

Г. И. Пеникас

Иерархические копулы в моделировании рисков инвестиционного портфеля¹

Статья посвящена сравнению эффективности применения различных копул при оценке рисков инвестиционного портфеля. В работе рассмотрены эллиптические, архимедовы и иерархические копулы. Проведенное исследование показало, что применение иерархической копулы Клейтона позволяет наиболее точно оценивать риски инвестиционного портфеля с точки зрения таких мер риска, как ES и VaR. В работе также предложен статистически обоснованный алгоритм определения иерархической структуры копулы.

Ключевые слова: копула; иерархическая копула; зависимость хвостов; ES; VaR.

JEL classification: C58; G10.

1. Введение

Финансовый кризис 2007–2008 гг. наглядно продемонстрировал, что применявшиеся подходы к оценке рыночного риска являются неадекватными ввиду излишней оптимистичности.

Одной из основных проблем, проявившихся в период высокой турбулентности на рынке ценных бумаг, явился рост сонаправленности поведения активов при наступлении экстремальных событий. Вместе с тем опыт показал, что наступление экстремальных событий для одного актива с высокой долей вероятности сопровождается наступлением экстремальных событий для других финансовых активов. В результате диверсифицированный портфель ценных бумаг демонстрирует динамику, практически невероятную с точки зрения многомерного нормального распределения.

В преддверии кризиса 2007–2008 гг. широкое распространение получили эллиптические копулы (в первую очередь гауссова) (MacKenzie, 2008) для моделирования многомерных распределений, которые впоследствии использовались для оценки инвестиционного (рыночного) риска. Основным недостатком гауссовой копулы является отсутствие зависимости хвостов многомерного распределения.

Настоящая работа посвящена исследованию альтернативных вариантов моделирования многомерных распределений с целью оценки риска инвестиционного портфеля — иерархических копул.

¹ Автор признателен С. Васину за помощь в подготовке и проведении исследования и особенно И. Ханькову за помощь в завершении исследования и итоговом представлении результатов. Отдельная благодарность профессорам Ф. Т. Алескерову и А. П. Колданову за полезные замечания и комментарии, высказанные на XV Апрельской международной научной конференции «Модернизация экономики и общества», прошедшей в НИУ ВШЭ 1–4 апреля 2014 г., а также анонимному рецензенту, чьи комментарии помогли улучшить работу.

Использование иерархических копул позволяет, при сохранении гибкости модели, моделировать многомерные распределения, допускающие наличие зависимости хвостов. Кроме того, оценка структуры и параметров иерархических копул, а также симуляция псевдослучайных чисел, подчиняющихся выбранному закону распределения, может быть осуществлена при относительно низких затратах как времени, так и вычислительных мощностей, что позволяет использовать данный подход для решения задач в области управления инвестиционным риском в режиме реального времени. Также следует отметить, что настоящий подход может быть использован в области оценки справедливой стоимости производных финансовых инструментов, как, например, CDO (collateralized debt obligations — долговые обязательства, обеспеченные пулом залогов, как правило, на недвижимость) и опционы.

В работе осуществляется оценка эффективности применения иерархических копул при моделировании риска инвестиционного портфеля в сравнении с обычными (не иерархическими) моделями с точки зрения таких мер риска, как VaR и ES². Иные меры риска, например спектральные, описанные в (Adam et al., 2008), не рассматривались, поскольку они не предлагаются банкам для целей регулирования капитала. Кроме того, предложен новый подход к определению иерархической структуры многомерного распределения и проведено его сравнение с известными ранее.

Настоящая работа имеет следующую структуру: во втором разделе представлен обзор работ в области применения копул, в третьем разделе описаны рассматриваемые семейства копул, в четвертом предложен подход к определению структуры иерархической копулы, в пятом и шестом разделах описаны результаты эконометрического исследования, в заключении приведены общие выводы из результатов работы.

2. Обзор литературы

Для введения в проблематику моделирования многомерных распределений с помощью копул целесообразно рассмотреть наиболее значимые в этой области работы.

Наиболее полное описание основных концепций представлено в работах (Joe, 1997; Schmidt, 2006; Nelsen, 2007). В них приводится обзор существующих семейств копул, вводятся основные понятия и определения, рассматривается связь между параметрами моделей и коэффициентами ранговой корреляции Кендалла, предлагаются решения и методы для симуляции псевдослучайных величин из рассмотренных семейств.

В русскоязычной литературе базовые элементы теории копул изложены в работе (Благовещенский, 2012). Кроме того, стоит упомянуть серию статей (Фантаццини, 2011а, 2011б, 2011в), в которой подробно рассматривается применение копул в прикладных эконометрических исследованиях.

Отдельно необходимо отметить книгу (Mai, Scherer, 2012). Эта работа объединяет в себе обзор широкого спектра исследований в области моделирования копул, стандартизирует

² На данный момент не существует общепринятых переводов на русский язык названий мер риска Value-at-Risk и Expected Shortfall, а используемые названия — «стоимость под риском», «стоимостная оценка (мера) риска», «граница потерь риска» и т. п. — не слишком понятны с содержательной и с языковой точки зрения. В данной статье для обозначения этих мер риска будут использоваться просто аббревиатуры VaR и ES, а их формальные определения будут приведены в разделе 6. — *Прим. редактора.*

и обобщает результаты исследований различных авторов, значительное внимание уделяется проблеме эффективных алгоритмов симуляции случайных величин для различных классов и семейств копул.

Вопросам эффективности различных подходов к моделированию многомерных распределений посвящены работы (Daul et al., 2003; Luo, Shevchenko, 2010; Hofert, 2011; Garcia, Tsafack, 2011; Puzanova, 2011; Patton, 2012), из которых следует, что t -копула является наилучшей среди эллиптических; архимедовы копулы более точно оценивают риск, чем эллиптические; иерархические копулы (многопараметрические) более предпочтительны, чем не иерархические (или однопараметрические).

Копулы находят свое применение не только в рамках моделирования риска портфеля ценных бумаг. Пеникас и Симакова (2009) использовали копулы для управления процентным риском для банка. Применение иерархических архимедовых копул в задачах по оценке производных финансовых инструментов приведено в работах (Hofert, Scherer, 2008; Choe, Jang, 2011).

Непосредственному использованию и анализу эффективности применения иерархических копул посвящены работы (Savu, Trede, 2006; Okhrin, Ristig, 2012; Okhrin et al., 2013). В последних двух из указанных работ впервые был предложен формализованный подход к определению иерархической структуры копулы — в других работах структура определяется априорно на основе суждений автора.

Другой класс многопараметрических моделей копул — конструкции из парных копул (*vine copulas*) — рассматривается в работе (Травкин, 2013).

Обобщая результаты рассмотренных работ, можно сделать вывод, что иерархические копулы позволяют более точно моделировать риски изменения стоимости ценных бумаг, однако не удалось найти эффективный алгоритм для определения иерархической структуры копулы.

