

Прикладная эконометрика, 2018, т. 51, с. 126–139.

Applied Econometrics, 2018, v. 51, pp. 126–139.

Д. А. Борзых, М. А. Хасыков¹

Процедура уточнения ICSS алгоритма обнаружения структурных сдвигов в GARCH-моделях

В работе предложен гибридный алгоритм обнаружения моментов структурных сдвигов в классе кусочно-заданных GARCH(1,1)-моделей. Данный алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью KL-ICSS алгоритма, основанного на работах (Kokoszka, Leirpus, 1999) и (Inclán, Tiao, 1994), обнаруживаются моменты структурных сдвигов. На втором шаге с помощью некоторого варианта метода максимального правдоподобия уточняются найденные на первом шаге моменты структурных сдвигов. В связи с этим предлагаемый алгоритм назван ML-KL-ICSS алгоритмом. В работе проведено пять численных экспериментов. В четырех из пяти экспериментов ML-KL-ICSS метод продемонстрировал существенно более высокую точность обнаружения моментов структурных сдвигов. В одном эксперименте точность рассматриваемых методов оказалась сопоставимой, но при этом ML-KL-ICSS метод все равно оказался немного точнее. Предлагаемый ML-KL-ICSS метод апробирован на реальных данных в рамках решения задачи обнаружения структурных сдвигов волатильности доходности обыкновенных акций компании ПАО «Газпром». Обнаруженные моменты структурных сдвигов объясняются значимыми событиями, которые в это время происходили в экономике.

Ключевые слова: GARCH; волатильность; структурные сдвиги; ICSS; CUSUM.

JEL classification: C32; C58; C63.

1. Введение

Для получения более точных оценок коэффициентов эконометрических моделей требуется большее количество наблюдений. Однако при увеличении объема выборки исследователи зачастую сталкиваются с проблемой, называемой структурными сдвигами или разладками случайного процесса. Как известно, игнорирование структурных сдвигов при оценивании модели приводит к некорректным результатам.

В работе рассматривается задача обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданной GARCH(1,1)-модели, которая описывается следующим образом. Пусть $k \geq 0$ — неизвестное число структурных сдвигов временного ряда $(Y_t)_{t=1}^T$, а $\tau_1, \dots, \tau_k$ — моменты

¹ Борзых Дмитрий Александрович — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва; borzykh.dmitriy@gmail.com.

Хасыков Михаил Арлтанович — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва; mkhasykov@gmail.com.

структурных сдвигов, разделяющих исходный ряд на $k + 1$ сегментов. Будем предполагать, что j -й фрагмент временного ряда описывается уравнениями

$$Y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_j + \delta_j \sigma_{t-1}^2 + \gamma_j \varepsilon_{t-1}^2,$$

где

$$t \in [\tau_{j-1}; \tau_j - 1], \quad j = 1, \dots, k + 1, \quad \tau_0 := 1, \quad \tau_{k+1} := T + 1, \quad \theta_j := (\omega_j, \delta_j, \gamma_j) —$$

неизвестные параметры модели, принадлежащие множеству допустимых значений $\Theta := \{(\omega, \delta, \gamma) : \omega > 0, \delta \geq 0, \gamma \geq 0, \delta + \gamma < 1\}$, $\sigma_0, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T$ — независимые случайные величины, причем σ_0 — неотрицательная случайная величина с $E[\sigma_0^2] = \omega_1 / (1 - \delta_1 - \gamma_1)$, а $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T$ — стандартные нормальные случайные величины. Некоторые подходы к решению этой задачи можно найти, например, в (Davis et al., 2008; Fukuda, 2010; Kim et al., 2000; Kokoszka, Leipus, 1999, 2000; Lee et al., 2004; Inclán, Tiao, 1994; Ombao et al., 2002; Ross, 2013). Подробный обзор многих методов обнаружения структурных сдвигов для кусочно-заданных GARCH-моделей содержится в диссертации (Badagián, 2013, Ch. 3, 87–105).

