Роснефть	ROSN	-32.29	38.62	-0.05	0.07	34.2	0.17	12.6
Сургутнефтегаз	SNGS	-22.54	29.73	0	-0.08	33.07	0.38	6.65
Татнефть	TATN	-56.02	37.72	0.17	0.15	52.55	-1.15	15.97



Рис. 8. Динамика стоимости портфелей для $\sigma_{p, \max}^2 = 30$

В таблице 5 приведены доходности соответствующих портфелей на конец прогнозного периода.

Таблица 5. Стоимость портфелей на конец инвестиционного периода

Независимая копула	Гауссова копула	t -копула	Копула Клейтона	Копула дожития Гумбеля	КПК
2.6078	2.8530	3.0517	3.2874	3.6157	2.0056

На этот раз портфель на основе КПК не продемонстрировал преимущества перед конкурирующими портфелями. Причиной может служить алгоритм максимальных остовных деревьев, использующий для построения ветвления лишь коэффициенты корреляции. Всего для числа активов $n = 6$ существует 23 040 ветвлений, из них 720 составляют C - и D -ветвления, состоятельность оценки ветвления посредством данного алгоритма не исследована и остается под вопросом. С другой стороны, причиной может быть использование (29) в качестве критерия оптимизации, поскольку асимметрия и эксцесс портфеля учтены не были. По результатам прогнозирования VaR был проведен тест (Kupiec, 1995), критическая область остается равной [1, 9]. Результаты приведены в табл. 6. Тест не проходят портфель-лидер по доходности, а также t -копула, традиционно считающаяся одной из самых адекватных моделей копул.

Таблица 6. Число периодов ξ для соответствующих портфелей

Независимая копула	Гауссова копула	t -копула	Копула Клейтона	Копула дожития Гумбеля	КПК
3	6	13*	7	10*	8

Примечание. Символом * отмечены модели, не прошедшие тест на уровне значимости 5%.

8. Заключение

В работе рассмотрена задача формирования инвестиционного портфеля с использованием конструкций из парных копул на R -ветвлениях: моделей, предоставляющих возможность строить реалистичные, не перепараметризованные модели совместного распределения финансовых доходностей. Применительно к американскому рынку акций эти модели позволили построить портфель, эффективно его перестраивать на протяжении периода в 100 недель и получить в итоге большую доходность, чем принесли альтернативные модели копул. Исключение составляет случай единичной абсолютной несклонности к риску, когда портфель на основе КПК оказался слишком волатилен и привел к существенному убытку в первой половине инвестиционного периода. Также было показано, что КПК не уступает альтернативным копулам при прогнозировании VaR портфеля, даже в случаях более высокой волатильности доходности портфеля при низких значениях несклонности к риску. Тем не менее, для российского рынка акций портфель на основе КПК продемонстрировал плохую динамику относительно конкурирующих портфелей, хотя и прошел тест на качество прогнозирования VaR .

В целом конструкции из парных копул являются относительно новыми моделями (разработаны в 2002 году, впервые применены в 2009 году), предоставляющими большие возможности в построении адекватного распределения финансовых доходностей. Основная проблема состоит в выборе оптимального ветвления: отыскание оптимального R -ветвления

методом максимального правдоподобия потребовало бы оценки огромного числа ветвлений. Существующие на сегодняшний день методики выбора оптимального ветвления основаны на использовании коэффициентов корреляции и последовательной оценки деревьев ветвления. Однако такая процедура не гарантирует отыскания глобального максимума функции правдоподобия. Кроме того, коэффициенты корреляции не могут полностью отразить зависимость, существующую между переменными: при генерации случайной выборки из КПК нередко не удается восстановить первое дерево (независимо от вида используемого коэффициента корреляции). Возможно, данные проблемы повлияли на результаты в случае формирования портфелей из акций RTS Standard, и найденное ветвление, по всей видимости, оказалось слишком далеким от оптимального. Это обуславливает необходимость поиска новых алгоритмов построения КПК.