Новизна настоящей работы заключается в следующем: рассмотрен широкий спектр различных семейств копул, предложен подход для группировки случайных величин в иерархическую копулу на основе формального критерия.

3. Рассмотренные семейства копул

В финансах многомерные модели, описывающие совместное поведение случайных величин, используются при управлении риском, в задачах определения оптимального портфеля, для оценки опционов на корзины финансовых активов и других структурированных продуктов.

Теорема Склера³ позволяет разбить задачу моделирования многомерного распределения на две подзадачи. В рамках первой подзадачи исследователь определяет частные законы распределения для каждой из рассматриваемых случайных величин по отдельности. В рамках второй подзадачи осуществляется выбор копулы, которая наилучшим образом (с точки зрения выбранных критериев) отражает взаимосвязь между исследуемыми случайными величинами с частными законами распределения, найденными на предыдущем этапе.

³ Формулировку и доказательство теоремы можно посмотреть, например, в (Благовещенский, 2012).

Для сравнения применимости различных семейств копул при моделировании риска инвестиционного портфеля, т. е. наступления экстремальных событий, необходимо ввести характеристики зависимости хвостов.

Определение 1. Рассмотрим двумерный случайный вектор (X_i, X_j) с непрерывными частными функциями распределения F_i и F_j .

Коэффициент зависимости нижних хвостов λ^L задается соотношением

$$\lambda^L = \lim_{u \downarrow 0} \Pr\left(X_i \leq F_i^{-1}(u) \mid X_j \leq F_j^{-1}(u)\right) = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u},$$

где $C(\cdot, \cdot)$ — копула случайного вектора (X_i, X_j) . Если $\lambda^L \in (0, 1]$, то говорят о наличии зависимости нижних хвостов.

Зависимость верхних хвостов определяется с помощью коэффициента λ^U :

$$\lambda^U = \lim_{u \uparrow 1} \Pr\left(X_i > F_i^{-1}(u) \mid X_j > F_j^{-1}(u)\right) = \lim_{u \uparrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

Говорят, что зависимость верхних хвостов существует, если $\lambda^U \in (0, 1]$.

Наиболее широко применимым классом копул является класс эллиптических копул. В свою очередь, самым распространенным семейством эллиптических копул является гауссова копула (MacKenzie, 2008).

Гауссова d -мерная копула имеет $\frac{d(d-1)}{2}$ параметров, входящих в корреляционную матрицу Σ , на главной диагонали которой расположены единицы. Гауссова копула имеет вид

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

где Φ^{-1} — обратная функция распределения стандартной нормальной случайной величины, Φ_{Σ} — многомерная функция распределения нормального случайного вектора с корреляционной матрицей Σ .

Гауссова копула не имеет зависимости хвостов, что является существенным недостатком при моделировании экстремального поведения случайных величин.

Так же как и гауссова копула, t -копула относится к семейству эллиптических и имеет вид

$$C_{P, \nu}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d)),$$

где P — корреляционная матрица, ν — число степеней свободы, t_{ν}^{-1} — обратная функция распределения Стьюдента, $t_{\nu, P}$ — многомерная функция распределения Стьюдента.

Многомерная случайная величина Y , закон распределения которой описывается t -копулой, может быть представлена следующим образом:

$$Y = RZ, \text{ где } R = \sqrt{\frac{\nu}{S}}, \quad S \sim \chi_{\nu}^2, \quad Z \sim N_d(0, P).$$

Здесь $N_d(0, P)$ — d -мерное нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей P , χ_ν^2 — распределение хи-квадрат с ν степенями свободы. Копула Коши является частным случаем t -копулы с параметром $\nu = 1$.

Важным отличием t -копулы от гауссовой, как и в соответствующих одномерных распределениях, являются более тяжелые хвосты, а также положительная зависимость на хвостах (Джо, 1997). При этом коэффициенты зависимости верхних и нижних хвостов случайного вектора (X_i, X_j) одинаковы и равны

$$\lambda_{i,j} = 2 \left[1 - t_{\nu+1} \left(\frac{\sqrt{\nu+1} \sqrt{1-\rho_{i,j}}}{\sqrt{\rho_{i,j}+1}} \right) \right] > 0,$$

где $\rho_{i,j}$ — коэффициент корреляции между X_i и X_j .

Тем не менее, наличие только одного параметра числа степеней, описывающего характер тесноты связи между всеми случайными величинами, является ограничивающим фактором в описании поведения реальных экономических величин.

Чтобы преодолеть это ограничение, оставаясь в рамках t -распределения, Daul et al. (2003) предложили группировать случайные величины на основе неких характеристик, таких как кредитный рейтинг, капитализация, отрасль и т. п. Группированная t -копула имеет вид

$$Y = (\underbrace{R_1 Z_1, \dots, R_1 Z_{s_1}}_{\text{группа 1}}, \underbrace{R_2 Z_{s_1+1}, \dots, R_2 Z_{s_1+s_2}}_{\text{группа 2}}, \dots, \dots, \underbrace{R_m Z_d}_{\text{группа } m}), \text{ где } R_i = \sqrt{\frac{\nu_i}{S}}, S \sim \chi_{\nu_i}^2, Z \sim N_d(0, P).$$

Использование подобной группировки позволяет более гибко описывать поведение сложных многомерных распределений, предполагая разную тесноту связи между однородными группами случайных величин.

Для эллиптических копул верно следующее соотношение между корреляционной матрицей, входящей в качества параметра в копулу, и матрицей ранговой корреляции Кендалла (Daul et al., 2003):

$$\Sigma_{i,j} \approx \sin \left(\frac{\pi}{2} \tau_{i,j} \right).$$

Точность и различные обобщения этого соотношения обсуждаются в (Daul et al., 2003).

Другим распространенным классом является класс архимедовых копул (см. табл. 1).

Однопараметрические архимедовы копулы, приведенные в табл. 1, получили широкое распространение благодаря простоте оценки и симуляции многомерных распределений с возможностью зависимости хвостов. Наличие единственного параметра обеспечивает простоту интерпретации. Однако этот единственный параметр одновременно является и недостатком модели, поскольку неявно предполагает одинаковую степень зависимости между случайными величинами, объединенными копулой. Очевидно, что острота этой проблемы растет по мере увеличения размерности многомерного распределения.

Использование иерархической копулы, объединяющей несколько уровней копул, позволяет обойти эту проблему и более гибко моделировать зависимость между случайными величинами, сохраняя при этом относительную простоту вычисления и интерпретации.

Таблица 1. Наиболее распространенные архимедовы копулы

Копула	Формула	Зависимость хвостов: верхних нижних		Связь с коэффициентом ранговой корреляции
Клэйтона	$\left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} + 1 - d\right)^{-1/\theta}$	0	$2^{-1/\theta}$	$\tau = \theta/(\theta + 2)$
Гумбеля	$\exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^d (-\log u_i)^\theta\right)^{1/\theta}\right\}$	$2-2^{1/\theta}$	0	$\tau = (\theta - 1)/\theta$
Франка	$-\frac{1}{\theta} \log\left\{1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}}\right\}$	0	0	$\tau = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt - 1\right)$

Иерархическая копула представляет собой иерархию копул, на каждом уровне которой происходит агрегация посредством копулы копул или частных функций распределения с предыдущего уровня иерархии, в результате подобной агрегации на верхнем уровне иерархии остается лишь одна копула.