В предлагаемой вниманию работе рассматривается комбинация двух алгоритмов: метода обнаружения одного структурного сдвига из работы (Kokoszka, Leipus, 1999), в дальнейшем называемого KL-CUSUM методом, и итеративной процедуры из работы (Inclán, Tiao, 1994), в дальнейшем называемой ICSS процедурой (Iterated Cumulative Sums of Squares). Данная итеративная процедура может быть применена к любому методу обнаружения одного структурного сдвига с целью обнаружения нескольких структурных сдвигов. Комбинацию KL-CUSUM метода и ICSS процедуры будем далее называть KL-ICSS методом.

В данной статье предлагается новый гибридный метод обнаружения структурных сдвигов, который позволяет уточнять KL-ICSS оценки структурных сдвигов. Данный способ состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью KL-ICSS метода вычисляются оценки моментов структурных сдвигов. На втором шаге данные оценки уточняются с помощью некоторого варианта метода максимального правдоподобия. В связи с этим обстоятельством предлагаемый алгоритм назван ML-KL-ICSS алгоритмом.

Опишем структуру дальнейшей части работы. Для большей замкнутости изложения и удобства читателей второй раздел статьи содержит подробное описание KL-CUSUM метода и ICSS процедуры. В третьем разделе изложен предлагаемый подход к обнаружению структурных сдвигов. Четвертый раздел посвящен сопоставлению KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов на симулированных данных. Приведены результаты пяти численных экспериментов, состоящих в сопоставлении точности KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов обнаружения структурных сдвигов. В пятом разделе ML-KL-ICSS метод был апробирован на реальных данных в рамках решения задачи обнаружения структурных сдвигов волатильности доходности обыкновенных акций компании ПАО «Газпром». Обнаруженные моменты структурных сдвигов объяснены значимыми событиями, которые в это время происходили в экономике.

2. KL-ICSS метод

Данный раздел посвящен подробному описанию KL-CUSUM алгоритма, предложенного в работе (Kokoszka, Leipus, 1999), и итеративной процедуры ICSS из (Inclán, Tiao, 1994). В п. 2.1 описан KL-CUSUM алгоритм, предназначенный для обнаружения одного структурного

сдвига, а в п. 2.2 данный одношаговый метод распространяется на случай нескольких возможных структурных сдвигов.

2.1. KL-CUSUM метод

Пусть кусочно-заданный GARCH(1,1)-процесс $(Y_t)_{t=1}^T$ допускает один структурный сдвиг в момент времени $\tau \in [2; T]$ и описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [1; \tau - 1], \\ Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [\tau; T]. \end{cases}$$

В статье (Kokoszka, Leipus, 1999), формула (1.4), рассматривается следующая статистика:

$$KL(k) := \sqrt{T} \frac{k(T-k)}{T^2} \left(\frac{1}{k} \sum_{t=1}^k Y_t^2 - \frac{1}{T-k} \sum_{t=k+1}^T Y_t^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\sum_{t=1}^k Y_t^2 - \frac{k}{T} \sum_{t=1}^T Y_t^2 \right), \quad k \in \{1, \dots, T\},$$

с помощью которой авторы статьи предлагают определять *момент времени, подозрительный на структурный сдвиг*:

$$\tau^* := \min \left\{ k : |KL(k)| = \max_{j \in \{1, \dots, T\}} |KL(j)| \right\}.$$

Обозначим

$$(\hat{v}_{r,T})^2 := \sum_{|j| \leq r} w_j \hat{c}_j,$$

где $w_j = 1 - |j|/(r+1)$, $r \in \mathbb{N}$, $\hat{c}_j = T^{-1} \sum_{i=1}^{T-|j|} (Y_i^2 - \bar{Y}^2)(Y_{i+|j|}^2 - \bar{Y}^2)$.

