В. В. Лакшина

Можно ли снять «проклятие размерности»? Пространственные спецификации многомерных моделей волатильности

Статья посвящена задаче оценки многомерной волатильности портфеля, состоящего из двадцати акций американских компаний. Сформулированы и оценены шесть спецификаций многомерных моделей волатильности: BEKK, GO-GARCH и CCC, показано, что пространственные спецификации многомерных моделей волатильности позволяют снизить размерность задачи и в некоторых случаях превосходят общие спецификации при внутривыборочном и вневыборочном сравнениях.

Ключевые слова: модели многомерной волатильности; проклятие размерности; весовая матрица; пространственная авторегрессия; прогнозирование.

JEL classification: C01; C58; C51; G17.

1. Введение

Важность идеи включения временной зависимости в дисперсию временного ряда доходностей финансового актива трудно переоценить. Известно, что волатильность одних активов влияет на волатильность других, причем взаимодействующие активы могут принадлежать к разным секторам экономики. Этот факт лежит в основе многомерных моделей волатильности, которые позволяют получать более точные оценки волатильности, чем отдельные одномерные модели. Это, в свою очередь, дает возможность принимать более эффективные решения в вопросах ценообразования активов, формирования портфелей, страхования и управления рисками.

Примером моделей многомерной волатильности являются модели типа MGARCH, или многомерные модели авторегрессионной условной гетероскедастичности.

При оценке волатильности портфеля, который содержит большое число активов, существующие вариации многомерных GARCH моделей содержат такое число неизвестных параметров, что оценить их за приемлемое время с достаточной точностью крайне трудно, а иногда и невозможно. Такую ситуацию иногда называют «проклятием размерности» многомерных моделей волатильности (Caporin, McAleer, 2012). Уменьшить число оцениваемых параметров модели, сохранив при этом содержательную составляющую модели — одно из основных направлений работы исследователей в данной области.

В настоящей статье описано, какими способами можно уменьшить число оцениваемых параметров в многомерных моделях волатильности и избавиться от «проклятия размерности». Показано, что некоторые спецификации с меньшим числом параметров превосходят общие[1] спецификации как с точки зрения информационных критериев Акаике и Шварца

[1] Здесь и далее под общностью спецификации подразумевается отсутствие ограничений на параметры.

(внутривыборочное сравнение), так и теста Diebold–Mariano (Diebold, Mariano, 1995) на сравнение прогнозной силы (вневыборочное сравнение).

Статья имеет следующую структуру. Второй раздел посвящен обзору литературы по многомерным моделям волатильности и описанию моделей BEKK, GO-GARCH и CCC. В третьем разделе показаны способы уменьшения числа параметров в описанных моделях, а именно введение непосредственных ограничений на параметры, таргетирование и параметризация с помощью пространственных матриц. В разделе 4 кратко описана процедура оценки многомерных моделей волатильности и приведены результаты внутривыборочного и вневыборочного сравнений шести различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC, оценена многомерная волатильность портфеля, состоящего из двадцати акций американских компаний, принадлежащих к пяти различным секторам экономики.

2. Многомерные модели волатильности

Как и в одномерном случае, многомерные модели волатильности можно разделить на модели типа GARCH, модели стохастической волатильности и модели реализованной волатильности. В данной статье рассматриваются модели из первой группы. С подробными обзорами моделей из второй и третьей групп можно познакомиться, например, в (Asai et al., 2006; Bauer, Vorkink, 2011).

В соответствии с классификацией, предложенной в (Bauwens et al., 2006), MGARCH модели подразделяются на:

1) непосредственные обобщения одномерной GARCH (Bollerslev, 1986) — VEC (Bollerslev et al., 1988), BEKK (Engle, Kroner, 1995), факторные модели (De Santis, Gérard, 1998) и связанные с ними Riskmetrics (Riskmetrics, 1996), Cholesky (Tsay, 2002) и полнофакторная MGARCH (Vrontos et al., 2003);

2) линейные комбинации одномерных GARCH — ортогональная MGARCH (Alexander, Chibumba, 1996; Weide, 2002) и MGARCH со скрытым фактором (Fiorentini et al., 2004);

3) нелинейные комбинации одномерных GARCH — модели условной корреляции (Bollerslev, 1990; Engle, 2002; Engle, Kelly, 2012) и GARCH с копулами (Jondeau, Rockinger, 2006). Различные вариации и обобщения моделей условных корреляций представлены в (Christodoulakis, Satchell, 2002; Tse, Tsui, 2002; Pelletier, 2003).

Перейдем к рассмотрению моделей MGARCH типа. Основные предпосылки большинства таких моделей волатильности заключаются в следующем. Имеется портфель, состоящий из n активов и представляющий собой n временных рядов логарифмических доходностей длины T:

$$x_t = \left(x_{1t}, \ldots, x_{nt}\right)', \quad t = 1, \ldots, T. \tag{1}$$

Наблюдаемые доходности x_t можно представить как сумму условного математического ожидания $\mathrm{E}\left(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$ и n-мерного случайного процесса y_t с нулевым математическим ожиданием и матрицей условных ковариаций $\Sigma_t = \mathrm{E}(y_t y_t' \mid \mathcal{F}_{t-1})$:

$$x_t = \mathrm{E}\left(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) + y_t, \quad y_t \sim \mathrm{iid}(0, \Sigma_t). \tag{2}$$

Модели MGARCH различаются по тому, как параметризована матрица волатильности. Разумеется, каждая параметризация должна порождать положительно определенные и стационарные матрицы волатильности. Это требует выполнения некоторых условий, о которых будет сказано ниже.

В статье рассмотрено три варианта параметризации, согласно классификации в (Bauwens et al., 2006):

- BEKK;
- модель обобщенной ортогональной GARCH (GO-GARCH);
- модель постоянных условных корреляций (CCC).