Пусть иерархия представлена $L \geq 2$ уровнями иерархии, такими, что уровню L соответствует верхний уровень, а уровню 1 — нижний. На каждом l -м уровне иерархии имеется n_l непересекающихся элементов, причем $n_1 < d$, $n_l < n_{l+1}$ (для всех $l_i > l_j$) и $n_L = 1$. Копула, находящаяся на уровне l , обозначается как $C_{l,k}$, где $k \in \overline{1, n_l}$ и $C_{i,j}(u_g) \equiv u_g$, т. е. копула от одного аргумента равна этому аргументу.

Существует два вида иерархических копул.

Вложенными иерархическими копулами называются иерархические копулы, на каждом уровне иерархии которых агрегируется один новый элемент. При этом на каждом уровне иерархии возникает только одна новая копула. Вложенные иерархические копулы моделируются с использованием парных ($d = 2$) копул.

Частично-вложенные иерархические копулы агрегируют на каждом уровне два и более элементов, и поэтому на каждом уровне иерархии, кроме верхнего, может возникнуть более двух копул.

Приведем виды иерархических копул для 4-х мерного закона распределения:

а) вложенная иерархическая копула

$$C(u_1, \dots, u_4) = C_{1,3}(C_{1,2}(C_{1,1}(u_1, u_2), u_3), u_4);$$

б) частично-вложенная иерархическая копула

$$C(u_1, \dots, u_4) = C_{1,2}(C_{1,1}(u_1, u_2), C_{1,2}(u_3, u_4)).$$

Иерархические копулы состояются из нескольких архимедовых копул. В ходе исследования автору не доводилось встречать работы, посвященные объединению в иерархическую структуру копул из разных семейств. Эксперименты по построению подобных структур на настоящем этапе не дали положительных результатов.

4. Определение структуры иерархической копулы

Определение структуры копулы является наиболее важным этапом оценки иерархической копулы, поскольку задает вид модели, которую необходимо оценить. Полученная иерархическая структура, во-первых, действительно должна представлять многомерное распределение, а во-вторых, должна группировать случайные величины в однородные с точки зрения тесноты связи подгруппы, что будет предполагать использование коэффициента ранговой корреляции. Дополнительно ожидается наличие содержательной экономической интерпретации полученной группировки.

Для определения общего вида архимедовой копулы необходимо ввести понятие вполне монотонных функций.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется вполне монотонной (в.м.ф.), если $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$

Введем теперь понятие функции-генератора и общего вида архимедовой копулы (см., например, (Mai, Scherer, 2012)).

Функцией-генератором архимедовой копулы называется непрерывная выпуклая строго убывающая функция $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ и $\psi(0) = \infty$, $\psi(1) = 0$. Такая функция имеет обратную $\psi^{-1}: [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$, при этом $\psi^{-1}(0) = 1$, $\psi^{-1}(\infty) = 0$.

Для функции-генератора ψ определим функцию

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi^{-1}(\psi(u_1) + \dots + \psi(u_d)).$$

Функция C является копулой (называемой *архимедовой*) тогда и только тогда, когда ψ^{-1} относится к классу в.м.ф.

Для иерархических архимедовых копул McNeil (2008) доказал, что достаточным условием представления многомерного распределения в виде иерархической копулы является вполне монотонность производной функции $[\psi_k^{-1} \circ \psi_{k+1}]$ для всех уровней иерархии k .

Nelsen (2007) указал, что для семейств Клэйтона, Франка и Гумбеля данное условие требует, чтобы на каждом уровне иерархии параметр копулы был меньше, чем на предыдущем, т. е. $\theta_k \leq \theta_{k+1}$. Тем самым теснота связи должна убывать — на нижнем уровне иерархии объединяются наиболее сильно связанные (с точки зрения коэффициента ранговой корреляции).

Как было указано в разделе 2 настоящей статьи, формализованный подход к группировке случайных величин представлен в работах (Okhrin, Ristig, 2012; Okhrin et al., 2013). Этот подход основан на условии в.м.ф. для иерархических копул, представленных копулами одного семейства. Агрегирование в иерархическую структуру осуществляется по принципу группировки данных с наиболее тесной связью, определяемой через параметр копулы.

На первом этапе вычисляются параметры парных копул заданного семейства для всех возможных комбинаций по две случайные величины. Затем группируются те случайные величины, для которых значение параметра максимально. Группировка более двух величин возможна при условии, что разность между оценками параметров меньше заданной исследователем величины (у автора эта величина составляла 0.15). Сгруппированные случайные величины рассматриваются как единое целое, и алгоритм повторяется до тех пор, пока все случайные величины не будут агрегированы.

К недостаткам этого подхода можно отнести неявную предпосылку, что рассматриваемые случайные величины могут быть представлены в виде иерархической копулы, отсут-

ствие статистического обоснования равенства оценок параметров, малую мощность для частично-вложенных копул.

Предложенный в настоящей работе подход — τ -классификация — основан на анализе структуры матрицы коэффициентов ранговой корреляции Кендалла (τ -матрицы).

Архимедовы иерархические копулы накладывают некоторые ограничения на вид τ -матрицы. Так, для иерархической структуры, составленной из k копул, число уникальных (с точки зрения статистического различия) элементов матрицы с исключенной главной диагональю меньше либо равно k , при этом равенство возникает, когда все k копул различны.

Метод τ -классификации позволяет определить как возможность представления многомерного распределения в виде иерархической архимедовой копулы, так и ее структуру. Вместе с тем однозначная зависимость между значением коэффициента ранговой корреляции Кендалла и параметром копулы позволяет исследователю сделать начальное предположение о значении искомых параметров копулы, необходимое для эффективного с вычислительной точки зрения определения оптимума в задаче максимизации функции правдоподобия численными методами.

Преимуществом метода τ -классификации является отсутствие необходимости заранее определять семейство иерархической копулы и использование статистического критерия для группировки случайных величин.

Алгоритм τ -классификации заключается в следующем.

На первом этапе для каждого столбца (или строки, что верно в силу симметрии) τ -матрицы, оцененной на моделируемых данных, выделяются статистически равные коэффициенты ранговой корреляции на основе доверительных интервалов, рассчитанных методом бутстрап⁴ для выборки соответствующих размеров.

На следующем этапе по полученным столбцам определяется возможная иерархическая структура копулы с точки зрения тесноты связи каждой случайной величины. Если полученные структуры для каждого столбца τ -матрицы вступают во взаимное противоречие, то представление в виде иерархической копулы невозможно.