Из теоремы 2.2 в (Kokoszka, Leipus, 1999) следует, что при $T \rightarrow \infty$ и $r/T \rightarrow 0$ в случае отсутствия структурного сдвига имеет место сходимость по распределению

$$\frac{|KL(\tau^*)|}{\hat{v}_{r,T}} \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|,$$

где $B^0(u)$, $u \in [0; 1]$ — процесс броуновского моста. В настоящей статье при практической реализации данного метода в качестве величины r используется $r = \lfloor \ln T \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ означает операцию округления вниз.

Критерий наличия структурного сдвига: если $|KL(\tau^*)|/\hat{v}_{r,T} \geq q_p$, то момент τ^* считается моментом структурного сдвига на уровне значимости $1-p$, где $q_{0.95} = 1.358$ и $q_{0.99} = 1.628$ — значения квантилей уровней 0.95 и 0.99 для супремума модуля броуновского моста $\sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|$.

2.2. ICSS процедура

Идея данной процедуры состоит в последовательном применении KL-CUSUM алгоритма, описанного в п. 2.1, к временным рядам, образующимся путем деления исходного ряда на части «до» и «после» очередного момента структурного сдвига, найденного на предыдущем шаге. Ниже представлено детальное описание метода.

Введем обозначение: $Y[t_1 : t_2] := [Y_{t_1}, \dots, Y_{t_2}]$, $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Шаг 1. Положим $t_1 = 1$.

Шаг 2. Применим KL-CUSUM метод, описанный в п. 2.1, к ряду $Y[t_1 : T]$.

- В случае, если гипотеза об отсутствии структурного сдвига не отвергается, алгоритм останавливается.

- В противном случае происходит переход к шагу 3а. Пусть $t_2 = \tau^*(Y[t_1 : T])$ — момент времени, который был определен как момент возможного структурного сдвига.

Шаг 3а. Применим KL-CUSUM метод к ряду $Y[t_1 : t_2]$, т.е. рассматриваем левую часть исходного ряда вплоть до момента t_2 . Если гипотеза об отсутствии структурного сдвига не отвергается, то шаг 3а повторяется до тех пор, пока на очередной итерации критерий не укажет на отсутствие структурного сдвига. В этом случае положим $\tau_{\text{first}} = t_2$.

Шаг 3б. Похожая процедура производится с частью начального ряда, находящегося между потенциальным моментом структурного сдвига, обнаруженным на шаге 2, и номером последнего наблюдения, т.е. присваивается $t_1 = \tau^*(Y[t_1 : T]) + 1$ и KL-CUSUM метод применяется к ряду $Y[t_1 : T]$. Шаг 3б также повторяется до момента, когда гипотеза об отсутствии структурных сдвигов не отвергается. В этом случае положим $\tau_{\text{last}} = t_1 - 1$.

Шаг 3в. Если $\tau_{\text{first}} = \tau_{\text{last}}$, то считается, что структурный сдвиг только один, и алгоритм останавливается. Если $\tau_{\text{first}} < \tau_{\text{last}}$, то оба значения сохраняются как потенциальные моменты структурных сдвигов. Шаги 2 и 3 применяются к ряду $Y[\tau_{\text{first}} + 1 : \tau_{\text{last}}]$.

Шаг 4. Пусть в итоге найдено k возможных моментов структурных сдвигов. Они упорядочиваются по возрастанию и записываются в вектор $\vec{\tau} := [\tau_1, \dots, \tau_k]$, в который также добавляются значения $\tau_0 = 0$ и $\tau_{k+1} = T$. Затем производится проверка обнаруженных моментов структурных сдвигов путем последовательного применения KL-CUSUM метода к рядам $Y[\tau_{j-1} + 1 : \tau_{j+1}]$, $j = 1, \dots, k$. Если в соответствующем случае гипотеза об отсутствии структурного сдвига отвергается, то точка τ_j сохраняется, иначе — удаляется. Шаг 4 повторяется, пока размерность вектора обнаруженных моментов не станет постоянной, а соответствующие компоненты векторов на различных итерациях не будут близки друг к другу (в программном коде используется условие — разность между положениями соответствующих структурных сдвигов должна быть не больше двух наблюдений). Для предотвращения закливания процесса перепроверки найденных структурных сдвигов вводится ограничение сверху на максимальное число итераций (в качестве верхней границы используется число 20).

