

Б. А. Путко, А. С. Диденко, М. М. Дубовиков

# Модель волатильности обменного курса валют (RUR/USD), построенная на основе фрактальных характеристик финансового ряда

*В работе рассматривается регрессионная модель волатильности российского валютного рынка (RUR/USD). Используется декомпозиция волатильности на компоненты, характеризующие фрактальную структуру финансового ряда. С помощью регрессионного анализа подтверждается квазицикличность одной из компонент. Обсуждаются возможности прогноза динамики волатильности, в том числе прогноза перехода рынка в нестабильное состояние.*

**Ключевые слова:** валютный рынок; волатильность; фрактальные характеристики; прогноз нестабильных состояний.

**JEL classification:** C51; C53; F31.

## 1. Введение

Задача прогнозирования волатильности (от англ. volatility — изменчивость) является одной из актуальных проблем финансового рынка (эта тема занимает лидирующие позиции по индексу цитирования Thomson Reuters). Определенные параметры волатильности (обычно это стандартная дисперсия) в качестве важнейших характеристик явно или неявно входят практически во все динамические модели финансового рынка. Стоит отметить и непосредственное применение прогнозов участниками рынка при «торговле волатильностью».

Описание поведения различных моделей волатильности, основанных на стандартной дисперсии (ARCH и обобщенные ARCH модели), в том числе в период кризиса 2008 года, можно найти, например, в (Brownlees et al., 2012).

Возможность долгосрочных прогнозов основана на наличии у финансовых рядов длинной памяти (long memory). Под этим, в первую очередь, обычно подразумевают эффект кластеризации волатильности. Указанный эффект означает, что за сильными изменениями цены актива обычно следуют его сильные изменения, в то время как за слабыми изменениями обычно следуют слабые. Этот эмпирический факт впервые обнаружил Ю. Фама (Fama, 1965). Хорошо известно, что наличие длинной памяти тесно связано с фрактальной структурой рынка (Мандельброт, 2004; Петерс, 2004), которая проявляется в свойстве самоподобия: если сжать временную шкалу в  $h$  раз (перейти к другому масштабу), а ось ординат — в  $h^H$  раз, то гистограммы доходностей окажутся в среднем почти неразличимыми. Показатель  $H$  называется индексом Херста. Этот показатель непосредственно выражается через фрактальную размерность  $D$ :  $H = 2 - D$ . Для броуновского движения  $H = 0.5$ , в то время

как для реальных финансовых рядов индекс Херста отличен от 0.5. Если  $H > 0.5$ , то ряд называется персистентным (сохраняющим тенденцию), если  $H < 0.5$ , то ряд называется антиперсистентным. Большинство ценовых рядов являются персистентными.

При этом, если для надежного определения волатильности (например с использованием стандартной дисперсии) требуется несколько десятков значений, то для надежной оценки  $H$  (так же как и  $D$ ) необходимо несколько тысяч значений (см., например, (Федер, 1991)). Однако в работе (Dubovikov et al., 2004) были построены локальные фрактальные характеристики финансовых рядов, для надежного определения которых в действительности требуется примерно такое же количество данных, сколько и для определения волатильности.

В настоящей работе волатильность определяется с помощью локальных фрактальных характеристик, и затем на их основе строятся прогнозные эконометрические модели.

В разделе 2 под определенным углом зрения в свете волатильности воспроизведены некоторые результаты работ (Dubovikov et al., 2004) и (Дубовиков, Старченко, 2011).

В разделе 3 волатильность описывается в виде двух составляющих компонент, определяемых фрактальной структурой. С использованием очевидной квазипериодичности одной из компонент построена и протестирована регрессионная модель волатильности российского валютного рынка (RUR/USD).

В разделе 4 обсуждаются основные результаты модели и ее перспективы.

## 2. Динамические составляющие волатильности

Для моделирования волатильности используются величины, характеризующие фрактальную структуру рынка (Dubovikov et al., 2004). В качестве меры волатильности на промежутке длины  $\delta$  используется амплитуда

$$A(\delta) = h(\delta) - l(\delta),$$

где  $h$  — максимальная,  $l$  — минимальная цена актива (акции, индекса и т. д.) на промежутке.