Рассмотрим каждую из них подробнее.

2.1. Модель BEKK

Среди вышеперечисленных моделей BEKK является наиболее простой и интуитивно понятной для интерпретации. В этой модели динамика волатильности задается следующим уравнением:

$$\Sigma_t = CC' + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{q} A_{ik} y_{t-\mathrm{i}} y'_{t-\mathrm{i}} A'_{ik} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{p} B_{jk} \Sigma_{t-p} B'_{jk}, \tag{3}$$

где C — нижнетреугольная матрица; p и q имеют тот же смысл, что и в модели GARCH(p, q), т. е. порядок авторегрессии и скользящего среднего; K — порядок модели BEKK, определяющий ее общность; A_{ik} и B_{jk} — произвольные матрицы параметров размерности $n \times n$.

В (Engle, Kroner, 1995) доказано, что при $p = q = K = 1$ слабая стационарность процесса y_t достигается, если собственные числа матрицы $A_{11} + B_{11}$ по модулю меньше единицы. При этом в данной модели матрица волатильности положительно определена по построению, т. е. дополнительные условия не требуются.

В общем случае модель содержит $n^2\left(p+q\right)K + \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$ параметров. В статье рассматривается частный случай модели BEKK, в котором $p = q = K = 1$:

$$\Sigma_t = CC' + Ay_{t-1}y'_{t-1}A' + B\Sigma_{t-1}B'. \tag{4}$$

Число параметров в данной модели равно $2n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$.

2.2. Модель GO-GARCH

Модель GO-GARCH является частным случаем модели BEKK (Weide, 2002). В этой модели матрица волатильности параметризована следующим образом:

$$\Sigma_t = XV_tX', \tag{5}$$

где X — матрица, параметризация которой основана на сингулярном разложении (см. (Weide, 2002)), V_t — диагональная матрица, вектор диагональных элементов которой задан следующим уравнением:

$$v_t = c + A(y_{t-1} \odot y_{t-1}) + Bv_{t-1}, \tag{6}$$

где A, B — диагональные матрицы, c — $(n \times 1)$-вектор, $\odot$ — поэлементное произведение. Уравнение эквивалентно n одномерным GARCH моделям.

В модели GO-GARCH матрица волатильности положительно определена (Weide, 2002). Стационарность следует из условия стационарности одномерных GARCH процессов, входящих в уравнение. Другими словами,

$$a_{ii,t} + b_{ii,t} < 1, \tag{7}$$

где $a_{ii,t}$ и $b_{ii,t}$ — диагональные элементы матриц A и B соответственно, $i = 1, \ldots, n$.

Число параметров в данной модели равно $n^2 + 3n = O(n^2)$.

2.3. Модель CCC

Начнем с рассмотрения более простой модели с постоянными условными корреляциями. Несмотря на критику со стороны исследователей по поводу предположения о постоянстве условных корреляций (см., например, (Bera, Kim, 2002)), данная модель в ее общей спецификации популярна в среде практиков, в частности потому, что не требует оценки слишком большого числа параметров и проста в интерпретации.

Матрица волатильности в модели CCC параметризована следующим образом:

$$\Sigma_t = D_t R D_t, \quad D_t = \operatorname{diag}(h_t), \tag{8}$$

где h_t — $(n \times 1)$-вектор условных стандартных отклонений, R — корреляционная матрица с единицами на главной диагонали. Динамика условных дисперсий $v_t = h_t \odot h_t$ задана уравнением:

$$v_t = c + A(y_{t-1} \odot y_{t-1}) + Bv_{t-1}. \tag{9}$$

В (Bollerslev, 1990) матрицы A и B полагались диагональными, поэтому уравнение (9) полностью идентично уравнению (6) в GO-GARCH модели.

Для обеспечения положительной определенности матрицы волатильности необходимо, чтобы вектор свободного члена c состоял из положительных элементов, а матрица R была положительно определена. Стационарность требует выполнения тех же условий, что и для модели GO-GARCH. В обобщенной спецификации собственные числа матрицы $I_n - A - B$, где I_n — единичная $(n \times n)$ -матрица, должны быть меньше единицы по модулю.

Число параметров в данной модели равно $n + 2n^2 + \frac{1}{2}n(n+1) = O(n^2)$.

3. «Проклятие размерности» и способы его устранения

Ситуация, в которой число оцениваемых параметров в модели растет гораздо быстрее, чем число активов в портфеле, часто называют «проклятием размерности». Например, в модели VEC число параметров растет как четвертая степень числа исследуемых активов, что делает эту модель практически непригодной для анализа достаточно больших портфелей.

Как показано выше, число параметров во всех трех рассмотренных моделях имеет квадратичный рост относительно числа активов в портфеле. Тем самым общие модели BEKK, GO-GARCH и CCC подвержены «проклятию размерности».

В данном разделе рассмотрим некоторые способы уменьшения числа оцениваемых параметров.

3.1. Непосредственные ограничения числа параметров

Наиболее очевидный способ уменьшить число параметров в модели — это наложить на параметры модели некие ограничения. В многомерных моделях волатильности типа GARCH распространены скалярные и диагональные спецификации.

В первом случае на матрицу параметров накладывается ограничение $A = a \cdot I_n$. Для вектора свободного члена c это ограничение записывается как $c = \lambda \cdot 1_n$, где 1_n — $(n \times 1)$-вектор, состоящий из единиц, а λ — скаляр. Но из этого следует, что долгосрочная дисперсия одинакова для каждого актива в портфеле. Можно утверждать, что это сильно ограничивает динамику модели, поэтому в дальнейшем данное ограничение использоваться не будет. В итоге уравнения для матрицы волатильности приобретают следующий вид. Для модели BEKK:

$$\Sigma_t = CC' + a^2 y_{t-1} y'_{t-1} + b^2 \Sigma_{t-1}, \tag{10}$$

а для моделей GO-GARCH и CCC:

$$v_t = c + a(y_{t-1} \odot y_{t-1}) + b v_{t-1}. \tag{11}$$

Заметим, что замена матриц C в модели BEKK, X в модели GO-GARCH и R в модели CCC на скаляры невозможна, т. к. это очевидным образом приведет к тому, что математическое ожидание матрицы волатильности станет равным диагональной матрице или даже скаляру, умноженному на единичную матрицу, что противоречит экономическому смыслу моделей многомерной волатильности.

