Стандартные ошибки в форме Ньюи–Веста

Работа Уитни Ньюи (Whitney K. Newey) и Кеннета Веста (Kenneth D. West), перевод которой приведен ниже, является одной из самых цитируемых и широко известных статей в экономике благодаря своей обширной области применения. Она отвечает на вопрос, как правильно оценить точность оценивания, т. е. стандартные ошибки оценки, в ситуации, когда доступные наблюдения коррелированы друг с другом. Если два наблюдения положительно коррелированны между собой, они содержат меньше информации о среднем своих математических ожиданий, чем так же распределенные, но независимые наблюдения, поскольку в первом случае отклонения от теоретического среднего обоих слагаемых чаще оказываются направлены в одну и ту же сторону. В итоге точность оценки в первом случае будет ниже, чем во втором.

Коррелированность наблюдений является типичным свойством данных, используемых в макроэкономике, финансах и международной торговле — всюду, где данные имеют структуру временных рядов, т. е. одна и та же переменная наблюдается в течение нескольких периодов. Приводимая ниже статья дает рецепт, как оценивать точность оценок в этом случае, накладывая минимальные требования на структуру данных (типа стационарности) и не ограничивая структуру зависимости. Данная статья является прекрасным примером полупараметрического оценивания временных рядов. Полупараметрическим называется состоятельное оценивание маломерного параметра — в данном случае асимптотической ковариационной матрицы — зависящего от немоделируемой бесконечномерной структуры временной корреляции между различными наблюдениями, которая не может быть оценена состоятельным образом.

Уитни К. Ньюи, профессор экономики Массачусетского технологического института (MIT), известен своими работами по непараметрическому и полупараметрическому оцениванию. В его интересы также входят проблемы эффективного оценивания и эффективного выбора инструментов в регрессиях.

Кеннет Д. Вест, профессор экономики в университете Висконсина в Мэдисоне, является известным специалистом по временным рядам, проблемам макроэкономического оценивания и прогноза.

Оба автора получили свои докторские степени (Ph. D.) в Массачусетском технологическом институте.

А. Е. Микушева

A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix

Whitney K. Newey and Kenneth D. West

Простая, положительно полуопределенная оценка асимптотической матрицы ковариаций, состоятельная при наличии гетероскедастичности и автокорреляции[1]

Уитни К. Ньюи, Кеннет Д. Вест[2]

Ключевые слова: робастная оценка матрицы ковариаций; стандартные ошибки в форме Ньюи-Веста; автокорреляция; гетероскедастичность.

JEL classification: C01; C10; C12; C13; C19.

Примечание. Ключевые слова и JEL classification добавлены переводчиком.

Множество современных моделей рациональных ожиданий были оценены с помощью методологий, разработанных в (Hansen, 1982; Hansen, Singleton, 1982; Cumby, Huizinga, Obstfeld, 1983; White, Domowitz, 1984). Предложенные в этих работах методы оценивания используют следующее условие ортогональности: $\mathrm{E}h_t(\theta^*)=0$, где θ^* — $(k\times 1)$ вектор неизвестных параметров, $h_t(\theta)$ — $(r\times 1)$ вектор функций, зависящих от данных и параметров модели, причем $r\geq k$. Это условие ортогональности может быть использовано для построения оценок θ^* с помощью обобщенного метода моментов (GMM, (Hansen, 1982)) путем выбора оптимального вектора $\hat{\theta}$ в качестве решения задачи

---

1 Оригинальная статья: Newey W. K., West K. D. (1987). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. Econometrica, 55 (3), 703–708. © Econometric Society.

The copyright to this article is held by the Econometric Society, http://www.econometricsociety.org/. It may be downloaded, printed and reproduced only for personal or classroom use. Absolutely no downloading or copying may be done for, or on behalf of, any for-profit commercial firm or for other commercial purpose without the explicit permission of the Econometric Society. For this purpose, contact the Editorial Office of the Econometric Society at econometrica@econometricsociety.org.

Редакция благодарит Econometric Society за разрешение на публикацию перевода статьи.

Перевод статьи выполнен студентами НИУ ВШЭ И. Станкевичем и Д. Малаховым, под редакцией профессора НИУ ВШЭ П. К. Катышева.