Предполагается, что  $\delta \geq \delta_0 > 0$ , величину  $\delta_0$  принято называть минимальным масштабом. При этом существенно, что неявно предполагается непрерывность ценового процесса, т. е. ненулевая волатильность присутствует при любом сколь угодно малом минимальном масштабе.

Кратко процедура построения фрактальных функций заключается в следующем (подробнее см. (Дубовиков, Старченко, 2011)). Выбирается значение  $\delta_c = n\delta_0$ , где  $n$  — натуральное число. Величина  $\delta_c$  обычно называется характерным масштабом. В момент времени  $t$  рассматривается промежуток  $[t - \delta_c, t - \delta_0]$ . Пусть  $\delta$  — делитель характерного масштаба и кратное минимального масштаба. Тогда имеется  $\frac{\delta_c}{\delta}$  примыкающих промежутков. Сумма амплитуд на этих промежутках обозначается  $V(\delta)$ . Рассматривается регрессия

$$\log V(\delta) = \alpha - \mu \log(\delta). \quad (1)$$

В работах (Dubovikov et al., 2004) и (Дубовиков, Старченко, 2011) показано, что регрессия имеет очень высокий коэффициент детерминации (почти совпадающий с единицей) в достаточно широком диапазоне (авторы рассматривали отношение характерного и минимального масштаба от 8 до 1024), так что оценка  $\mu$  практически не зависит от выбора делителей,

и можно рассматривать динамические величины  $\mu(t, \delta_0, \delta_c)$  и  $\alpha(t, \delta_0, \delta_c)$ . Для удобства принимается, что  $\delta_0 = 1$  (в действительности, здесь важна лишь малость минимального масштаба относительно характерного), и динамические величины обозначаются  $\mu_{\delta_0}(t)$  и  $\alpha_{\delta_0}(t)$ .

Функция  $\mu$  (в отличие от  $\alpha$ ) не зависит от основания логарифма в равенстве (1) и является внутренней характеристикой фрактальной структуры финансового ряда. В работах (Dubovikov et al., 2004; Дубовиков, Старченко, 2011) показано, что при стремлении минимального масштаба к нулю величина  $\mu$  стремится к  $D - 1$ , где  $D$  — фрактальная размерность случайного процесса цен.

В цитируемых выше работах Дубовикова и Старченко исследуется связь поведения ценового ряда с поведением функций  $\mu(t)$ ,  $\alpha(t)$ . В частности, там показано, что вхождение ценового ряда в тренд в большинстве случаев сопровождается падением функции  $\mu(t)$ . Напротив, рост  $\mu(t)$  происходит при переходе ряда из тренда во флэт. Рост функции  $\alpha(t)$  сопровождается ростом волатильности на промежутке минимального масштаба.

Эти результаты также можно пояснить следующим образом. Вследствие очень высокого коэффициента детерминации регрессии (1) можно использовать упрощенные оценки параметров  $\mu_0$ ,  $\alpha_0$  (в предположении  $\delta_0 = 1$ ):

$$\mu_s = \log_{\delta_c} V(\delta_0) - \log_{\delta_c} V(\delta_c), \quad \alpha_s = \log_{\delta_c} V(\delta_0), \quad (2)$$

что дает разложение волатильности на характерном масштабе:

$$\log_{\delta_c} V(\delta_c) = \alpha_s - \mu_s \approx \alpha - \mu. \quad (3)$$

Как видно, рост  $\alpha(t)$  и падение  $\mu(t)$  приводят к росту волатильности на характерном масштабе. Особенно ярко этот эффект проявляется на временных промежутках, где происходит одновременно рост  $\alpha(t)$  и падение  $\mu(t)$ .