Если противоречие не найдено, то проводится проверка статистического равенства коэффициентов ранговой корреляции внутри агрегированных групп. В результате, если внутри групп коэффициенты ранговой корреляции статистически равны, то совместное распределение случайных величин может быть представлено в виде иерархической копулы, а вычисленные коэффициенты ранговой корреляции могут быть использованы как начальные параметры для решения задачи максимизации функции правдоподобия численными методами.

Пример. Рассмотрим следующую τ -матрицу, рассчитанную на основе 1000 смоделированных наблюдений многомерного закона, описываемого иерархической копулой:

	U1	U2	U3	U4	U5	U6
U1	1.00	0.27	0.28	0.08	0.28	0.44
U2	0.27	1.00	0.50	0.13	0.52	0.25
U3	0.28	0.50	1.00	0.14	0.51	0.25
U4	0.08	0.13	0.14	1.00	0.13	0.08
U5	0.28	0.52	0.51	0.13	1.00	0.26
U6	0.44	0.25	0.25	0.08	0.26	1.00

⁴ В настоящем исследовании число симуляций составляло 1000.

Определение статистически равных коэффициентов ранговой корреляции Кендалла для каждого столбца матрицы и соответствующая группировка случайных величин (с.в.) приведены в табл. 2:

Таблица 2. τ -классификация: выделение групп по столбцам

С.в.	Статистически равные коэффициенты	Группировка с.в. по степени тесноты связи
1	(0.44) (0.27, 0.28, 0.28) (0.08)	((U1, U6), (U2, U3, U5)), U4
2	(0.50, 0.52) (0.27, 0.25) (0.13)	((U2, U3, U5), (U1, U6)), U4
3	(0.50, 0.51) (0.28, 0.25) (0.14)	((U3, U2, U5), (U1, U6)), U4
4	(0.08, 0.13, 0.14, 0.13, 0.08)	(U4, (U1, U2, U3, U5, U6))
5	(0.52, 0.51) (0.28, 0.26) (0.13)	((U5, U2, U3), (U1, U6)), U4
6	(0.44) (0.25, 0.25, 0.26) (0.08)	((U6, U1), (U2, U3, U5)), U4

Поскольку приведенные в табл. 2 группировки не являются взаимоисключающими, осуществляется проверка статистического равенства между коэффициентами ранговой корреляции по Кендаллу внутри выделенных групп.

Для визуализации полученной группировки произведем перестановку случайных величин внутри τ -матрицы. Группировка случайных величин выделена оттенками серого цвета, где более насыщенный цвет соответствует более тесной связи:

	U2	U3	U5	U1	U6	U4
U2	1.00	0.50	0.52	0.27	0.25	0.13
U3	0.50	1.00	0.51	0.28	0.25	0.14
U5	0.52	0.51	1.00	0.28	0.26	0.13
U1	0.27	0.28	0.28	1.00	0.44	0.08
U6	0.25	0.25	0.26	0.44	1.00	0.08
U4	0.13	0.14	0.13	0.08	0.08	1.00

В результате, иерархическая копула имеет следующий вид:

$$C(u_1, \dots, u_6) = C_{3,1}(u_4, C_{2,1}(C_{1,1}(u_2, u_3, u_5), C_{1,2}(u_1, u_6))).$$

В таблице 3 представлены начальные значения параметров полученной иерархической структуры для нахождения параметров численными методами.

Таблица 3. τ -классификация: иерархическая структура и начальные значения параметров

Однородная группа с.в.	$\hat{\tau}$	Клэйтон	Гумбель	Франк
(U2, U3, U5)	0.51	2.08	2.04	5.92
(U1, U6)	0.44	1.57	1.79	4.74
((U2, U3, U5), (U1, U6))	0.26	0.70	1.35	2.48
((U2, U3, U5), (U1, U6)), U4	0.11	0.25	1.12	1.00

Предложенный в настоящей работе подход позволяет оценить структуру иерархической копулы. Семейства копул, составляющие иерархическую копулу, необходимо оценивать отдельно в соответствии с выбранными критериями качества модели.

В таблице 4 приведено сравнение результатов двух подходов к оценке структуры иерархической копулы: τ -классификации, предложенной в настоящей работе, и пошаговой максимизации из работы (Okhrin, Ristig, 2012). Эксперимент осуществлялся по алгоритму, аналогичному использованному Okhrin, Ristig (2012). Выборка составляла 500 и 1000 наблюдений для трех- и пятимерных копул соответственно, итеративная генерация выборки и определение иерархической структуры осуществлялось m раз до тех пор, пока число верно классифицированных структур не достигало 1000 (при этом доля верно классифицированных структур полагалась равной $1000/m$).

Таблица 4. Сравнение подходов к определению иерархической структуры копулы

Структура	Семейство	Параметры копулы ⁵	Коэффициенты ранговой корреляции Кендалла	Доля верно классифицированных структур, %	
				τ -классификация	Пошаговая максимизация
((1, 2), 3)	Гумбель	$\theta_1 = 1.500$ $\theta_2 = 3.000$	$\tau_1 = 0.333$ $\tau_2 = 0.667$	100	100
((1, 2), 3)	Клэйтон	$\theta_1 = 1.500$ $\theta_2 = 3.000$	$\tau_1 = 0.333$ $\tau_2 = 0.667$	100	100
((1, 2), 3)	Франк	$\theta_1 = 1.500$ $\theta_2 = 3.000$	$\tau_1 = 0.333$ $\tau_2 = 0.667$	100	нет данных ⁶
(((1, 2), 3), 4), 5)	Гумбель	$\theta_1 = 1.125$ $\theta_2 = 1.500$ $\theta_3 = 2.250$ $\theta_4 = 4.500$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.556$ $\tau_4 = 0.778$	99.90	100
(((1, 2), 3), 4), 5)	Клэйтон	$\theta_1 = 1.010$ $\theta_2 = 3.306$ $\theta_3 = 6.850$ $\theta_4 = 16.169$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.556$ $\tau_4 = 0.778$	100	100
(((1, 2), 3), 4), 5)	Франк	$\theta_1 = 0.250$ $\theta_2 = 1.000$ $\theta_3 = 2.500$ $\theta_4 = 7.000$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.556$ $\tau_4 = 0.778$	100	—
((1, 2), (3, 4), 5)	Гумбель	$\theta_1 = 1.125$ $\theta_2 = 1.500$ $\theta_3 = 3.000$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.667$	95.51	35.41
((1, 2), (3, 4), 5)	Клэйтон	$\theta_1 = 0.250$ $\theta_2 = 1.000$ $\theta_3 = 4.000$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.667$	95.06	6.05
((1, 2), (3, 4), 5)	Франк	$\theta_1 = 1.010$ $\theta_2 = 3.306$ $\theta_3 = 10.033$	$\tau_1 = 0.111$ $\tau_2 = 0.333$ $\tau_3 = 0.667$	95.33	—

⁵ Данные взяты из табл. 4 и 5 работы (Okhrin, Ristig, 2012).

⁶ В (Okhrin, Ristig, 2012) исследование для данного семейства (Франка) не проводилось ввиду вычислительных трудностей.