2 Мы благодарны Stephen Cecchetti, Lars Hansen, John Huizinga и двум редакторам за полезные комментарии. Мы также благодарны NSF (Национальный Научный Фонд — *прим. редакции*) за поддержку грантами SES-8410249 и SES-8511070. Пока данная работа была в редакции, Вест был стипендиатом (National Fellow) Гуверовского института.

$$\min_{\theta} h_T(\theta)' \hat{W}_T h_T(\theta), \tag{1}$$

где $h_T = \sum_{t=1}^{T} h_t(\theta)/T$ — вектор выборочных моментов $h_t(\theta)$, а $\hat{W}_T$ — это (возможно) случайная, симметричная взвешивающая матрица.

Как было показано в (Cumby, Huizinga, Obstfeld, 1983; Hansen, 1982; White, Domowitz, 1984), асимптотическая ковариационная матрица $\hat{\theta}$ выглядит следующим образом:

$$V_T = \left(H_T' W_T H_T\right)^{-1} H_T' W_T S_T W_T H_T \left(H_T' W_T H_T\right)^{-1}, \tag{2}$$

где $H_T = \sum_{i=1}^{T} \mathrm{E} h_{t\theta}\left(\theta^*\right)/T$, $h_{t\theta}\left(\theta^*\right)$ — $(r \times k)$ матрица частных производных $h_t(\theta)$, W_T — неслучайная матрица такая, что $\operatorname{plim}\left(\hat{W}_T - W_T\right) = 0$, а $S_T = \sum_{s=1}^{T}\sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\left(h_t(\theta^*) h_s(\theta^*)'\right)/T$. Состоятельная оценка асимптотической ковариационной матрицы необходима для того, чтобы строить доверительные интервалы и проводить тесты. Оценки H_T и W_T построить достаточно несложно, потому что $\hat{W}_T$ есть естественная оценка W_T, а для H_T при выполнении условий регулярности из (Hansen, 1982) или (White, Domowitz, 1984) справедливо следующее утверждение:

$$H_T - \sum_{t=1}^{T} h_t(\hat{\theta})/T \xrightarrow{\mathrm{P}} 0. \tag{3}$$

Оценивание S_T намного сложнее, а также гораздо более важно, чем оценивание H_T и W_T. Как было показано в (Hansen, 1982), оптимальная GMM оценка параметра (в смысле минимизации значения V_T) может быть получена только когда $\hat{W}_T$ есть состоятельная оценка $(S_T)^{-1}$, таким образом, корректная оценка S_T крайне важна для получения оптимальных значений GMM оценок параметров. Простейшая оценка S_T может быть представлена в следующем виде:

$$\tilde{S}_T = \hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m}\left(\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}_j'\right),\ \hat{\Omega}_j = \sum_{t=j+1}^{T} \hat{h}_t \hat{h}_{t-j}'/T, \tag{4}$$

где $\hat{h}_t = h_t(\hat{\theta})$. Значение m — это число выборочных автокорреляций, обычно значение m принимается равным числу ненулевых автокорреляций в $h_t(\theta^*)$, которое известно априорно (см., например, (Cumby, Huizinga, Obstfeld, 1983; Hansen, Singleton, 1982; West, 1986)). В других ситуациях число ненулевых автокорреляций неизвестно априорно и, вообще говоря, их может быть бесконечно много (West, 1985, 1987). В таких случаях в качестве состоятельной оценки для S_T тоже можно взять $\tilde{S}_T$ (т.е. $S_T - \tilde{S}_T \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$), но при этом m считается функцией $m(T)$, зависящей от объема выборки, причем величина m с ростом выборки растет достаточно медленно (подробнее см. (White, Domowitz, 1984) и Теорему 2 ниже).