Формула (3) позволяет назвать функции  $\alpha(t)$  и  $\mu(t)$  динамическими составляющими волатильности. Прогнозирование направлений роста функций  $\alpha(t)$  и  $\mu(t)$  одновременно является прогнозом изменения волатильности. Настоящая работа посвящена именно этой задаче. Для дальнейшего построения прогнозов рассматривается моделирование составляющих с помощью оценочных функций  $\hat{\mu}(t)$ ,  $\hat{\alpha}(t)$ .

### 3. Прогнозирование тенденций поведения составляющих волатильности

В статье рассматриваются недельные данные, т. е. в качестве минимального масштаба выбирается неделя. В качестве характерного масштаба берется  $\delta_c = 32$ . История валютного рынка рассматривается начиная с января 1999 г., т. е. сразу после дефолта 1998 г. Данные взяты из Bloomberg<sup>1</sup>. Всего временной ряд содержит 817 наблюдений.

#### 3.1. Моделирование функции $\mu(t)$

Функция  $\mu(t)$  имеет достаточно четко выраженную квазициклическую структуру (рис. 1). Следует заметить, что на качественном уровне квазициклическость фрактальных характеристик отмечалась и обсуждалась многими авторами (Мандельброт, 2004; Петерс, 2004).

<sup>1</sup> Данные доступны по запросу у авторов.

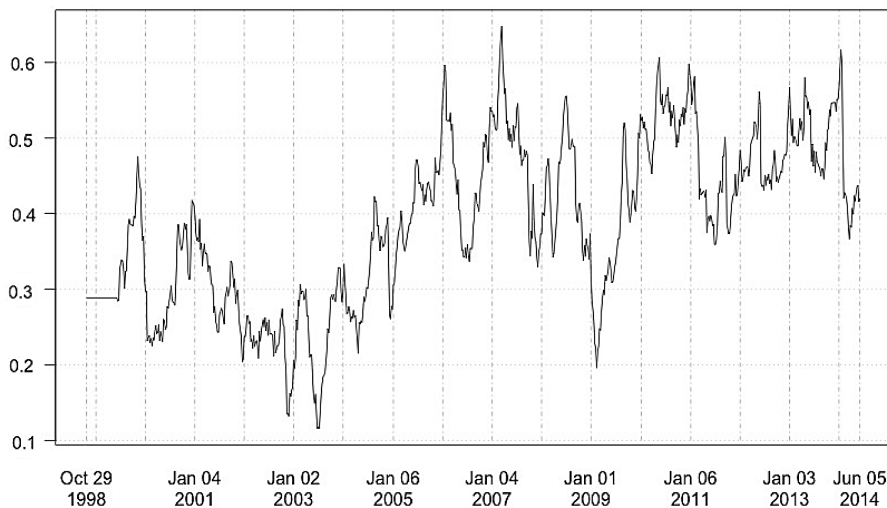


Рис. 1. График функции  $\mu(t)$

Для построения оценочной функции  $\hat{\mu}(t)$  используются регрессионные модели. При этом в силу квазицикличности в качестве регрессоров естественно использовать компоненты ряда разложения Фурье. Регрессию можно рассматривать на любом отрезке  $[T_0, T_1]$  временного ряда, таким образом, явный вид функции  $\hat{\mu}(t)$ , вообще говоря, зависит от двух параметров — значения  $t = T_1$  (момент построения оценочной функции) и  $n = T_1 - T_0$  (число используемых для регрессионной модели предшествующих наблюдений). Для прогнозирования необходимо определиться с выбором  $n$ . Это будет сделано несколько позже, а пока приведем общий алгоритм построения оценочной функции.

1. Для выбранных значений  $T_1, n$  рассматривается однопараметрическое семейство уравнений:

$$\mu(t) = c + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \cos(\omega t) + \varepsilon_\omega(t), \quad (4)$$

где частота  $\omega$  пробегает значения от 0 до 0.1 с шагом 0.0001.

2. Для каждого значения  $\omega$  уравнение (4) оценивается обычным методом наименьших квадратов (Магнус и др., 2007), и определяется функция  $R^2(\omega)$  — коэффициент детерминации регрессии (4).

3. Определяются точки максимума функции  $R^2(\omega)$ . Как правило, они достаточно ярко выражены (типичный график функции  $R^2(\omega)$  изображен на рис. 2).