Другая спецификация предполагает, что матрицы параметров — диагональные. В модели BEKK это матрицы A и B, в GO-GARCH и CCC матрицы параметров диагональные уже в общих спецификациях, диагонализация X и R также не имеет смысла.

Основным недостатком такого способа борьбы с «проклятием размерности» является то, что как скалярная, так и диагональная спецификации не позволяют оценить эффекты перетекания волатильности между активами.

Кроме этого, наложение таких ограничений на параметры хотя и уменьшает число оцениваемых параметров, но, тем не менее, не позволяет добиться их линейного роста (см. табл. 1) относительно числа активов (примеры с другими моделями волатильности см. в (Ding, Engle, 2001)).

3.2. Таргетирование

Одной из причин «проклятия размерности» является то, что матрица свободного члена в уравнении волатильности должна быть положительно определена, т. к. это является достаточным условием положительной определенности матрицы волатильности. Положительно определенная матрица свободного члена получается путем перемножения нижнетреугольной матрицы на эту же транспонированную матрицу.

Неоспоримое преимущество такой параметризации в том, что она очень простая. Недостатком же является необходимость оценить $n(n+1)/2 = O(n^2)$ параметров.

Одним из решений данной проблемы является таргетирование. Впервые об этом способе было упомянуто в (Engle, 2002), наиболее структурированное определение таргетирования содержится, по мнению автора, в (Caporin, McAleer, 2012). Согласно этому определению, многомерная модель таргетирована, если выполнены следующие два условия:

1) свободный член в уравнении волатильности может быть записан как явная функция долгосрочной ковариационной матрицы;

2) долгосрочная ковариационная матрица может быть заменена на ее состоятельную оценку, основанную на выборочной ковариационной матрице.

Под долгосрочной ковариационной матрицей подразумевается математическое ожидание матрицы волатильности, вычисленное в предположении о ее стационарности.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий данное определение. Пусть имеется скалярная спецификация модели BEKK:

$$\Sigma_t = CC' + a^2 y_{t-1} y'_{t-1} + b^2 \Sigma_{t-1}.$$

Предполагая, что условия стационарности для матрицы волатильности выполнены, имеем:

$$\mathrm{E}\left(\Sigma_t\right) = \mathrm{E}\left(\Sigma_{t-1}\right) = \mathrm{E}\left(y_{t-1} y'_{t-1}\right), \text{ тогда } CC' = \mathrm{E}\left(\Sigma_t\right)\left(1 - a^2 - b^2\right) = \bar{\Sigma}\left(1 - a^2 - b^2\right),$$

где $\bar{\Sigma}$ — выборочная ковариационная матрица.

Очевидно, что с помощью таргетирования в данной модели удалось избавиться от квадратичного роста числа параметров.

Для общей BEKK выразить CC' напрямую через выборочную ковариационную матрицу не удается. Таргетированная спецификация этой модели выглядит так (Caporin, McAleer, 2012):

$$\Sigma_t = \bar{\Sigma} + A(y_{t-1} y'_{t-1} - \bar{\Sigma})A' + B\left(\Sigma_{t-1} - \bar{\Sigma}\right)B'. \qquad (12)$$

Если матрицы A и B являются произвольными, то «проклятие размерности» остается. Для диагональной и скалярной спецификаций проблема квадратичного роста числа параметров решена.

Несмотря на то что вычислительная сложность процесса оценки данной модели существенно снижена после таргетирования, она продолжает быть высокой из-за необходимости выполнения условия положительной определенности матрицы волатильности (Caporin, McAleer, 2012). В общей модели BEKK это условие весьма нетривиально: матрица $\bar{\Sigma} - A\bar{\Sigma}A' - B\bar{\Sigma}B'$ должна быть положительно определена. Это условие выполнено, если собственные числа данной матрицы положительны. Для сравнения: в скалярной BEKK положительная определенность матрицы волатильности достигается при выполнении условия $a^2 + b^2 < 1$.

Кроме этого, существуют модели, в которых применение описанного алгоритма таргетирования не позволяет избавиться от «проклятия размерности», поскольку оно имеет другие причины. Примерами являются модели GO-GARCH, CCC и DCC. В этих случаях можно применять алгоритм «псевдотаргетирования», в котором замена свободного члена не связана с долгосрочной ковариационной матрицей. Но для вышеперечисленных моделей такое действие не позволяет избавиться от квадратичного (по числу активов в портфеле) роста параметров.

3.3. Применение пространственных матриц

Выше были рассмотрены два способа уменьшения числа параметров в многомерных моделях волатильности — введение ограничений и таргетирование. Однако с помощью этих способов не всегда можно добиться линейного роста числа параметров относительно числа активов в портфеле.

В данном подразделе показано, как, применяя пространственные матрицы, избавиться от «проклятия размерности» в моделях BEKK, GO-GARCH и CCC. За подробным изложением статистических основ пространственной эконометрики рекомендуется обратиться к монографиям (Arbia, 2006) и (LeSage, Pace, 2009).