Поскольку $\tilde{S}_T$ есть состоятельная оценка, то матрица $\tilde{S}_T$ не должна быть обязательно положительно полуопределенной матрицей в любой конечной выборке, когда m не равно нулю. Из этого следует, что оценка матрицы V_T, в которой $\tilde{S}_T$ играет роль средней матрицы, не обязательно должна быть положительно полуопределенной. Также это свойство $\tilde{S}_T$ напрямую влияет на построение асимптотических доверительных интервалов и тестирование гипотез. Действительно, оцененные дисперсии и тестовые статистики могут быть отрицательными для некоторых линейных комбинаций $\hat{\theta}$, когда оцененная ковариационная матрица не является положительно полуопределенной. В дополнение, сама оценка $\tilde{S}_T$ в случае, когда эта матрица не является положительно полуопределенной, может вызывать проблемы, т. к. по комментариям John Huizinga итерационные алгоритмы для расчета оптимальной GMM оценки $\hat{W}_T = \left(\tilde{S}_T\right)^{-1}$ могут работать плохо, если $\tilde{S}_T$ не является положительно полуопределенной.

В работах (Eichenbaum, Hansen, Singleton, 1985) и (Cumby, Huizinga, Obstfeld, 1983) были предложены методы оценивания матрицы S_T во временной области в случае, когда эта матрица положительно полуопределена. Но эти процедуры крайне тяжело применять на практике. Hansen (1982) предложил спектральные методы оценки S_T, аргументируя это тем, что в случае ковариационной стационарности предел S_T в 2π раз больше спектральной плотности $h_t(\theta^*)$ при нулевой частоте. Хотя подобные алгоритмы расчета оценки S_T достаточно нетривиальны, они не требуют много времени для своей реализации. Следуя работе (West, 1985), предлагается рассчитывать оценку $\hat{S}_T$ простым способом по аналогии с $\tilde{S}_T$:

$$\hat{S}_T = \hat{\Omega}_0 + \sum_{j=1}^{m} w(j,m)\left(\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}'_j\right),\ w(j,m) = 1 - \frac{j}{m+1}. \tag{5}$$

Эта оценка численно эквивалентна спектральной плотности $h_t(\theta^*)$ в окрестности нуля, умноженной на 2π. В качестве весов используются модифицированные весовые функции Бартлетта (Bartlett) для сглаживания выборочных автокорреляционных функций (подробнее см. (Anderson, 1971, раздел 9.2)). Заметим, что оценка $\hat{S}_T$ строится аналогичным с $\tilde{S}_T$ образом, но используются весовые функции $w(j,m) = 1 - j/(m+1)$, значения которых уменьшаются при росте j. Подобный метод оценки S_T на основе ковариационного сглаживания был предложен в работе (Doan, Litterman, 1983)[3]. Положительная полуопределенность матрицы $\hat{S}_T$ следует из положительной полуопределенности выборочных автоковариационных функций.

Теорема 1. *Матрица $\hat{S}_T$ положительно полуопределена.*

Доказательство. Для любого вектора c размерности ($r \times 1$) имеем:

$$c'\hat{S}_T c = \omega_0 + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\,\omega(j),$$

где $\omega(j) = \sum_{t=j+1}^{T} (c'\hat{h}_t)(c'\hat{h}_{t-j})/T$, $j = 0,1,\ldots,T-1$. Пусть $P = \left[p_{ij}\right]$ — симметричная матрица размерности $m+1$, причем $p_{ij} = \omega(|i-j|)$. Положительная полуопределенность P доказана, например, в работе (McLeod, Jimenez, 1984). Пусть e — вектор размерности $(m+1)\times 1$, составленный из единиц. Тогда

$$c'\hat{S}_T c = e'Pe/(m+1) \geq 0. \tag{6}$$

Другой выбор взвешивающих матриц $w(j,m)$ также позволяет получить положительно полуопределенную матрицу оценки S_T. Если вектор единиц в этом доказательстве заме-

[3] Doan и Litterman (1983) не доказывали ни положительную полуопределенность матрицы S_T, ни состоятельность оценки.

нить на $\left(v(0,m), v(1,m),\ldots, v(m,m)\right)$, где $v(j,m)$ — произвольное число, можно показать, что положительная полуопределенность интересующей нас матрицы сохраняется при следующем выборе весов:

$$w(j,m)=\left(\sum_{l=0}^{m-j} v(l,m)v(l+j,m)\right)\Big/\left(\sum_{l=0}^{m} v(l,m)^2\right). \tag{7}$$

Также, если в качестве $w(j,m)$ выбрана взвешивающая функция, которая задает неотрицательную оценку спектральной плотности для одномерного временного ряда, то итоговая оценка S_T снова будет положительно полуопределенной матрицей. В работе (Anderson, 1971, раздел 9.2) обсуждаются разнообразные схемы выбора весовых функций и их свойства при условиях регулярности (которые будем использовать ниже). В работе (Gallant, 1985) рассматриваются разные весовые функции и получаются результаты, очень похожие на полученные в настоящем исследовании[4].