Наименьшая точка максимума, в которой достигается наибольшее значение коэффициента детерминации — это главная, трендовая частота. Кроме нее, имеются частоты квазициклов — обычно их три–четыре.

Важно отметить, что при больших  $n$  (например  $n \geq 480$ ) картина, изображенная на рис. 2, качественно не меняется при изменении  $t = T_1$  на довольно продолжительных отрезках времени, что подтверждает квазицикличность структуры. В то же время при некоторых значениях  $t = T_1$  происходят фазовые переходы: главная трендовая частота раздваивается с последующим «перетеканием» — затуханием исходного «горба» и нарастанием нового.

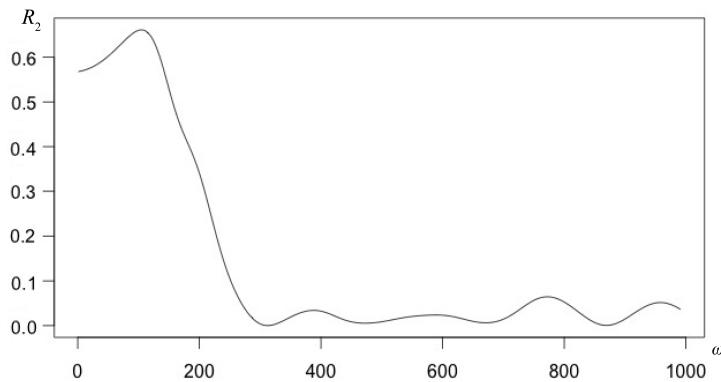


Рис. 2. Коэффициент детерминации уравнения (4) для различных частот

4. Для точек максимума  $\omega_1, \dots, \omega_k$  уравнение

$$\mu(t) = c + \sum_{i=1}^k [a_i \sin(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)] + \varepsilon(t)$$

оценивается обычным методом наименьших квадратов.

Полученная при этом функция  $\hat{\mu}(t)$

$$\hat{\mu}(t) = \hat{c} + \sum_{i=1}^k [\hat{a}_i \sin(\omega_i t) + \hat{b}_i \cos(\omega_i t)] \quad (5)$$

является оценочной и используется для дальнейших прогнозов.

Для примера приведем вид оценочной функции для значения  $T_1$ , соответствующего дате 6 июня 2014 г.;  $n = 817$  (история наблюдений начинается сразу после дефолта 1998 г.):

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t) = & 0.3873 - 0.0702 \sin(0.0058t) - 0.0724 \cos(0.0058t) - 0.0217 \sin(0.0124t) + \\ & + 0.010 \cos(0.0124t) + 0.0450 \sin(0.0190t) + 0.0191 \cos(0.0190t) - \\ & - 0.0288 \sin(0.0277t) - 0.0148 \cos(0.0277t) - 0.0393 \sin(0.0957t) - \\ & - 0.0062 \cos(0.0957t); \end{aligned}$$

$$R^2 = 0.72.$$

Как видно, коэффициент детерминации достаточно большой, что подтверждает выраженность квазипериодической структуры.

*Замечание.* Авторы не включали в (5) члены с частотами, при которых и синус и косинус оказывались незначимыми на 5%-ном уровне. Для задачи прогнозирования это несущественно.

### 3.2. Моделирование функции $\alpha(t)$

График функции  $\alpha(t)$  имеет вид, приведенный на рис. 3.