3. ML-KL-ICSS алгоритм

Предлагаемая процедура уточнения KL-ICSS оценок моментов структурных сдвигов состоит из двух шагов.

Шаг 1. Для заданного временного ряда $(Y_t)_{t=1}^T$ с помощью KL-ICSS метода, описанного в разделе 2, вычисляются моменты структурных сдвигов $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_k$.

Шаг 2. Для каждого момента структурного сдвига $\hat{\tau}_j$, $j = 1, \dots, k$, найденного на предыдущем шаге, рассчитывается уточненный с помощью ML-KL-ICSS метода момент структурного сдвига $\tilde{\tau}_j$.

Ниже приводится описание шага 2. Пусть $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_k$ — моменты структурных сдвигов, обнаруженные с помощью KL-ICSS метода. Формально положим $\hat{\tau}_0 := 0$ и $\hat{\tau}_{k+1} := T + 1$. Рассмотрим кусочно-заданную GARCH(1,1)-модель

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [a; \tau - 1], \\ Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [\tau; b] \end{cases} \quad (1)$$

на временном отрезке $t \in [a; b]$, $0 \leq a < b \leq T$, допускающую структурный сдвиг в момент времени $\tau \in (a; b)$. Несложно проверить, что ее логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(\theta_1, \theta_2, \tau, [a; b]) := -\frac{1}{2} \sum_{t=a}^{\tau-1} \left(\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=\tau}^b \left(\ln 2\pi + \ln \sigma_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right), \quad (2)$$

где $\theta_j = (\omega_1, \delta_j, \gamma_j) \in \Theta$, $j = 1, 2$,

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 0, & \text{при } t = a - 1, \\ Y_t, & \text{при } t \in [a; b], \end{cases} \quad \sigma_t^2 = \begin{cases} \sum_{t=a}^{\tau-1} Y_t^2 / (\tau - a), & \text{при } t = a - 1, \\ \omega_1 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2, & \text{при } t \in [a; \tau - 1], \\ \omega_2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2, & \text{при } t \in [\tau; b]. \end{cases}$$

Зафиксируем параметры метода — положительные числа Δ_1 и Δ_2 , удовлетворяющие условию $\Delta_1 + \Delta_2 < \min_{1 \leq j \leq k+1} (\hat{\tau}_j - \hat{\tau}_{j-1})$. Определим ML-KL-ICSS оценку $\tilde{\tau}_j$ структурного сдвига, построенную по KL-ICSS оценке $\hat{\tau}_j$, $j = 1, \dots, k$, следующим образом:

$$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\tau}_j) \in \underset{\substack{\theta_1, \theta_2 \in \Theta, \\ \tau \in [\hat{\tau}_j - \Delta_2; \hat{\tau}_j + \Delta_2]}}{\operatorname{argmax}} l(\theta_1, \theta_2, \tau, [\hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1; \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1]). \quad (3)$$

Согласно приведенному выше определению, ML-KL-ICSS оценка $\tilde{\tau}_j$ структурного сдвига, построенная по KL-ICSS оценке $\hat{\tau}_j$, получается как оценка максимального правдоподобия момента структурного сдвига τ на основе наблюдений $(Y_t, t \in [\hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1; \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1])$ при использовании логарифмической функции правдоподобия (2) с $a = \hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1$, $b = \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1$ и введении момента структурного сдвига τ в число оцениваемых параметров модели (1) (см. рис. 1).