Как следует из табл. 4, предложенный в настоящей работе подход позволяет существенно повысить качество оценки иерархической структуры копулы для случая частично-вложенных копул.

5. Описание первичных данных

Выборка представлена ежедневными наблюдениями за ценой закрытия торгов на фондовых биржах США обыкновенных акций десяти компаний из различных секторов экономики. Источник данных — информационная система Bloomberg.

В качестве обучающей выборки использовались данные за 2000–2007 гг., в качестве тестирующей — за 2008 г.

В работе рассматривались компании из четырех различных секторов по классификации информационной системы S&P Capital IQ⁷:

1) финансовый сектор — JPMorgan Chase & Co. (JPM), Citigroup Inc (C), Bank of America Corp (BAC);

2) химическая отрасль — E. I. Du Pont De Nemours & Co. (DD), Dow Chemical Company (DOW);

3) нефтяная отрасль — Exxon Mobil Corporation (XOM), Chevron Corporation (CVX);

4) электроэнергетика — American Electric Power Company, Inc (AEP), Ppl Corporation (PPL), PG&E Company (PCG).

Описательные статистики логарифмических доходностей рассмотренных рядов приведены в табл. 5 и 6.

Как видно из табл. 5 и 6, характер поведения случайных величин претерпел существенные изменения: возросла дисперсия, снизились квантили распределения. Для того чтобы протестировать эту гипотезу, был проведен тест Колмогорова–Смирнова равенства эмпирических функций распределения на двух подвыборках. Таблица 7 показывает, что для всех случайных величин, кроме PCG, гипотеза о равенстве эмпирических функций распределения не принимается на 5%-ном уровне значимости, т. е. имел место структурный сдвиг в частных распределениях с.в.

Рассматриваемая выборка характеризовалась наличием нескольких значительных финансово-экономических событий: пик пузыря Доткомов в 2000 г., последовавшая вслед за этим рецессия, завершившаяся в США в 2003 г., бум ипотечного кредитования в середине 2000-х гг., в том числе суб-стандартного кредитования, активное использование синтетических финансовых продуктов, в том числе секьюритизация активов, монетизация экономики, достижение пика цен на недвижимость в 2006–2007 гг. в США и другие. Также следует отметить, что все это происходило на фоне стремительного роста финансовой индустрии, основанной на алгоритмической торговле. Можно предположить, что в результате действия этих и других факторов характер поведения цены финансовых активов претерпел существенные изменения.

Рассмотрим динамику коэффициентов ранговой корреляции Кендалла между рассматриваемыми случайными величинами на имеющейся выборке. Коэффициент корреляции рассчитывался методом скользящего окна шириной 252 торговых дня (1 год).

⁷ <https://www.capitaliq.com/home.aspx/>.

Таблица 5. Описательные статистики рассмотренных рядов за 2000–2007 гг. (в %)

	Среднее	Станд. отклонение	25%-й квантиль	Медиана	75%-й квантиль	Мин.	Макс.
JPM	0.01	2.18	-0.98	0.00	0.95	-19.98	14.87
C	0.04	1.67	-0.72	0.05	0.78	-10.68	8.20
BAC	0.00	1.92	-0.89	0.00	0.86	-17.11	11.90
DD	-0.01	1.69	-0.93	-0.07	0.86	-10.95	9.41
DOW	0.01	2.02	-1.09	0.00	1.08	-11.18	10.79
XOM	0.05	1.52	-0.79	0.12	0.94	-8.84	9.29
CVX	0.05	1.46	-0.84	0.08	0.98	-6.92	9.04
AEP	0.04	1.84	-0.73	0.07	0.87	-25.86	18.10
PPL	0.09	1.69	-0.78	0.12	0.97	-13.01	8.10
PCG	0.04	2.90	-0.87	0.07	1.03	-45.78	26.86

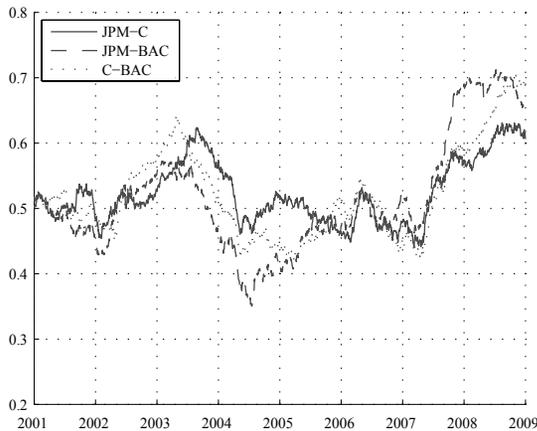
Таблица 6. Описательные статистики рассмотренных рядов за 2008 г. (в %)

	Среднее	Станд. отклонение	25%-й квантиль	Медиана	75%-й квантиль	Мин.	Макс.
JPM	-0.11	5.29	-2.91	-0.55	2.03	-19.70	19.38
C	-0.39	6.31	-3.19	-0.64	2.04	-30.42	24.06
BAC	-0.56	7.13	-3.90	-0.63	2.19	-30.66	45.63
DD	-0.20	3.02	-1.61	-0.04	1.16	-12.03	10.86
DOW	-0.36	3.32	-1.71	-0.13	0.96	-21.11	9.98
XOM	-0.06	3.23	-1.32	-0.06	1.24	-15.03	15.86
CVX	-0.08	3.46	-1.53	0.11	1.29	-13.34	18.94
AEP	-0.12	2.58	-1.30	-0.12	1.09	-9.06	12.41
PPL	-0.20	2.84	-1.28	0.00	1.19	-12.94	13.80
PCG	-0.03	2.54	-1.17	0.00	0.92	-9.81	11.68

Таблица 7. Тест Колмогорова–Смирнова равенства эмпирических функций распределения

	Статистика	P-значение
JPM	0.2105	0.0000
C	0.3034	0.0000
BAC	0.2792	0.0000
DD	0.1334	0.0007
DOW	0.1084	0.0101
XOM	0.1186	0.0036
CVX	0.1434	0.0002
AEP	0.1481	0.0001
PPL	0.1192	0.0034
PCG	0.0705	0.2143

На рисунке 1а изображена динамика изменения взаимосвязи между акциями, относящимися к финансовому сектору — коэффициенты парной корреляции ранговой корреляции Кендалла между ВАС и JPM, С и JPM, ВАС и С. Рисунки 1б, 1в и 1г аналогично отражают динамику взаимосвязи внутри химической, нефтяной отраслей и электроэнергетики соответственно.



а) финансовый сектор



б) химическая отрасль



в) нефтяная отрасль



г) электроэнергетика

Рис. 1. Динамика взаимосвязи между активами внутри секторов

На рисунке 2а изображена динамика изменения взаимосвязи между акциями, относящимися к различным секторам — коэффициенты парной ранговой корреляции Кендалла между акциями компаний финансового сектора и акциями компаний химической отрасли. Рисунки 2б–2е аналогично отражают динамику взаимосвязи между остальными возможными комбинациями четырех рассмотренных отраслей.