Видно, что функция  $\alpha(t)$  имеет значительно протяженные промежутки почти линейных трендов. Это согласуется с концепцией кластеризации волатильности. Наиболее удобным

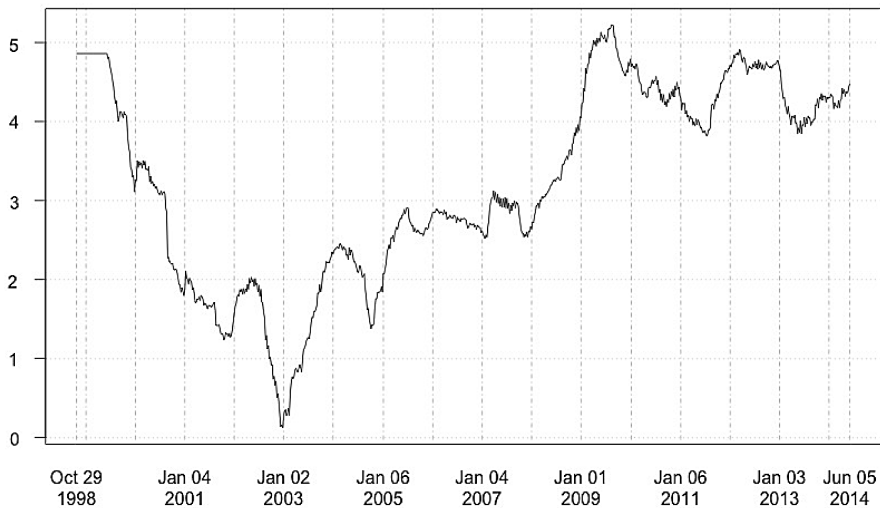


Рис. 3. График функции  $\alpha(t)$

инструментом для получения оценочной функции  $\hat{\alpha}(t)$  и последующего прогноза оказывается использование широко распространенного индикатора технического анализа Zig-Zag, впервые нестрого сформулированного в (Achelis, 1986), формальное описание которого можно найти, например, в (Azzini et al., 2010).

Оценочная функция  $\hat{\alpha}(t)$  представляет собой ломаную, состоящую из отрезков прямой, соединяющих точки разворота (точки изломов). Алгоритм нахождения точек разворота следующий.

Начальной точкой разворота является точка  $T_0$  — левая точка интервала моделирования.

Если  $t_{k-1}$  есть точка разворота, то точка разворота  $t_k$  — ближайшая справа к  $t_{k-1}$  точка, удовлетворяющая следующим двум условиям:

а) изменение  $\alpha(t)$  после точки  $t_k$  происходит в направлении, противоположном наклону отрезка  $[\alpha(t_{k-1}), \alpha(t_k)]$ ;

б) изменение  $\alpha(t)$  после точки  $t_k$  до ближайшего экстремума справа превышает величину  $p|\alpha(t_k)|$ , где  $p$  — выбранное значение (параметр индикатора Zig-Zag). Стандартно  $p = 0.05$ . Это значение и используется авторами, хотя схожие результаты получаются в относительно широком диапазоне значений  $p$ .

Завершается построение оценочной функции отрезком, соединяющим самую правую точку разворота  $(t_m, \alpha(t_m))$  с точкой  $(T_1, \alpha(T_1))$ .

Назовем интервал  $(t_m, T_1)$  *предпрогнозным*.

### 3.3. Прогнозирование

Прогнозируется направление изменения функций  $\mu(t)$ ,  $\alpha(t)$  на будущих отрезках длины  $l$ , т.е. знаки  $\mu(T_1 + l) - \mu(T_1)$  и  $\alpha(T_1 + l) - \alpha(T_1)$ . Как следует из результатов, сформулированных в разделе 2, направления изменений этих функций являются индикатором характера поведения волатильности.

В качестве прогнозных значений знаков изменений функций  $\mu(t)$ ,  $\alpha(t)$  естественно считать знаки изменений оценочных функций  $\hat{\mu}(t)$ ,  $\hat{\alpha}(t)$ . Продолжение оценочных функций на интервал прогнозирования осуществляется следующим образом:

а) функция  $\hat{\mu}(t)$  имеет явный аналитический вид, в который подставляются будущие значения;

б) функция  $\hat{\alpha}(t)$  продолжается на интервал прогнозирования продолжением прямой отрезка на предпрогножном интервале.

Как было отмечено ранее, явный вид оценочной функции  $\hat{\mu}(t)$  зависит от величины  $n = T_1 - T_0$  — числа используемых предыдущих наблюдений. В работе было выбрано значение, равное 480. Это соответствует результатам (Дубовиков, Старченко, 2011) — регрессия (1) примерно до таких масштабов имеет коэффициент детерминации, близкий к единице. Такой выбор является в определенной мере произвольным — при не очень больших вариациях значений  $n$  результаты практически не изменяются.