Заметим, что при фиксированных *j* функция $w\left(j,m\right)=1-j/(m+1)$ с ростом *m* стремится к единице. Поэтому можно ожидать, что оценки матрицы S_T, построенные на основе сглаживающих выборочных автокорреляций и весов, которые стремятся к единице при росте *m*, должны быть состоятельными, если *m* растет с ростом размера выборки. Состоятельность таких оценок S_T может быть показана при выполнении условий регулярности, которые схожи с теми, что обсуждаются в работе (White, Domowitz, 1984), где заинтересованный читатель может ознакомиться с системой обозначений и определениями, которые приняты при обсуждении условий перемешивания. Для матрицы $A=\left[a_{ij}\right]$, обозначим через $|A|$ норму $\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$.

Теорема 2. *Предположим, что:*

(i) $h_t(\theta)=h(z_t,\theta)$, *где* $h(z,\theta)$ *измерима по z для всех θ и бесконечно дифференцируема по θ в окрестности N точки* θ^* *почти наверное;*

(ii) (a) *существует такая измеримая функция* $m(z)$, *что* $\sup_N\left|h_t(\theta)\right|<m(z)$, $\sup_N\left|h_{t\theta}(\theta)\right|<m(z)$ *и* $\mathrm{E}\left(m(z_t)^2\right)<D$ *для любых t для некоторой константы D;* (b) *для некоторых констант D,* $\delta>0$, $r\geq 1$ *и для всех t выполнено условие* $\mathrm{E}\left(h_t(\theta)^{4(\delta+r)}\right)<D$;

(iii) z_t — *последовательность с перемешиванием либо типа* $\varphi(l)$ *с показателем* $2r/(2r-1)$, *либо типа* $\alpha(l)$ *с показателем* $2r/(2r-1)$, $r>1$;

(iv) $\mathrm{E}\left(h_t\left(\theta^*\right)\right)=0$ *для любого t, и последовательность* $\sqrt{T}\left(\hat{\theta}-\theta^*\right)$ *ограничена по вероятности*;

(v) *весовые функции* $w(j,m)$, $(m=1,2,\ldots, j=1,\ldots,m)$ *ограничены, т. е.* $|w(j,m)|\leq C$ *для некоторой константы C и* $\lim\limits_{m\to\infty} w(j,m)=1$ *для всех j.*

Тогда, если m выбирается как функция m(T) от размера выборки так, что $\lim\limits_{T\to\infty} m(T)=+\infty$ *и* $\lim\limits_{T\to\infty}[m(T)/T^{1/4}]=0$, *то:*

$$\left\{\hat{\Omega}_0+\sum_{j=1}^{m(T)} w(j,m(T))[\hat{\Omega}_j+\hat{\Omega}'_j]\right\}-S_T\xrightarrow{\mathrm{P}}0. \tag{8}$$

---

[4] Работа (Gallant, 1985) попала к авторам настоящей статьи уже после того, как она была представлена к печати.

Доказательство Теоремы 2 дается ниже.

Предположения Теоремы 2 требуют, чтобы функции $h_t(\theta)$ и $h_{t\theta}(\theta)$ доминировались функцией от z_t, которая, в свою очередь, имеет равномерно ограниченный второй момент, и чтобы функции $h_t(\theta^*)$ имели равномерно ограниченные моменты порядка чуть выше четвертого. Кроме того, корреляция между наблюдениями должна убывать с заданной скоростью по мере увеличения расстояния между наблюдениями. Состоятельность достигается, если $m(t)$ увеличивается с ростом T, но медленнее, чем $T^{1/4}$.