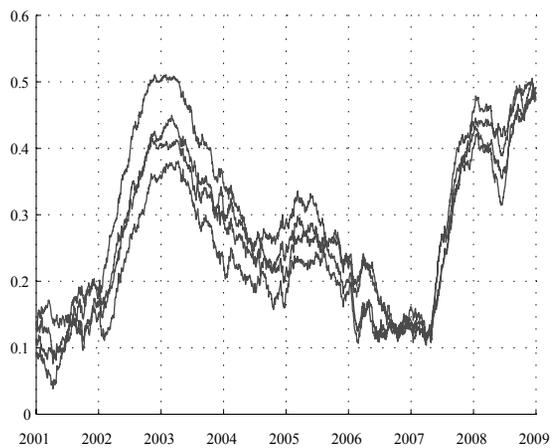
а) финансовый — химическая



б) финансовый — нефтяная



в) финансовый — электроэнергетика



г) химическая — нефтяная



д) химическая — электроэнергетика



е) нефтяная — электроэнергетика

Рис. 2. Динамика взаимосвязи между активами различных секторов

Анализ динамики степени тесноты связи между рассматриваемыми временными рядами позволяет сделать несколько выводов. Во-первых, взаимосвязь между изменением стоимости акций компаний, входящих в определенный сектор, является высокой. Во-вторых, степень тесноты связи (корреляция) между секторами также является высокой. В третьих, степень тесноты связи между активами претерпевала значительные изменения с течением времени. Последний факт является наиболее интересным и требует дополнительного обсуждения.

Как следует из рис. 1 и 2, имеет место общая тенденция к росту тесноты взаимосвязи между рассматриваемыми временными рядами на всей выборке. Это позволяет предположить наличие существенных изменений фондового рынка, произошедших в последнее десятилетие, повышение взаимосвязанности поведения различных активов, в первую очередь ввиду роста доли алгоритмической торговли в общем объеме сделок⁸.

Рассмотрим динамику тесноты взаимосвязи между секторами, изображенную на рис. 2. В большинстве случаев в 2001–2002 гг. теснота взаимосвязи либо отсутствовала (рис. 2б, 2в), либо была минимальной. Однако с течением времени движение цен активов, относящихся к разным секторам, стало более сонаправленным, что стало причиной роста коэффициента ранговой корреляции Кендалла до значения 0.4.

Другой интересной тенденцией является рост тесноты связи между ценами активов, начавшийся к концу первой половины 2007 г. Именно в это время неплатежи по субстандартным ипотечным кредитам достигли уровня, при котором финансовые институты были вынуждены списывать убытки по активам, обеспеченным ипотечным кредитованием⁹.

Как было указано в разделе 3, коэффициент ранговой корреляции Кендалла имеет функциональную связь с параметрами копул. Поэтому в настоящей работе используется скользящее 252-дневное окно для определения выборки, на которой оценивались бы параметры и структура копулы.

1. На основе наблюдений за последние 252 торговых дня оцениваются параметры и, если применимо, иерархическая структура.

2. На один день вперед в соответствии с оцененным на предыдущем шаге законом осуществляется симуляция 1000 псевдослучайных чисел, описывающих вероятности для частных распределений случайных величин.

3. Полученные вероятности используются для вычисления реализаций доходностей по активам, входящим в длинный портфель акций 10-и компаний (акции входят с неотрицательными весами), и осуществляется расчет прибыли/убытка по портфелю.

4. Симулированные значения возможных реализаций прибыли/убытка по портфелю используются для определения критериев, в соответствии с которыми выбирается многомерный закон распределения, наиболее точно аппроксимирующий риск инвестиционного портфеля.

5. Переход к следующему дню и п. 1.

⁸ Доля сделок, осуществленных торговыми системами на Нью-Йоркской фондовой бирже, в июне 2009 г. составила 48.6% (<http://www.rcb.ru/bo/2009-09/25671/>).

⁹ Первым крупное списание осуществил банк HSBC в феврале 2007 г. на сумму 10.5 млрд долл. США. *Источник:* Информационная система Capital IQ.

В ходе исследования было обнаружено, что несмотря на изменение параметров иерархической структуры с течением времени, сама иерархическая структура не претерпевала изменений на тестирующей выборке и имела следующий вид:

$$C_{3,1} \left(C_{2,1} \left(C_{1,1} (u_{JPM}, u_{BAC}, u_C), C_{1,2} (u_{DD}, u_{DOW}) \right), C_{1,3} (u_{XOM}, u_{CVX}), C_{1,4} (u_{AEP}, u_{PPL}, u_{PCG}) \right).$$

Наибольшую однородность (с точки зрения степени тесноты связи) демонстрировали акции компаний, относящихся к одинаковому сектору. Поэтому нижний уровень иерархии представлен четырьмя копулами, каждая из которых соответствует своему сектору.

На следующем уровне ожидалось увидеть либо объединение копулой всех четырех отраслей и получение двухуровневой копулы, как, например, в работе (Savu, Trede, 2006), либо объединение химической и нефтяной отраслей как следствие их вертикальной зависимости. Однако вопреки ожиданиям копулой были объединены финансовый и химический секторы, демонстрировавшие наиболее высокую тесноту связи. Теснота связи возрастала на всей экзаменуемой выборке.

На третьем уровне копулы более низких уровней были объединены единой копулой.

6. Выбор наилучшей модели

Для выбора наилучшего подхода для моделирования риска инвестиционного портфеля были использованы следующие меры риска:

- Value-at-Risk (VaR):

$$VaR_X(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf \{x | F_X(x) \geq \alpha\}, \text{ т. е. } \Pr(X \leq VaR_X(\alpha)) = \alpha,$$

где F_X — функция распределения дохода X инвестиционного портфеля, α — уровень значимости;

- Expected Shortfall (ES):

$$ES_X(\alpha) = E(X | X \leq VaR_X(\alpha)).$$

Таким образом, обе меры риска $VaR_X(\alpha)$ и $ES_X(\alpha)$ принимают одинаковый знак (как правило, отрицательный), отражая потери от реализации рисков. При этом в абсолютном выражении ожидаемое превышение границы потерь больше (как правило, существенно) самой границы потерь, т. е. $|VaR_X(\alpha)| \leq |ES_X(\alpha)|$.

Для определения наилучшей модели для оценки риска инвестиционного портфеля был использован эксперимент, впервые предложенный в (Giacomini et al., 2009). Суть эксперимента заключается в том, что мера риска рассчитывается не для одного заданного инвестиционного портфеля, например равновзвешенного, а для большого числа инвестиционных портфелей, веса активов в которых выбираются случайным образом. Этот подход позволяет делать более общие выводы относительно применимости модели для оценки риска для широкого спектра портфелей.

В (Giacomini et al., 2009) рассматривалась одна мера риска — VaR, в настоящем исследовании дополнительно рассмотрена мера ES.