### 3.4. Тестирование модели

Бэктест модели осуществлялся следующим образом. Ширина окна выбиралась равной 480. В качестве первой начальной точки бралось первое наблюдение, затем окно смещалось с шагом 4 (меньший шаг, очевидно, не имеет смысла рассматривать, поскольку при таких малых смещениях картина практически не меняется). Сравнивались тренды прогнозируемых и наблюдаемых функций  $\mu(t)$  и  $\alpha(t)$  на будущих отрезках длин 4, 8, 16, 32, 48. Тренды считались согласованными, если имели одинаковые знаки приращения функций. Результаты бэктеста приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Результаты бэктеста модели

	Горизонт прогнозирования				
	4	8	16	32	48
Доля согласованных трендов $\mu$	0.603	0.603	0.589	0.543	0.500
Доля согласованных трендов $\alpha$	0.809	0.735	0.691	0.647	0.618
Доля согласованных трендов $\alpha$ и $\mu$	0.515	0.500	0.411	0.338	0.249

Для проведения бэктестов были использованы оригинальные программы в среде R-project<sup>2</sup>.

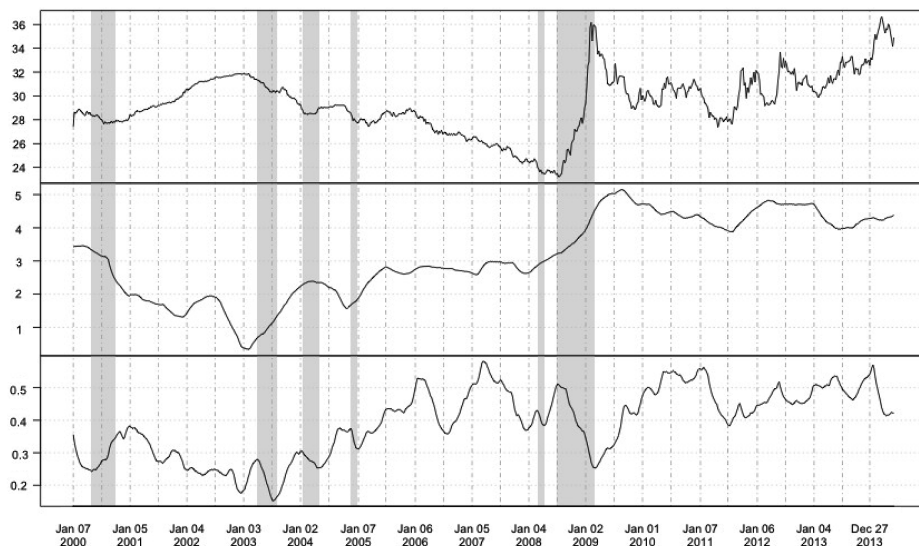
### 3.5. Прогнозирование перехода рынка в нестабильное состояние

Особый интерес представляет переход рынка в нестабильное состояние, которое характеризуется резким ростом волатильности на характерных масштабах. Из равенства (3) следует, что рост  $\alpha$  и падение  $\mu$  (особенно на временных промежутках значительной длины) вызывают именно этот эффект (рис. 4). Назовем такие временные промежутки участками

<sup>2</sup> Коды соответствующих программ доступны по запросу у авторов.

когерентного разрыва волатильности для того, чтобы отличать их от периодов, когда рост волатильности связан либо только с ростом  $\alpha$ , либо только с падением  $\mu$ .

На рисунке 4 изображены графики цен закрытия и сглаженных функций  $\mu(t)$ ,  $\alpha(t)$  (сглаживание произведено для лучшего зрительного восприятия). Участки когерентных разрывов отмечены вертикальными полосами.