Список литературы

- Благовещенский Ю. Н. (2012). Основные элементы теории копул. *Прикладная эконометрика*, 26 (2), 113–130.
- Пеникас Г. И. (2010). Модели «копула» в приложении к задачам финансов. *Журнал Новой экономической ассоциации*, 7, 24–44.
- Фантаццини Д. (2011a). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I. *Прикладная эконометрика*, 22 (2), 98–134.
- Фантаццини Д. (2011b). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II. *Прикладная эконометрика*, 23 (3), 98–132.
- Фантаццини Д. (2011c). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. III. *Прикладная эконометрика*, 24 (4), 100–130.
- Aas K., Berg D. (2009). Models for construction of multivariate dependence — a comparison study. *European Journal of Finance*, 15 (7–8), 639–659.
- Aas K., Czado C., Frigessi A., Bakken H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44 (2), 182–198.
- Arditti F. D. (1967). Risk and the required return on equity. *Journal of Finance*, 22 (1), 19–36.
- Bedford T., Cooke R. M. (2002). Vines: A new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics*, 30 (4), 1031–1068.
- Berg D. (2009). Copula goodness-of-fit testing: An overview and power comparison. *European Journal of Finance*, 15 (7–8), 675–701.
- Bollerslev T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (3), 307–327.
- Brechmann E. C., Czado C. (2013). Risk management with high-dimensional vine copulas: An analysis of the Euro Stoxx 50. *Statistics and Risk Modeling* (в печати).
- Brechmann E. C., Czado C., Aas K. (2012). Truncated regular vines in high dimensions with applications to financial data. *Canadian Journal of Statistics*, 40 (1), 68–85.
- Brown K. C., Harlow W. V., Tinic S. M. (1988). Risk aversion, uncertain information and market efficiency. *Journal of Financial Economics*, 22 (2), 355–385.
- Chollete L., Heinen A., Valdesogo A. (2009). Modeling international financial returns with a multivariate regime-switching copula. *Journal of Financial Econometrics*, 7 (4), 437–480.

- Christie A. A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10 (4), 407–432.
- Dissman J., Brechmann E. C., Czado C., Kurowicka D. (2013). Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics and Data Analysis*, 59, 52–69.
- Embrechts P., McNeil A., Straumann D. (1999). Correlation: Pitfalls and alternatives. *RISK Magazine*, May, 69–71.
- Engle R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 (4), 987–1007.
- Erb C. B., Harvey C. R., Viskanta T. E. (1994). Forecasting international equity correlations. *Financial Analysts Journal*, 50 (6), 32–45.
- Fama E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *Journal of Business*, 38 (1), 34–105.
- Frahm G., Junker M., Szimayer A. (2003). Elliptical copulas: Applicability and limitations. *Statistics & Probability Letters*, 63 (3), 275–286.
- Frees E. W., Valdez E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2 (1), 1–25.
- French K. R., Schwert G. W., Stambaugh R. F. (1987). Expected stock returns and volatility. *Journal of Financial Economics*, 19 (1), 3–29.
- Genest C., Remillard B., Beaudoin D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: A review and power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44 (2), 199–213.
- Glosten L. R., Jagannathan R., Runkle D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48 (5), 1779–1801.
- Hansen B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 35 (3), 705–730.
- Harvey C. R., Siddique A. (1999). Autoregressive conditional skewness. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34 (4), 465–487.
- Joe H. (1996). Families of m -variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters. *IMS Lecture Notes — Monograph Series*, 28, 120–141.
- Joe H. (1997). Multivariate models and dependence concepts. Chapman & Hall, London.
- Jondeau E., Rockinger M. (2003). Conditional volatility, skewness, and kurtosis: Existence, persistence, and comovements. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 27 (10), 1699–1737.
- Jondeau E., Rockinger M. (2006). Optimal portfolio allocation under higher moments. *European Financial Management*, 12 (1), 29–55.
- Kupiec P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, 3 (2), 73–84.
- Leon A., Rubio G., Serna G. (2005). Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis. *Quarterly Review of Economics and Finance*, 45 (4–5), 599–618.
- Mandelbrot B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36 (4), 394–419.
- Morales-Napoles O. (2010). Bayesian belief nets and vines in aviation safety and other applications. Ph.D. thesis. Technische Universiteit Delft. http://risk2.ewi.tudelft.nl/research-and-publications/doc_download/212-oswaldo-morales-napoles.
- McEnally R. W. (1974). A note on the return behavior of high risk common stocks. *Journal of Finance*, 29 (1), 199–202.

McNeil A. J., Neslehova J. (2009). Multivariate archimedean copulas, d -monotone functions and l_1 -norm symmetric distributions. *Annals of Statistics*, 37 (5B), 3059–3097.