Введем следующие обозначения.

Множество портфелей:

$$W = \{w^*, w^n; n = 1, \dots, 999\},$$

где $w^* = (1/m, \dots, 1/m)'$ — равновзвешенный портфель, $w^n = (w_{n,1}, w_{n,2}, \dots, w_{n,m})'$ равномерно распределен на $S = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$, m — число активов в портфеле.

Эмпирический уровень значимости:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}\{L_t \leq \widehat{VaR}_t(\alpha)\},$$

где T — горизонт прогноза, $\mathbf{I}\{\cdot\}$ — индикаторная функция множества $\{\cdot\}$,

$L_t = \sum_{i=1}^m w_i (e^{R_{i,t}} - 1)$ — значение функции прибыли/убытка портфеля в момент t ,

$R_{i,t} = \log(P_{i,t}/P_{i,t-1})$ — логарифм доходности i -го актива в момент t , $\widehat{VaR}_t(\alpha)$ — оценка границы потерь при заданном уровне риска.

Относительное расстояние между теоретическим и эмпирическим уровнем значимости:

$$e = |\hat{\alpha} - \alpha|/\alpha.$$

Среднее относительное расстояние между теоретическим и эмпирическим уровнем значимости:

$$A_W = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} e_w,$$

где $|W|$ — число элементов множества W , в данном случае 1000, а e_w — относительное расстояние между теоретическим и эмпирическим уровнем значимости для портфеля w .

Стандартное отклонение:

$$D_W = \left\{ \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} (e_w - A_W)^2 \right\}^{1/2}.$$

Доля пробоев ES:

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{I}\{L_{w,t} \leq \widehat{ES}_{w,t}(\alpha)\},$$

где $L_{w,t}$ — значение прибыли/убытка для портфеля w в момент времени t ; $\widehat{ES}_{w,t}(\alpha)$ — оценка ожидаемого превышения границы потерь при заданном уровне риска α для портфеля w в момент времени t .

Полудисперсия убытков, превышающих величину ES^{10} :

$$\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \left\{ \frac{1}{\sum_{t=1}^T I\{L_{w,t} \leq \widehat{ES}_{w,t}(\alpha)\}} \sum_{t=1}^T \left(I\{L_{w,t} \leq \widehat{ES}_{w,t}\} \right) (L_{w,t} - \widehat{ES}_{w,t})^2 \right\}.$$

В перечисленных выше терминах лучшей моделью (с точки зрения критерия VaR) будет являться та, для которой величина параметра A_W минимальна. Это соответствует выбору модели, эмпирический уровень значимости которой наиболее близок к теоретическому, заданному параметром α , для случайного портфеля.

В таблице 8 в колонке «Эмпирический уровень значимости» представлено среднее (для 1000 случайных портфелей) значение эмпирического уровня значимости для каждого из теоретических значений уровня значимости: 10, 5 и 1%. Чем ближе эмпирическое значение уровня значимости к теоретическому, тем точнее модель. В колонке « A_W » приведено среднее относительное расстояние между теоретическим и эмпирическим уровнями значимости для 1000 портфелей. Чем ниже значение A_W для выбранной модели, тем точнее модель. В скобках приведены стандартные ошибки оценок.

Таблица 8. Сравнение моделей с точки зрения критерия VaR

Копула	Эмпирический уровень значимости, %			A_W		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
Гауссова	10.23 (0.48)	5.29 (0.35)	2.16 (0.30)	0.044 (0.041)	0.073 (0.056)	1.163 (0.250)
t -копула	10.37 (0.57)	5.17 (0.35)	1.68 (0.40)	0.055 (0.039)	0.062 (0.049)	0.691 (0.372)
Группированная t -копула	10.32 (0.57)	5.48 (0.31)	1.46 (0.29)	0.051 (0.040)	0.099 (0.057)	0.472 (0.273)
Коши	12.02 (0.59)	5.56 (0.46)	1.25 (0.32)	0.202 (0.060)	0.118 (0.085)	0.339 (0.214)
Иерархическая Клейтона	10.04 (0.50)	5.04 (0.29)	1.21 (0.26)	0.040 (0.030)	0.050 (0.032)	0.289 (0.171)
Иерархическая Гумбеля	10.60 (0.60)	5.95 (0.46)	2.99 (0.45)	0.070 (0.049)	0.189 (0.092)	1.992 (0.447)
Иерархическая Франка	9.43 (0.63)	5.79 (0.43)	3.54 (0.44)	0.069 (0.050)	0.160 (0.085)	2.545 (0.435)
Клейтона	11.31 (0.60)	5.45 (0.39)	1.43 (0.32)	0.131 (0.058)	0.097 (0.068)	0.471 (0.254)
Гумбеля	11.65 (0.61)	7.00 (0.56)	4.31 (0.42)	0.165 (0.061)	0.401 (0.112)	3.308 (0.422)
Франка	10.11 (0.55)	6.43 (0.46)	4.39 (0.42)	0.045 (0.033)	0.286 (0.093)	3.392 (0.421)

¹⁰ В литературе также известна как *lower semi-variance*, впервые предложена Нобелевским лауреатом Марковитцем (Markowitz, 1952).

Как следует из результатов, представленных в табл. 8, иерархическая копула семейства Клейтона дает наиболее точную оценку риска с точки зрения критерия VaR.

Подобный результат является достаточно ожидаемым, поскольку копула Клейтона обладает зависимостью нижних хвостов распределения.

С точки зрения критерия ES наилучшей будет признана та модель, полудисперсия которой является минимальной.

В таблице 9 в колонке «Доля пробоев ES» представлено среднее (для 1000 случайных портфелей) значение доли дней, когда фактический убыток превышал расчетную величину ES, для каждого из теоретических значений уровня значимости: 10, 5 и 1%. В колонке «Полудисперсия» приведено среднее (для 1000 портфелей) значение полудисперсии убытков, превышающих расчетное значение ES. Для удобства представленные значения умножены на 1000. Чем ниже значение полудисперсии для выбранной модели, тем точнее модель. В скобках — стандартная ошибка оценки.