**Рис. 4.** Когерентные разрывы волатильности в динамике курса «рубль–доллар»: сверху — курс «рубль–доллар» (недельные цены закрытия); в середине — экспоненциально сглаженная функция  $\alpha$ ; снизу — экспоненциально сглаженная функция  $\mu$

Наиболее протяженный такой участок, отмеченный самой правой вертикальной полосой, соответствует кризису 2008 г. Соответствующие результаты приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** Частоты периодов когерентных разрывов волатильности

	Горизонт прогнозирования				
	4	8	16	32	48
Безусловная частота интервалов с ростом $\alpha$ и падением $\mu$	0.235	0.191	0.147	0.191	0.206
Частота верных предсказаний интервалов с ростом $\alpha$ и падением $\mu$	0.562	0.618	0.796	0.641	0.500
Частота интервалов с ростом $\alpha$ и падением $\mu$ при условии соответствующего предсказания	0.360	0.332	0.320	0.310	0.220

#### 4. Выводы

Таким образом, с использованием при описании волатильности двух параметров (локальный размах  $\alpha(t)$ , а также  $\mu(t)$ , который можно понимать как обобщенный показатель



Херста, характеризующий локальную структуру волатильности), построена и протестирована прогнозная модель. Поскольку  $\mu(t)$  имеет достаточно четко выраженную квазициклическую структуру, то для ее прогнозной оценки используются регрессионные модели, содержащие определенные компоненты ряда Фурье в качестве регрессоров. В то же время, поскольку  $\alpha(t)$  содержит значительные почти линейные промежутки, для ее прогноза использована функция Zig-Zag.

Как видно из табл. 2, при прогнозировании на интервал длиной в полтора характерных масштаба прогноз фактически не отличается от «бросания монетки» — память полностью пропадает. Но при предсказании на интервал длиной не более характерного масштаба (до 32 недель) прогноз с помощью модели оказывается значительно лучше «мартингального», хотя его достоверность нельзя назвать очень большой. Можно предположить, что именно такое превышение позволяет использовать для прогноза длинную память (несомненно, сиюминутные эффекты от полученной рынком информации в каждый конкретный момент времени могут оказывать большее влияние, чем долговременные тенденции).

Важно отметить, что развиваемая методика распространяется на прогнозирование перехода рынка в нестабильное состояние. Особый интерес представляет поведение построенной модели волатильности в области, соответствующей кризису 2008 г. (правая вертикальная полоса на рис. 4). Во-первых, модель входит в критическую область (полосу) при максимальном значении  $\alpha$  за весь предшествующий семилетний период. Во-вторых, кризису предшествует предварительное относительно короткое вхождение в критическую область и выход из нее. Такое явление часто оказывается предвестником большой катастрофы, и оно может быть отслежено в рамках предлагаемой методики. Это дает некоторые дополнительные основания надеяться на перспективность развиваемого подхода.

Авторы благодарны В. Б. Гисину и В. Ю. Попову за полезные обсуждения.

### Список литературы

Дубовиков М. М., Старченко Н. В. (2011). Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов. *Успехи физических наук*, 181 (7), 779–786.

Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. (2007). *Эконометрика. Начальный курс*. М.: Дело.  
Мандельброт Б. (2004). *Фракталы, случай и финансы*. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика».

Петерс Э. Э. (2004). *Фрактальный анализ финансовых рынков*. М.: Интернет Трейдинг.

Федер Е. (1991). *Фракталы*. М.: Мир.

Achelis S. (1986). A guide to market indicator interpretation: Using the technician program. *Computer Asset Management*. Salt Lake City, UT.

Azzini A., de Costa Pereira C., Tettamanzi A. G. B. (2010). Modelling turning points in financial markets with soft computing techniques. *Studies in Computational Intelligence*, 293, 147–167.

Brownlees C., Engle R., Kelly B. (2012). A practical guide to volatility forecasting through calm and storm. *The Journal of Risk*, 14 (2), 3–22.

Dubovikov M. M., Starchenko N. V., Dubovikov M. S. (2004). Dimension of minimal cover and fractal analysis of time-series. *Physica A*, 39, 591–608.

Fama E. F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38 (1), 35–105.