3.3.1. Пространственная матрица

Пространственной матрицей называется матрица вида:

$$P = \sum_{i=0}^{h} P_i W_i = P_0 + P_1 W_1 + \ldots + P_h W_h, \tag{13}$$

где P_i — диагональная $(n \times n)$-матрица параметров, W_i — весовая матрица, заданная экзогенно, причем $W_0 = I_n$, h — порядок пространственной матрицы. Подробное описание свойств пространственных матриц см. в (Caporin, Paruolo, 2012, 2009). Данный вид матриц широко применяется во многих моделях пространственной эконометрики, в частности, в пространственной авторегрессионной модели, или SAR(h)[2]. Весовая матрица W_i отображает связи исследуемых объектов в рассматриваемом пространстве и степень их близости или удаленности. Описание весовой матрицы, используемой в данной статье, приводится в разделе 4. Пример применения пространственной авторегрессии с различными видами весовых матриц можно найти в (Балаш и др., 2011).

В дальнейшем при моделировании многомерной волатильности будем применять пространственные матрицы первого порядка вида $P = P_0 + P_1 W_1$. Кроме этого, будет использоваться пространственная матрица специального вида, которая получается при вычислении вариационно-ковариационной матрицы пространственного авторегрессионного процесса. Пусть u — пространственный авторегрессионный процесс первого порядка:

$$u = P_1 W_1 u + \varepsilon, \text{ или } u = \varepsilon \left(I_n - P_1 W_1\right)^{-1} = \varepsilon P^{-1},$$

где $\varepsilon \sim \mathrm{iid}(0, V)$, V — диагональная положительно определенная матрица. Тогда матрица ковариаций u равна:

[2] Подробное описание пространственной авторегресии выходит за рамки данной статьи, но отметим, что пространственная авторегрессия не связана с временной зависимостью и сформулирована для кросс-секционных данных (Arbia, 2006), обобщение пространственной авторегрессии для панельных данных см. (Elhorst, 2003).

$$P^{-1}V(P^{-1})'. \qquad (14)$$

Заметим, что здесь $P = I_n - P_1W_1$, т. е. $P_0 = I_n$. Далее такие матрицы будут обозначаться как $S = I_n - S_1W_1$, где S_1 — диагональная матрица. Матрица S обратима, если собственные числа S_1W_1 по модулю меньше единицы (Magnus, Neudecker, 2007).

Рассмотрим теперь спецификации моделей BEKK, GO-GARCH и CCC, включающие в себя пространственные матрицы.

3.3.2. Пространственная BEKK

Пространственная спецификация модели BEKK получается следующим образом (Caporin, Paruolo, 2012):

$$A = A_0 + A_1W, \ B = B_0 + B_1W, \qquad (15)$$

$$CC' = S^{-1}V(S^{-1})', \ S = I_n - S_1W, \qquad (16)$$

где A_0, B_0, A_1, B_1, S_1, V — диагональные матрицы (по определению пространственной матрицы), W — весовая матрица.

Пространственная BEKK требует выполнения тех же, что и в общей BEKK, условий для стационарности. В (Caporin, Paruolo, 2009) доказано, что матрица $CC' = S^{-1}V(S^{-1})'$ положительно определена, если элементы V положительны и S обратима.

Очевидно, что здесь число параметров равно $6n = O(n)$.

3.3.3. Пространственная GO-GARCH

Добиться линейного роста числа параметров в модели GO-GARCH можно, используя подход, примененный выше для модели BEKK. Для этого в матрице волатильности Σ_t (см. формулу (5)) заменим X на S^{-1}. Тогда матрица волатильности примет вид:

$$\Sigma_t = S^{-1}V(S^{-1})', \ S = I_n - S_1W. \qquad (17)$$

Любопытно, что в данном случае Σ_t представляет собой ковариационную матрицу пространственного авторегрессионного процесса первого порядка. Матрицы A и B заменим пространственными матрицами:

$$A = A_0 + A_1W, \ B = B_0 + B_1W.$$

Очевидно, что число оцениваемых коэффициентов для данной параметризации равно $6n = O(n)$ (или $5n$ для таргетированной модели), что избавляет модель от «проклятия размерности».

Заметим, что здесь матрица волатильности Σ_t является положительно определенной, если S обратима. Условия стационарности остаются теми же, что и для общей спецификации.

3.3.4. Пространственная CCC

Аналогичным образом заменим матрицы A и B в модели CCC:

$$A = A_0 + A_1W, \ B = B_0 + B_1W.$$

При этом матрицу постоянных условных корреляций R положим равной $D^{-1/2}S^{-1}V(S^{-1})'D^{-1/2}$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой находятся диагональные элементы матрицы $S^{-1}V(S^{-1})'$. Подробное доказательство стационарности и положительной определенности параметризованной таким образом матрицы волатильности приведено в (Caporin, Paruolo, 2009).

Число параметров в модели можно менять, исходя из предположения о равенстве некоторых параметров для активов, имеющих общий признак (например, для акций фирм, принадлежащих одной отрасли экономики), или для всех исследуемых активов. В первом случае полученная спецификация носит название однородной в группах и содержит $3(n+k)$ параметров, где k — число групп (в примере выше, группы — это отрасли экономики). Во втором случае число параметров снижается до $3(n+1)$. Ограничения параметров касаются только матриц A_1, B_1, S_1, матрицы A_0, B_0 остаются неоднородными. Это вызвано теми же причинами, что и отказ от замены на скаляр свободного члена c в уравнениях (6) и (9).

В таблице 1 представлено число параметров в рассматриваемых моделях (в последних трех строках описаны пространственные спецификации). Единственная таргетированная модель — это BEKK, т. к. только в этой модели за счет таргетирования можно добиться линейного роста числа параметров (ее пространственные спецификации не таргетированы). Остальные модели приведены без таргетирования.