Заметим, что если $w(j, m)$ близка к единице для каждой пары j и m, то оценка $\tilde{S}_T$ в выражении (4) приводится к случаю, разобранному в работе (White, Domowitz, 1984). Содержательный результат Теоремы 2 отличается от результата Теоремы 3.5 из (White, Domowitz, 1984) в следующих двух аспектах. Во-первых, скорость роста функции $m(T)$ в Теореме 2 гораздо меньше, чем $T^{1/3}$ и даже чем $T^{1/4}$. Это достигается за счет немного измененных обоснований по сравнению с работой (White, Domowitz, 1984), а не за счет использования общего класса весовых функций. Во-вторых, полученные результаты верны и для случая со значительной нелинейностью в параметрах.

Также следует отметить, что причина более низкой, чем $T^{1/4}$, скорости роста функции $m(T)$ зависит главным образом от использования условий перемешивания. Если $h_t(\theta^*)$ — скользящее среднее бесконечно высокого порядка с абсолютно суммируемыми коэффициентами и независимыми одинаково распределенными инновациями, причем инновации имеют конечные моменты четвертого порядка, то доказательства Теоремы 2 и Теоремы 7.2.3 в работе (Fuller, 1976) могут быть объединены, чтобы показать, что темп роста функции $m(T)$, меньший, чем $T^{1/2}$, является достаточным условием для того, чтобы оценка $\hat{S}_T$ была состоятельной. С другой стороны, как отметил Lars Hansen, может быть затруднительным получение необходимого темпа роста функции $m(T)$ в случае более слабых ограничений на зависимость, чем условия перемешивания, к примеру, для стационарной, эргодической ситуации, рассмотренной в (Hansen, 1982).

Спецификация подходящих темпов роста для функции $m(T)$ проливает свет на принципы выбора $m(T)$ на практике. Могут оказаться полезными методы кросс-валидации (например, (Wahba, Wold, 1975)) и тестирования (White, Domowitz, 1984). Оценка подобных предположений с помощью метода Монте-Карло или более изысканной асимптотики — одно из перспективных направлений для дальнейшего изучения. Также полезно было бы знать, могут ли методы, предложенные в работах (Cumby, Huizinga, Obstfeld, 1983) и (Eichenbaum, Hansen, Singleton, 1984), давать лучшие, чем $\hat{S}_T$, оценки S_T в случае, если число ненулевых автокорреляций известно априори.

Доказательство Теоремы 2. Последовательность симметричных матриц $\{A_T\}$ сходится к симметричной матрице $\{A_0\}$ тогда и только тогда, когда $c'A_Tc \to c'A_0c$ для всех векторов c. Тогда, беря линейную комбинацию $|c'\hat{h}_t| \le r|c||\hat{h}_t|$, можно ограничить рассмотрение скалярным случаем с $r = 1$.

Обозначим $\bar{S}_T = \sum_{t=1}^{T} \hat{h}_t^2 / T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m) \sum_{t=j+1}^{T} \hat{h}_t \hat{h}_{t-j} / T$ и $h_t = h_t(\theta^*)$. Для удобства обозначений будем опускать аргумент T в $m(T)$. Из неравенства треугольника и формы $\bar{S}_T$ следует, что

$$
\begin{aligned}
|\bar{S}_T - S_T| \le{} & \left|\bar{S}_T - \left(\sum_{t=1}^{T} h_t^2/T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T} h_t h_{t-j}/T\right)\right| + \\
& + \left|\sum_{t=1}^{T}\left(h_t^2 - \mathrm{E}(h_t^2)\right)/T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T}\left(h_t h_{t-j} - \mathrm{E}(h_t h_{t-j})\right)/T\right| + \\
& + \left|\sum_{t=1}^{T}\mathrm{E}(h_t^2)/T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T}\mathrm{E}(h_t h_{t-j})/T - S_T\right| \le \\
& \le \left|\bar{S}_T - \left(\sum_{t=1}^{T} h_t^2/T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T} h_t h_{t-j}/T\right)\right| + \\
& + \left|\sum_{t=1}^{T}\left(h_t^2 - \mathrm{E}(h_t^2)\right)/T + 2\sum_{j=1}^{m} w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T}\left(h_t h_{t-j} - \mathrm{E}(h_t h_{t-j})\right)/T\right| + \\
& + 2\sum_{j=1}^{m}|w(j,m)-1|\sum_{t=j+1}^{T}|\mathrm{E}(h_t h_{t-j})|/T + 2\sum_{j=m+1}^{T-1}\sum_{t=j+1}^{T}|\mathrm{E}(h_t h_{t-j})|/T.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Четвертое слагаемое стремится к нулю при T, стремящемся к бесконечности, по Лемме 6.17 из (White, 1984) и $\lim_{T\to\infty} m = +\infty$.