На рисунке 1 (*) обозначает интервал наблюдений, на основе которых рассчитывается логарифмическая функция правдоподобия $l(\theta_1, \theta_2, \tau, [\hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1; \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1])$, а (**) обозначает тот интервал наблюдений, в котором допускается наличие момента структурного сдвига τ_j .

Отметим, что при расчете уточненного момента структурного сдвига $\tilde{\tau}_j$ используются не все доступные наблюдения на временном промежутке $[\hat{\tau}_{j-1}; \hat{\tau}_{j+1} - 1]$ между KL-ICSS оценками моментов структурных сдвигов $\hat{\tau}_{j-1}$ и $\hat{\tau}_{j+1}$, а только те из них, которые относятся к временному промежутку $[\hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1; \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1]$, лежащему строго внутри сегмента

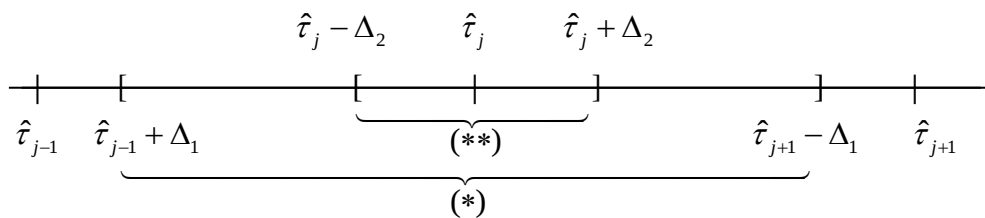


Рис. 1. Схема обнаружения ML-KL-ICSS оценки $\tilde{\tau}_j$

$[\hat{\tau}_{j-1}; \hat{\tau}_{j+1} - 1]$. Смысл отбрасывания части наблюдений на краях отрезка $[\hat{\tau}_{j-1}; \hat{\tau}_{j+1} - 1]$ состоит в дополнительной перестраховке от нежелательной ситуации, когда сегмент $[\hat{\tau}_{j-1}; \hat{\tau}_{j+1} - 1]$ содержит не только истинный момент структурного сдвига τ_j , но еще один или оба истинных момента структурных сдвигов τ_{j-1} и τ_{j+1} . Экспериментальным путем было установлено, что отбрасывание части наблюдений на краях сегмента $[\hat{\tau}_{j-1}; \hat{\tau}_{j+1} - 1]$ может достаточно существенно повысить точность оценивания параметра τ_j . Проведенные эксперименты также свидетельствуют о том, что параметр Δ_1 нельзя выбирать слишком большим, поскольку в этом случае возникает нехватка наблюдений, при которой точность оценивания момента структурного сдвига снижается.

Параметр Δ_2 был введен в рассмотрение с целью снижения объема вычислений при выполнении процедуры максимизации логарифмической функции правдоподобия. Как видно из формулы (3), максимизация по дискретному параметру τ выполняется на более узком множестве $\tau \in [\hat{\tau}_j - \Delta_2; \hat{\tau}_j + \Delta_2]$ по сравнению со всем допустимым возможным множеством значений $\tau \in (\hat{\tau}_{j-1} + \Delta_1; \hat{\tau}_{j+1} - \Delta_1)$. Экспериментально установлено, что если параметр Δ_2 выбран достаточно большим, то его дальнейшее увеличение в подавляющем числе случаев приводит к тем же результатам, что и при меньшем значении Δ_2 . Поэтому с целью повышения быстродействия алгоритма параметр Δ_2 целесообразно выбирать достаточно (но не слишком) большим.

4. Сравнение KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов на симулированных данных

В данном разделе приведены результаты пяти численных экспериментов, состоящих в сопоставлении точности KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов обнаружения структурных сдвигов. В четырех из пяти экспериментов ML-KL-ICSS метод продемонстрировал *существенно* более высокую точность: средняя абсолютная ошибка KL-ICSS метода в среднем по этим экспериментам оказалась приблизительно в 1.7 раз выше, чем для ML-KL-ICSS метода. В одном эксперименте точность рассматриваемых методов оказалась сопоставимой, но при этом ML-KL-ICSS метод все равно оказался немного точнее.