Таблица 1. Число параметров в различных спецификациях моделей BEKK, GO-GARCH и CCC

Спецификация	BEKK(p, q, K)	GO-GARCH	CCC
Общая	$n^2(p+q)K$	$n(n-1)/2+3n$	$n+2n^2+n(n+1)/2$
Диагональная	$n(p+q)K$	—	$3n+n(n+1)/2$
Скалярная	$(p+q)K$	$n(n-1)/2+n+2$	$n+2+n(n+1)/2$
Неоднородная	$6n$	$6n$	$7n$
Однородная в k группах	$3n+3k$	$3n+3k$	$4n+3k$
Однородная	$3n+3$	$3n+3$	$4n+3$

Из таблицы 1 видно, что устранить «проклятие размерности», т. е. добиться линейного роста числа параметров по числу активов в портфеле, удается во всех пространственных спецификациях и таргетированных диагональной и скалярной BEKK.

4. Результаты эконометрического исследования

Оценка различных спецификаций трех моделей произведена на американских данных, взятых с сайта Yahoo! Finance[3]. Рассматриваемый период — с 03.01.11 по 21.02.14 (всего 789 наблюдений). В качестве активов портфеля взяты акции двадцати американских компаний. Все выбранные акции входят в расчетную базу индекса S&P 500. Список компаний представлен в Приложении 1.

3 http://finance.yahoo.com/.

Оценивание вышеперечисленных моделей волатильности проводится методом квазимаксимального правдоподобия (QML). Функция логарифма правдоподобия $\mathcal{L}$ для перечисленных моделей типа MGARCH имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log(\det\Sigma_t) + y_t'\Sigma_t^{-1}y_t\right), \qquad (18)$$

где $\det\Sigma_t$ — определитель матрицы Σ_t (подробнее см. (Engle, Kroner, 1995) или (Bollerslev, 1990)). Оценки, полученные таким методом, состоятельны и асимптотически нормальны, но требуют модифицированного расчета стандартных ошибок (см., например, (Greene, 2003)).

Для оценки условного математического ожидания логарифмических доходностей $\mathrm{E}\left(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$ в статье используется модель ARMA(p, q), что эквивалентно диагональной векторной авторегрессии. Параметры p и q найдены с помощью информационного критерия Шварца. Рассмотрено семь спецификаций, в которых параметры p и q меняются в диапазоне от 0 до 2. Для двенадцати активов наилучшей, с точки зрения критерия Шварца, является модель ARMA(0,0), для семи — модель ARMA(1,1) и для одной — модель ARMA(1,0).

В Приложении 2 приведена описательная статистика для процесса y_t. Описательная статистика включает в себя такие показатели, как минимум, максимум, среднее значение, первый, второй и третий квартили, стандартное отклонение, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Критерием для построения весовой матрицы W_i служит принадлежность компании к одной из пяти отраслевых групп Глобального стандарта классификации отраслей (ГСКО)[4]: нефтегазовая, банковская, информационные технологии, коммунальные услуги и машиностроение, по четыре компании в каждой группе. Согласно данному критерию строится весовая матрица, диагональные элементы которой равны нулю, а недиагональные элементы вычисляются по следующему правилу:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in A \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin A \end{cases}, \qquad i \neq j, \qquad (19)$$

где A — критерий (в данном случае, принадлежность к отраслевой группе). При оценке пространственной авторегрессии каждая строка матрицы нормируется на сумму элементов этой строки для удобства интерпретации результатов оценки (Балаш и др., 2011).

В таблице 2 представлены результаты внутривыборочного сравнения шести спецификаций трех рассматриваемых моделей волатильности. Сравнение осуществлено с помощью информационного критерия Шварца. Значения логарифма функции правдоподобия и информационного критерия Акаике представлены в Приложении 3. Курсивом выделены наименьшие значения критерия.

Видно, что для каждой модели лучшей, с точки зрения информационного критерия Шварца, является наиболее простая скалярная спецификация.

4 Подробнее про ГСКО см. http://www.msci.com/.

Таблица 2. Значения информационного критерия Шварца для различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC

Спецификация	BEKK(1,1,1)	GO-GARCH	CCC
Общая	–103541.29	–105309.71	–95788.84
Диагональная	–106797.60	—	–105215.32
Скалярная	*–106964.12*	*–105671.59*	*–105447.86*
Неоднородная	–105970.16	–39841.86	–93979.20
Однородная в *k* группах	–106120.03	–37856.39	–102524.06
Однородная	–106191.61	–37759.55	–104876.72

Для сравнения прогнозной силы различных спецификаций выбранных моделей в данной статье применяется тест Diebold–Mariano (Diebold, Mariano, 1995) для попарного сравнения моделей с применением некоторой функции потерь g. Нулевая гипотеза заключается в том, что обе модели прогнозируют одинаково хорошо. В зависимости от выбранной функции потерь знак тестовой статистики позволяет делать вывод в пользу одной из сравниваемых моделей (подробности см. в (Diebold, Mariano, 1995)).

В настоящей работе используются стандартные функции потерь для многомерных моделей, взятые из (Laurent et al., 2012):

$$g_1 = \mathrm{tr}\left(\left(\Sigma_t - \widehat{\Sigma}_t\right)'\left(\Sigma_t - \widehat{\Sigma}_t\right)\right), \tag{20}$$

$$g_2 = \mathrm{tr}\left(\widehat{\Sigma}_t^{-1}\Sigma_t\right) - \log\left(\det\left(\widehat{\Sigma}_t^{-1}\Sigma_t\right)\right) - n, \tag{21}$$

$$g_3 = \frac{1}{6}\mathrm{tr}\left(\Sigma_t^3 - \widehat{\Sigma}_t^3\right) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\widehat{\Sigma}_t^2\left(\Sigma_t - \widehat{\Sigma}_t\right)\right), \tag{22}$$

где Σ_t означает истинное значение условной ковариационной матрицы, $\widehat{\Sigma}_t$ — ее прогноз. Первая функция потерь g_1 представляет собой норму Фробениуса и эквивалентна среднеквадратической ошибке для матриц, вторая функция потерь g_2 «налагает штраф» за недооценку прогнозной величины, а третья функция потерь g_3 «налагает штраф» за переоценку прогнозной величины.