Nelson D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59 (2), 347–370.

Nelsen R. B. (1999). *An introduction to copulas*. Springer.

Peiro A. (1999). Skewness in financial returns. *Journal of Banking and Finance*, 23 (6), 847–862.

Riccetti L. A. (2013). Copula-GARCH model for macro asset allocation of a portfolio with commodities: An out-of-sample analysis. *Empirical Economics*, 44 (3), 1315–1336.

Singleton J. C., Wingender J. (1986). Skewness persistence in common stock returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21 (3), 335–341.

Sklar A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris*, 8, 229–231.

Zakoian J.-M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18 (5), 931–955.

Zhang J., Maringer D. (2011). Selecting pair-copulas with downside risk minimization. *International Journal of Financial Markets and Derivatives*, 2 (1/2), 121–148.

Приложение

Ниже приведены использованные в работе копулы, их плотности и ограничения на параметры.

Гауссова копула:

$$C_{\Phi}(u) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

$$c_{\Phi}(u) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\Phi^{-1}(u))^T \Sigma^{-1} \Phi^{-1}(u) - (\Phi^{-1}(u))^T \Phi^{-1}(u)\right)\right).$$

Здесь Φ — функция распределения стандартного нормального закона, Φ_{Σ} — функция распределения многомерного нормального распределения с корреляционной матрицей Σ , а $\Phi^{-1}(u) = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))^T$.

t-копула Стьюдента:

$$C_T(u) = T_{\Sigma, \nu}(T_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, T_{\nu}^{-1}(u_n)),$$

$$c_T(u) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^n |\Sigma|} \prod_{i=1}^n t_{\nu}(T_{\nu}^{-1}(u_i))} \left(1 + \frac{(T_{\nu}^{-1}(u))^T \Sigma^{-1} T_{\nu}^{-1}(u)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}.$$

Здесь $T_{\Sigma, \nu}$ — функция распределения многомерного t -распределения с корреляционной матрицей Σ и числом степеней свободы ν , T_{ν} и t_{ν} — соответственно функция распределения и плотность стандартного (одномерного) t -распределения с числом степеней свободы ν , а $T_{\nu}^{-1}(u) = (T_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, T_{\nu}^{-1}(u_n))^T$.

Независимая копула: $\Pi(u) = \prod_{i=1}^n u_i$.

Парная копула Франка:

$$C_F(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right), \quad c_F(u, v) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{((1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v}))^2},$$

$$\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}.$$

Копула Клейтона: $C_C(u) = \left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} \right)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad c_C(u) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (i\theta + 1)}{\left(1 - n + \sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} \right)^{n+\frac{1}{\theta}} \prod_{i=1}^n u_i^{1+\theta}}.$

Для произвольного n параметр θ лежит в интервале $(0, \infty)$. Для парной копулы ограничение на параметр слабее, что связано с требованием d -монотонности (требуется лишь 2-монотонность), т. е. $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$.

Копула Гумбеля:

$$C_G(u) = \exp \left(- \left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right),$$

$$c_G(u) = \frac{\partial^n Q}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \cdot \sum_M \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} f^{(m_1 + \dots + m_n)}(g(Q)) \prod_{i=1}^n \left(\frac{g^{(i)}(Q)}{i!} \right)^{m_i},$$

где $\theta \in [1, \infty)$, $Q = \prod_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta$, $f(x) = e^x$, $g(x) = -x^{\frac{1}{\theta}}$, а суммирование ведется по всем наборам неотрицательных целых чисел $M = \{m_1, \dots, m_n\}$, удовлетворяющих равенству $m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n = n$.

Парная копула Али–Михаила–Хака (Ali–Mikhail–Haq):

$$C_A(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \quad c_A(u, v) = \frac{\theta^2(u+v-uv-1) - \theta(u+v+uv-2) - 1}{(\theta(u-1)(v-1)-1)^3}, \quad \theta \in [-1, 1).$$

Парная копула Плаке (Plackett):

$$C_P(u, v) = \frac{1 + (\theta - 1)(u + v) - \sqrt{(1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)},$$

$$c_P(u, v) = \frac{\theta(1 + (\theta - 1)(u + v - 2uv))}{((1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4\theta(\theta - 1)uv)^{3/2}}, \quad \theta \in (0, \infty) \setminus \{1\}.$$