Таблица 9. Сравнение моделей с точки зрения критерия ES

Копула	Доля пробоев ES, %			Полудисперсия (×1000)		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%
Гауссова	4.69 (0.28)	3.19 (0.35)	1.32 (0.30)	1.212 (0.231)	0.907 (0.200)	0.198 (0.142)
<i>t</i> -копула	4.37 (0.30)	2.92 (0.33)	0.39 (0.27)	1.022 (0.192)	0.565 (0.127)	0.066 (0.105)
Группированная <i>t</i> -копула	4.49 (0.30)	2.78 (0.39)	0.44 (0.25)	1.079 (0.193)	0.708 (0.176)	0.065 (0.089)
Коши	4.52 (0.24)	2.94 (0.31)	0.06 (0.14)	1.035 (0.180)	0.539 (0.120)	0.008 (0.042)
Иерархическая Клейтона	4.10 (0.36)	2.08 (0.29)	0.04 (0.13)	0.894 (0.194)	0.598 (0.127)	0.001 (0.009)
Иерархическая Гумбеля	5.31 (0.35)	4.11 (0.42)	2.01 (0.27)	1.253 (0.230)	0.978 (0.174)	0.557 (0.129)
Иерархическая Франка	5.37 (0.39)	4.40 (0.40)	2.86 (0.39)	1.311 (0.243)	1.123 (0.202)	0.928 (0.247)
Клейтона	4.38 (0.29)	2.53 (0.39)	0.35 (0.26)	1.031 (0.229)	0.668 (0.146)	0.048 (0.101)
Гумбеля	6.08 (0.46)	4.94 (0.29)	3.17 (0.46)	1.376 (0.287)	1.127 (0.220)	0.706 (0.164)
Франка	5.90 (0.43)	5.02 (0.33)	3.51 (0.50)	1.391 (0.280)	1.199 (0.232)	0.894 (0.198)

Результаты, представленные в табл. 9, можно использовать и интерпретировать только совместно с результатами из табл. 8 ввиду взаимосвязи между критериями VaR и ES.

Как следует из результатов, представленных в табл. 9, иерархическая копула семейства Клейтона дает наиболее точную оценку риска (с точки зрения критерия ES) для всех рассмотренных уровней значимости. Это совместно с результатами из табл. 8 позволяет сделать вывод, что иерархическая копула Клейтона является наилучшей (с точки зрения критериев VaR и ES) моделью для изучения риска инвестиционного портфеля.

7. Заключение

Проведенное исследование показало, что применение иерархической копулы Клейтона позволяет наиболее точно оценивать риски инвестиционного портфеля с точки зрения таких мер риска, как ES и VaR, в сравнении с другими подходами к моделированию многомерного распределения. В качестве альтернатив в работе были рассмотрены гауссова копула, t -копула, группированная t -копула, копулы Коши, Клейтона, Гумбеля, Франка, иерархические копулы Гумбеля, Франка. Объяснением этого результата является тот факт, что копула Клейтона позволяет моделировать зависимость нижних хвостов распределения, а иерархическая структура позволяет описывать различную степень тесноты связи между случайными величинами. Полученный результат подтверждает результаты других исследователей о том, что архимедовы копулы вообще, и иерархические в частности, превосходят эллиптические.

Помимо сравнения качества рассмотренных моделей на эмпирических данных, в настоящем исследовании была предложена методика оценки иерархической структуры копулы, основанная на выделении и группировке статистически одинаковых элементов корреляционной матрицы Кендалла моделируемых случайных величин. Оценка распределения и доверительных интервалов для элементов корреляционной матрицы осуществлялась методом Монте-Карло. В отличие от других подходов к оценке иерархической структуры копулы, данный подход не предполагает использование суждений исследователя, основанных на априорных знаниях или требованиях к равенству параметров копул в иерархической структуре. Предложенный подход обладает более высокой мощностью при определении иерархической структуры для частично-вложенных копул, чем подход, когда копулы объединяются в копулу более высокого уровня иерархии при равенстве значений параметров этих копул.

Существует ряд направлений продолжения настоящего исследования. Например, возможно добавление к рассмотренным типам моделей конструкций из парных копул.

Еще одним направлением является исследование возможности и способов комбинации нескольких семейств копул в рамках единой иерархической копулы. Полученная в результате модель может быть использована в тех случаях, когда на отдельных группах случайных величин разные семейства копул являются наилучшими.

Наиболее интересным направлением исследования видится расширение критериев для оценки качества модели. В исследовании применялся один критерий качества — точность моделирования риска портфеля. Вместе с тем существует возможность сравнения использования копул в рамках решения задачи оптимизации портфеля при замене дисперсии, как меры риска, на VaR и ES. Это позволит расширить спектр применения работы от управления рыночным риском до смежной области — управление активами.

Список литературы

Благовещенский Ю. Н. (2012). Основные элементы теории копул. *Прикладная эконометрика*, 26 (2), 113–130.

Пеникас Г. И., Симакова В. Б. (2009). Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей. *Прикладная эконометрика*, 13 (1), 3–35.

Травкин А. И. (2013). Конструкции из парных копул в задаче формирования портфеля акций. *Прикладная эконометрика*, 32 (4), 110–133.

- Фантацини Д. (2011а). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. I. *Прикладная эконометрика*, 22 (2), 98–134.
- Фантацини Д. (2011б). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. II. *Прикладная эконометрика*, 23 (3), 98–132.
- Фантацини Д. (2011в). Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций. III. *Прикладная эконометрика*, 24 (4), 100–130.
- Adam A., Houkari M., Laurent J-P. (2008). Spectral risk measures and portfolio selection. *Journal of Banking and Finance*, 32, 1870–1882.
- Choe G., Jang H. (2011). Efficient algorithms for basket default swap pricing with multivariate Archimedean copulas. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 205–213.
- Daul S., De-Giorgi E., Lindskog F., McNeil A. (2003). The grouped t -copula with an application to credit risk. *RISK*, 16, 73–76.
- Garcia R., Tsafack G. (2011). Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets. *Journal of Banking and Finance*, 35, 1954–1970.
- Giacomini E., Härdle W. K., Spokoiny V. (2009). Inhomogeneous dependence modeling with time-varying copulae. *Journal of Business and Economic Statistics*, 27 (2), 224–234.
- Hofert M. (2011). Efficiently sampling nested Archimedean copulas. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55, 57–70.
- Hofert M., Scherer M. (2008). CDO pricing with nested Archimedean copulas. Ulm University. <http://www.mathematik.uni-ulm.de/numerik/preprints/2008/CDOpricingAC.pdf>.orig.
- Joe H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*. London: Chapman & Hall.
- Luo X., Shevchenko P. (2010). The t copula with multiple parameters of degrees of freedom: bivariate characteristics and application to risk management. *Quantitative Finance*, 10 (9), 1039–1054.
- MacKenzie D. (2008). End of the world insurance. *London Review of Books*, 30 (9), 24–25.
- Mai J-F., Scherer M. (2012). *Simulating copulas. Stochastic models, sampling algorithms, and applications*. Series in Quantitative Finance, Vol. 4. London: Imperial College Press.
- Markowitz H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), 77–91.
- McNeil A. J. (2008). Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78, 567–581.
- Nelsen R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer.
- Okhrin O., Ristig A. (2012). Hierarchical Archimedean copulae: The HAC package. *SFB 649 Discussion Paper* 2012–036.
- Okhrin O., Okhrin Y., Schmid W. (2013). On the structure and estimation of hierarchical Archimedean copulas. *Journal of Econometrics*, 173, 189–204.
- Patton A. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 4–18.
- Savu C., Trede M. (2006). Hierarchical Archimedean copulas. <http://www.webmeets.com/files/papers/LACEA-LAMES/2006/298/HAC.pdf>.
- Schmidt T. (2006). Coping with copulas. http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/TSchmidt_Copulas.pdf.