Поскольку истинное значение условной ковариационной матрицы неизвестно, то в качестве Σ_t используется выборочная вариационно-ковариационная матрица, вычисленная методом скользящего окна, ширина окна — двадцать периодов.

Статистики теста Diebold–Mariano для функции потерь g_1 приведены в Приложении 4 (статистики для g_2 и g_3 опущены). Они позволяют сравнивать прогнозную силу различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC. Например, первый блок таблицы в Приложении 4 показывает, что общая спецификация BEKK обладает большей прогнозной силой, чем все три пространственные спецификации. При этом диагональная и скалярная BEKK предсказывают волатильность так же хорошо, как и пространственные спецификации. Кроме этого, видно, что более сложная неоднородная пространственная спецификация лучше, чем однородная в группах и однородная. Для остальных пар спецификаций модели BEKK нулевая гипотеза о равенстве прогнозной силы не отклоняется на 5%-ном уровне значимости.

Для данного исследования наибольший интерес представляет сравнение пространственных спецификаций с непространственными. В таблице 3 показана доля случаев (в %), когда пространственные спецификации превосходят, равны и проигрывают по прогнозной силе непространственным спецификациям.

Таблица 3. Сравнение прогнозной силы различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC с помощью теста Diebold–Mariano

	g_1	g_2	g_3	Среднее
Пространственные спецификации *превосходят* непространственные	13%	36%	12.5%	20%
Равенство (на 5%-ном уровне) прогнозной силы пространственных и непространственных спецификаций	44%	35%	48.5%	43%
Пространственные спецификации *проигрывают* непространственным	43%	29%	39%	37%

Из таблицы 3 видно, что в случае симметричной функции потерь (g_1) пространственные спецификации превосходят непространственные в 13% случаев, а именно при сравнении общей CCC и пространственных BEKK, общей CCC и GO-GARCH, непространственных и пространственных CCC.

Другими словами, в случае симметричных потерь для модели CCC предпочтительнее использовать пространственные спецификации. Если же функция потерь «налагает штраф» за недооценивание (g_2), то пространственные спецификации лидируют в большинстве случаев (36%). А при функции потерь, «штрафующей» переоценивание (g_3), пространственные спецификации дают лучшие результаты в тех же случаях, что и при использовании g_1.

Заключение

В статье рассмотрена задача оценки многомерной волатильности портфеля из двадцати американских акций, входящих в базу индекса S&P500 и принадлежащих к пяти различным отраслям экономики.

Для оценки были использованы три многомерные модели волатильности: BEKK, GO-GARCH и CCC. Выбор моделей неслучаен, т. к. эти три модели принадлежат к разным типам многомерных моделей волатильности типа GARCH. Для каждой модели были сформулированы шесть спецификаций: общая, диагональная, скалярная и три пространственных (неоднородная, однородная в группах и однородная).

Спецификации каждой модели сравнивались с помощью информационных критериев Акаике и Шварца, точность прогноза всех спецификаций всех моделей сравнивалась попарно при помощи теста Diebold–Mariano.

Согласно информационному критерию Шварца, лучшими оказались такие спецификации, как скалярная BEKK, GO-GARCH и скалярная CCC.

При вневыборочном сравнении при помощи теста Diebold–Mariano нулевая гипотеза о равенстве прогнозной силы была отклонена в пользу пространственных спецификаций в среднем в 20% случаев, не отклонена в 43% случаев и отклонена в пользу непространственных спецификаций в среднем в 37% случаев. С точки зрения прикладного анализа, если в решаемой задаче функция потерь асимметрична и «штрафует» недооценивание, то, согласно результатам данного исследования, пространственные спецификации дают более точный прогноз, чем непространственные. В случае симметричных потерь пространственные спецификации предпочтительнее использовать для модели CCC, в остальных моделях более точный прогноз дают непространственные спецификации.

Примечательно то, что тест Diebold–Mariano позволяет применять функции потерь более общего вида, которые дают возможность учесть не только статистическую ошибку прогноза, но и экономические потери. Одной из перспектив развития данной работы является сравнение различных спецификаций моделей волатильности с применением функций потерь, которые учитывают не только статистическую ошибку, но также доходность и риск портфеля, составленного на основе оцененной волатильности, финансовый результат инвестиционной стратегии, эффективность операций хеджирования и т. д. (Пеникас, 2011; Хабров, 2012).

Данную работу также можно продолжать и в других направлениях. Первое — это оценка так называемых пространственных спилловеров волатильности, или эффектов перетекания волатильности между активами портфеля с учетом критерия, например, принадлежности акции к некоторой отрасли экономики, размера фирмы-эмитента и т. д. Это осуществляется путем построения весовой матрицы, соответствующей критерию. Эффекты перетекания позволяют установить, как формируется волатильность портфеля, одинаковы или различны вклады в волатильность акций, принадлежащих одной группе (например одной отрасли экономики).

Кроме этого, пространственные матрицы, применяемые в многомерных моделях волатильности, позволяют разделить передачу волатильности на два типа: прямую — через условные дисперсии, и косвенную — через условные ковариации (Bauwens et al., 2006). Статистическая значимость параметров, отвечающих за косвенную передачу волатильности, позволяет понять, насколько важна условная ковариация в формировании волатильности портфеля.

Второе направление исследования — это вывод пространственных спецификаций для других многомерных моделей волатильности, а именно моделей динамической корреляции DCC и эквикорреляции DECO, моделей стохастической и реализованной волатильности. Это позволит, с одной стороны, устранить «проклятие размерности» в этих моделях, а с другой — учесть при оценивании эффекты перетекания волатильности с учетом выбранного критерия.

Список литературы

Балаш В. А., Балаш О. С., Харламов А. В. (2011). Эконометрический анализ геокодированных данных о ценах на жилую недвижимость. *Прикладная эконометрика*, 22 (2), 62–77.