Согласно Следствию 6.16 из (White, 1984), существует последовательность $\gamma(l)$ $(l = 1,\ldots,\infty)$ и константа D' такая, что $|\mathrm{E}(h_t h_{t-j})| < D'\gamma(j)$ для всех T и для всех j, при этом $\sum_{l=1}^{\infty}\gamma(l) < +\infty$. Тогда $\sum_{t=j+1}^{T}|\mathrm{E}(h_t h_{t-j})|/T < D'\gamma(j)$ для всех T и j. Так как в силу условия (v) $\lim_{T\to\infty} w(j,m) = 1$ для всех j, то, применяя теорему о мажорируемой сходимости к счетной мере на положительных целых числах, получаем, что третий член в (9) стремится к нулю при T, стремящимся к бесконечности.

Пусть $Z_{tj} = h_t h_{t-j} - \mathrm{E}(h_t h_{t-j})$. Из условия (ii) (b) следует, что существует константа D' такая, что $\mathrm{E}(|Z_{tj}|^{2(r+\delta)}) < D'$ для всех t и j. Доказательство Леммы 6.19 в (White, 1984) некорректно при такой постановке и не может быть использовано для того, чтобы доказать, что второй член в соотношении (9) сходится по вероятности к нулю. Однако если заменить (в наших обозначениях) двойную сумму $\sum_{l=j+1}^{T-1}\sum_{t=l+1}^{T}$ со страницы 153 в (White, 1984) суммой с правильными индексами $2\sum_{l=1}^{T-j-1}\sum_{t=j+1+l}^{T}$ и применить те же рассуждения, что и при доказательстве Леммы 6.19 в (White, 1984), можно обнаружить, что существует константа D^* такая, что для всех j от 0 до T и для всех T выполнено неравенство

$$
\mathrm{E}\left[\left(\sum_{t=j+1}^{T} Z_{tj}\right)^2\right] \le (T-j)(j+1)D^* \le T(j+1)D^*, \quad j \ge 0. \tag{10}
$$

Из того, что величины $w(j,m)$ равномерно ограничены константой C, следует, что $\sum_{j=1}^{m}|w(j,m)|\le mC$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и воспользуемся неравенством треугольника, монотонностью вероятности (если $A\subset B$, то $\mathrm{Prob}(A)\le\mathrm{Prob}(B)$), тем фактом, что вероятность совместного наступления нескольких событий меньше или равна суммы вероятностей отдельных событий, и неравенством Чебышева. Тогда из (10) следует, что

$$\mathrm{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{m}w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T}Z_{tj}\right|/T>\varepsilon\right)\le\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{m}|w(j,m)|\left|\sum_{t=j+1}^{T}Z_{tj}/T\right|>\varepsilon\right)\le \tag{11}$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}\left(\left|\sum_{t=j+1}^{T}Z_{tj}/T\right|>\varepsilon/Cm\right)\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}(Cm/\varepsilon)^2D(j+1)/T=DC^2m^3(m+3)/(2\varepsilon^2T).$$

Тогда второй член в уравнении (9) сходится по вероятности к нулю в силу того, что m растет медленнее, чем $T^{1/4}$, неравенства (10) (с $j=0$), примененного к $\sum_{t=1}^{T}\left(h_t^2-\mathrm{E}(h_t^2)\right)/T$, и неравенства треугольника.

В силу (iv) $\hat{\theta}$ лежит в N с вероятностью, стремящейся к единице с ростом T, поэтому с вероятностью, стремящейся к единице, можно получить разложение среднего значения $\bar{S}_T$ в окрестности θ^*. Пусть $\tilde{h}_t=h_i(\tilde{\theta})$ и $\tilde{h}_{t\theta}=h_{t\theta}(\tilde{\theta})$, где $\tilde{\theta}$ — среднее из этого разложения. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, первый член после знака неравенства в (9) может быть записан так:

$$2\left|\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{h}_t\tilde{h}_{t\theta}+\sum_{j=1}^{m}w(j,m)\sum_{t=j+1}^{T}(\tilde{h}_t\tilde{h}_{t-j\theta}+\tilde{h}_{t-j}\tilde{h}_{t\theta})\right)\left(\hat{\theta}-\theta^*\right)\Big/T\right|\le$$

$$\le2\left(\sum_{t=1}^{T}m(z_t)^2+\sum_{j=1}^{m}|w(j,m)|\sum_{t=j+1}^{T}2m(z_t)m(z_{t-j})\right)|\hat{\theta}-\theta^*|\big/T\le$$

$$\le2\left(\sum_{t=1}^{T}m(z_t)^2+\sum_{j=1}^{m}|w(j,m)|\sum_{t=j+1}^{T}\left(m(z_t)^2+m(z_{t-j})^2\right)\right)|\hat{\theta}-\theta^*|\big/T\le$$

$$\le2\left((2Cm+1)/\sqrt{T}\right)\left(\sum_{t=1}^{T}m(z_t)^2/T\right)\sqrt{T\,|\hat{\theta}-\theta^*|}.$$

Заметим, что в силу предположения (iv) последовательность $\sqrt{T\,|\hat{\theta}-\theta^*|}$ ограничена по вероятности, а последовательность $\sum_{t=1}^{T}m(z_t)^2/T$ ограничена по вероятности в силу неравенства Маркова и предположения (ii) (a). Тогда первый член в (9) сходится по вероятности к нулю, поскольку m растет медленнее, чем $T^{1/4}$, и последовательность $(2Cm+1)/\sqrt{T}$ сходится к нулю.

Вывод теперь следует из соотношения (9), т. к. показано, что все слагаемые в правой части второго неравенства сходятся по вероятности к нулю.

Department of Economics, Princeton University, Princeton, NJ 08544, U.S.A.
and
Woodrow Wilson School, Princeton University, Princeton, NJ 08544, U.S.A.

Manuscript received May, 1985; final revision received March, 1986.

Список литературы[5]

Anderson T. W. (1971). *The statistical analysis of time series*. New York: John Wiley and Sons.

Cumby R. E., Huizinga J., Obstfeld M. (1983). Two-step two-stage least squares estimation in models with rational expectations. *Journal of Econometrics*, 21 (3), 333–355.

Doan T. A., Litterman R. B. (1983). *RATS User's manual*. Minneapolis: VAR Econometrics.

Eichenbaum M. S., Hansen L. P., Singleton K. J. (1985). *A time series analysis of representative agent models of consumption and leisure choice under uncertainty,* manuscript.

Fuller W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. New York: John Wiley and Sons.

Gallant A. R. (1985). Dynamic nonlinear models, Ch. 9 of *Nonlinear Statistical Models*, North Carolina State University, Institute of Statistics Mimeograph Series No. 1667.

Hansen L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50 (4), 1029–1054.

Hansen L. P., Singleton K. J. (1982). Generalized instrumental variable estimation of nonlinear rational expectations models. *Econometrica*, 50 (5), 1269–1286.

McLeod I. A., Jimenez C. (1984). Nonnegative definiteness of the sample autocovariance function. *American Statistician*, 38 (4), 297–298.

West K. D. (1985). A specification test for speculative bubbles. *Princeton University Financial Research Memorandum* No. 58.

West K. D. (1986). A variance bounds test of the linear quadratic inventory model. *Journal of Political Economy*, 94 (2), 374–401.

West K. D. (1987). Dividend innovations and stock price volatility. *Econometrica*, forthcoming.

Whaba G., Wold S. (1975). A completely automatic French curve: Fitting spline functions by cross validation. *Communications in Statistics*, 4, 1–17.

White H., Domowitz I. (1984). Nonlinear regression with dependent observations. *Econometrica*, 52 (1), 143–161.

White H. (1984). *Asymptotic theory for econometricians*. New York: Academic Press.

[5] При переводе добавлены некоторые ссылки на более поздние опубликованные версии работ из списка литературы:

Eichenbaum M. S., Hansen L. P., Singleton K. J. (1988). A time series analysis of representative agent models of consumption and leisure choice under uncertainty. *The Quarterly Journal of Economics*, 103 (1), 51–78.

West K. D. (1988). Dividend innovations and stock price volatility. *Econometrica*, 56 (1), 37–61.