Пеникас Г. И. (2011). Модели «копула» в задачах хеджирования ценового риска. *Прикладная эконометрика*, 22 (2), 3–21.

Хабров В. В. (2012). Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе моделей векторных авторегрессий и моделей многомерной волатильности. *Прикладная эконометрика*, 28 (4), 35–62.

Alexander C., Chibumba A. (1996). Multivariate orthogonal factor GARCH. *University of Sussex Discussion: Papers in Mathematics*.

Arbia G. (2006). *Advances in spatial science: Statistical foundations and applications to regional convergence*. Springer.

Asai M., McAleer M., Yu J. (2006). Multivariate stochastic volatility: A review. *Econometric Reviews*, 25, 145–175.

Bauer G. H., Vorkink K. (2011). Forecasting multivariate realized stock market volatility. *Journal of Econometrics*, 160, 93–101.

Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21, 79–109.

Bera A. K., Kim S. (2002). Testing constancy of correlation and other specifications of the BGARCH model with an application to international equity returns. *Journal of Empirical Finance*, 9, 171–195.

Bollerslev T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (3), 307–327.

Bollerslev T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, 72, 498–505.

Bollerslev T., Engle R. F., Wooldridge J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96, 116–131.

Caporin M., Paruolo P. (2009). Structured multivariate volatility models. *«Marco Fanno» Working Papers 0091*, Dipartimento di Scienze Economiche «Marco Fanno».

Caporin M., Paruolo P. (2012). Proximity-structured multivariate volatility models. http://ssrn.com/abstract=1406419.

Caporin M., McAleer M. (2012). Do we really need both BEKK and DCC? A tale of two multivariate GARCH models. *Journal of Economic Surveys*, 26, 736–751.

Christodoulakis G. A., Satchell S. E. (2002). Correlated ARCH: Modelling the time-varying correlation between financial asset returns. *European Journal of Operations Research*, 139, 351–370.

De Santis G., Gérard B. (1998). How big is the premium for currency risk? *Journal of Financial Economics*, 49, 375–412.

Diebold F. X., Mariano R. S. (1995). Comparing predictive accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, 253–263.

Ding Z., Engle R. F. (2001). Large scale conditional covariance modelling, estimation and testing. *Academia Economic Papers*, 29, 157–184.

Elhorst J. P. (2003). Specification and estimation of spatial panel data models. *International regional science review*, 26 (3), 244–268.

Engle R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20 (3), 339–350.

Engle R. F., Kelly B. (2012). Dynamic equicorrelation. *Journal of Business and Economic Statistics*, 30, 212–228.

Engle R. F., Kroner K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11, 122–150.

Fiorentini G., Sentana E., Shephard N. (2004). Likelihood-based estimation of latent generalized ARCH structures. *Econometrica*, 72, 1481–1517.

Greene W. (2003). *Econometric analysis*. *5th edition*. Pearson Education Inc., Upper Suddle River, New Jersey.

Jondeau E., Rockinger M. (2006). The copula-GARCH model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of International Money and Finance*, 25, 827–853.

Laurent S., Rombouts J. V. K., Violante F. (2012). On the forecasting accuracy of multivariate GARCH models. *Journal of Applied Econometrics*, 27, 934–955.

LeSage J. P., Pace K. (2009). *Introduction to spatial econometrics*. Taylor & Francis Group.

Magnus J. R., Neudecker H. (2007). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. *3rd edition*. John Wiley and Sons: Chichester/New York.

Pelletier D. (2003). Regime switching for dynamic correlations. *Journal of Econometrics*, 131, 445–473.

Riskmetrics (1996). *Riskmetrics technical document*, *4th edition*. J. P. Morgan, New York.

Tsay R. S. (2002). *Analysis of financial time series*. John Wiley, New York.

Tse Y. K., Tsui A. K. C. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 351–362.

Vrontos I. D., Dellaportas P., Politis D. N. (2003). A full-factor multivariate GARCH model. *Econometrics Journal*, 6, 311–333.

Weide R. (2002). GO-GARCH: A multivariate generalized orthogonal GARCH model. *Journal of Applied Econometrics*, 17 (5), 549–564.

Приложение 1. Список компаний

Тикер	Название компании	Отраслевая группа ГСКО
CVX	Chevron Corp.	Нефть и газ
XOM	Exxon Mobil Corp.	Нефть и газ
CHK	Chesapeake Energy	Нефть и газ
MUR	Murphy Oil	Нефть и газ
C	Citigroup Inc.	Банки
JPM	JPMorgan Chase & Co.	Банки
PBCT	People’s United Bank	Банки
STI	SunTrust Banks	Банки
CMS	CMS Energy	Коммунальные услуги
DTE	DTE Energy Co.	Коммунальные услуги
FE	FirstEnergy Corp	Коммунальные услуги
NRG	RG Energy	Коммунальные услуги
DHR	Danaher Corp.	Машиностроение
DOV	Dover Corp.	Машиностроение
ITW	Illinois Tool Works	Машиностроение
JOY	Joy Global Inc.	Машиностроение
CSCO	Cisco Systems	Информационные технологии
SYMC	Symantec Corp.	Информационные технологии
ORCL	Oracle Corp.	Информационные технологии
ADS	Alliance Data Systems	Информационные технологии

Приложение 2.
Описательная статистика логарифмических доходностей

Названия столбцов:
1 — Минимум
2 — 1-й квартиль
3 — Медиана
4 — Среднее
5 — 3-й квартиль
6 — Максимум
7 — Стандартное отклонение
8 — Коэффициент асимметрии
9 — Коэффициент эксцесса

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
CVX	–0.0804	–0.0618	–0.0244	–0.0002	0.0130	0.0691	0.0184	–0.13	4.03
XOM	–0.0571	–0.0427	–0.0140	0.0005	0.0148	0.0579	0.0170	0.01	3.53
CHK	–0.1815	–0.1463	–0.0758	0.0010	–0.0054	0.1003	0.0359	–0.38	4.03
MUR	–0.1103	–0.0817	–0.0247	–0.0009	0.0324	0.1179	0.0268	–0.05	3.98
C	–0.1937	–0.1533	–0.0727	–0.0001	0.0080	0.1290	0.0333	–0.10	4.92
JPM	–0.1409	–0.1101	–0.0485	–0.0001	0.0131	0.1055	0.0266	–0.07	5.15
PBCT	–0.0810	–0.0635	–0.0285	0.0007	0.0065	0.0590	0.0189	–0.23	3.51
STI	–0.1105	–0.0841	–0.0313	–0.0005	0.0215	0.1008	0.0308	–0.10	3.35
CMS	–0.0683	–0.0546	–0.0272	0.0001	0.0002	0.0414	0.0145	–0.26	3.62
DTE	–0.0613	–0.0485	–0.0228	–0.0001	0.0028	0.0413	0.0133	–0.02	3.56
FE	–0.0592	–0.0428	–0.0101	0.0009	0.0227	0.0718	0.0179	0.21	3.89
NRG	–0.0787	–0.0579	–0.0164	–0.0002	0.0252	0.0876	0.0249	0.10	3.40
DHR	–0.0823	–0.0626	–0.0233	0.0001	0.0160	0.0750	0.0204	–0.20	3.93
DOV	–0.0874	–0.0634	–0.0154	0.0003	0.0325	0.1045	0.0239	0.03	3.88
ITW	–0.1152	–0.0907	–0.0417	–0.0005	0.0073	0.0808	0.0206	–0.23	5.23
JOY	–0.1387	–0.1054	–0.0389	0.0004	0.0277	0.1275	0.0351	–0.20	3.76
CSCO	–0.1435	–0.1068	–0.0334	0.0000	0.0400	0.1502	0.0259	0.0314	6.76
SYMC	–0.1156	–0.0846	–0.0227	0.0004	0.0392	0.1321	0.0260	0.08	4.80
ORCL	–0.1276	–0.1040	–0.0570	–0.0004	–0.0100	0.0605	0.0252	–0.66	4.69
ADS	–0.0893	–0.0670	–0.0225	0.0010	0.0220	0.0888	0.0204	–0.03	3.93

Приложение 3

Таблица П1. Значения информационного критерия Акаике для различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC

Спецификация	BEKK(1,1,1)	GO-GARCH	CCC
Общая	*–107276.89*	–106477.08	–100598.42
Диагональная	–106984.38	—	–106476.08
Скалярная	–106973.46	*–106661.52*	*–106531.19*
Неоднородная	–106530.50	–40402.20	–94632.93
Однородная в k группах	–106474.92	–38206.61	–102967.66
Однородная	–106485.79	–38053.72	–105264.29

Примечание. Курсивом выделены минимальные значения.

Таблица П2. Значения логарифма функции правдоподобия для различных спецификаций моделей BEKK, GO-GARCH и CCC

Спецификация	BEKK(1,1,1)	GO-GARCH	CCC
Общая	*54438.44*	53488.54	51329.21
Диагональная	53532.19	—	*53508.04*
Скалярная	53488.73	*53542.76*	53497.59
Неоднородная	53385.25	20321.10	47456.46
Однородная в k группах	53313.46	19178.30	51578.83
Однородная	53305.90	19089.86	52715.14

Примечание. Курсивом выделены максимальные значения.

Приложение 4.
Статистика теста Diebold–Mariano для функции потерь g_1

	BEKK					GO-GARCH					CCC					
	2	3	4	5	6	1	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	–1.38	–1.37	–3.08**	–3.27**	–3.19**	–1.38	–1.46	–26.65**	–32.31**	–34.57**	–38.85**	–1.37	–1.40	0.78	–3.42**	–1.85
2		1.94*	0.50	0.26	0.25	–0.76	0.41	–23.88**	–29.44**	–31.44**	–38.6**	1.89	–0.12	0.94	–1.21	–3.96**
3			0.48	0.24	0.24	–1.63	0.27	–23.89**	–29.46**	–31.46**	–38.6**	–1.14	–1.76	0.94	–1.25	–3.91**
4				–3.39**	–2.88**	–0.50	–0.51	–25.69**	–31.34**	–33.51**	–38.77**	–0.49	–0.51	1.00	–2.97**	–1.32
5					–0.59	–0.27	–0.24	–25.52**	–31.17**	–33.32**	–38.75**	–0.24	–0.27	1.03	–2.53**	–1.18
6						–0.26	–0.23	–25.48**	–31.13**	–33.28**	–38.75**	–0.24	–0.26	1.03	–2.54**	–1.19
1							0.45	–23.87**	–29.43**	–31.43**	–38.6**	1.58	0.15	0.94	–1.19	–3.98**
3								–24.09**	–29.67**	–31.69**	–38.62**	–0.28	–0.51	0.95	–1.45	–2.99**
4									–63.86**	–87.35**	–39.46**	23.89**	23.91**	49.87**	25.26**	23.25**
5										–38.46**	–39.2**	29.45**	29.47**	53.46**	30.91**	28.79**
6											–39.04**	31.46**	31.48**	58.04**	33.05**	30.74**
1												38.6**	38.6**	39.84**	38.72**	38.54**
2													–1.59	0.94	–1.24	–3.92**
3														0.94	–1.23	–3.74**
4															–1.22	–1.07
5																–0.21

Примечание. **, * — значимость статистики на 2.5 и 5%-ном уровне соответственно.
Цифрами обозначены спецификации моделей: 1 — общая, 2 — диагональная, 3 — скалярная, 4 — неоднородная, 5 — однородная в группах, 6 — однородная.