Численные эксперименты 1–4 (один структурный сдвиг). Каждый из экспериментов 1–4 состоял из симуляций, в рамках которых генерировался временной ряд $(Y_t)_{t=1}^T$ согласно модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_1 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [1; 500], \\ Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = \omega_2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \varepsilon_{t-1}^2, & t \in [501; 1000], \end{cases} \quad (4)$$

содержащей структурный сдвиг в момент времени $\tau_1 = 501$. Для каждого из сгенерированных рядов с целью обнаружения структурных сдвигов были применены KL-ICSS метод с уровнем значимости 0.01 и ML-KL-ICSS метод при $\Delta_1 = \Delta_2 = 200$. При этом сохранялись результаты только тех симуляций, в которых KL-ICSS метод обнаружил правильное число структурных сдвигов, т.е. один. Данный эксперимент продолжался до тех пор, пока число таких симуляций не составило $N = 10000$. На основе моментов структурных сдвигов $(\hat{\tau}_1^{(j)})_{j=1}^N$ и $(\tilde{\tau}_1^{(j)})_{j=1}^N$, найденных с помощью KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов соответственно, были рассчитаны характеристики, отражающие точность обнаружения структурных сдвигов:

- средние значения $\text{Mean}(\hat{\tau}_1) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{\tau}_1^{(j)}$, $\text{Mean}(\tilde{\tau}_1) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\tau}_1^{(j)}$;
- средние абсолютные ошибки $\text{MAE}(\hat{\tau}_1) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\hat{\tau}_1^{(j)} - \tau_1|$, $\text{MAE}(\tilde{\tau}_1) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\tilde{\tau}_1^{(j)} - \tau_1|$.

Результаты выполненных расчетов для различных параметров δ , ω модели (4) представлены в табл. 1 (во всех экспериментах бралось $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.05$).

Таблица 1. Эксперименты 1–4 (один скачок)

Характеристика	Метод	
	KL-ICSS	ML-KL-ICSS
<i>Эксперимент 1 (скачок ω вверх): $\omega_1 = 0.0001$, $\omega_2 = 0.0006$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.9$</i>		
Mean	508.29	497.96
MAE	8.15	5.84
<i>Эксперимент 2 (скачок ω вниз): $\omega_1 = 0.0006$, $\omega_2 = 0.0001$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.9$</i>		
Mean	490.86	492.52
MAE	10.25	9.67
<i>Эксперимент 3 (скачок δ вверх): $\delta_1 = 0.6$, $\delta_2 = 0.9$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.0001$</i>		
Mean	508.05	499.42
MAE	7.69	3.77
<i>Эксперимент 4 (скачок δ вниз): $\delta_1 = 0.9$, $\delta_2 = 0.6$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.0001$</i>		
Mean	491.54	497.51
MAE	9.48	4.71

Как видно из таблицы, в экспериментах 1, 3 и 4 оценка момента структурного сдвига для ML-KL-ICSS метода имеет меньшее смещение, а также существенно меньшую среднюю абсолютную ошибку. В численном эксперименте 2 KL-ICSS и ML-KL-ICSS методы демонстрируют сопоставимую точность. При этом ML-KL-ICSS метод остается немного точнее.

На рисунках П1–П4 в Приложении изображены графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа проводимых симуляций, которые соответствуют численным экспериментам 1–4. Графики показывают, что результаты, приведенные в табл. 1, являются стабильными и практически не меняются при дальнейшем увеличении числа проводимых симуляций.

Численный эксперимент 5 (два структурных сдвига). Данный эксперимент состоял из симуляций, в каждой из которых генерировался временной ряд $(Y_t)_{t=1}^T$ согласно модели

$$\begin{cases} Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = 0.0001 + 0.9\sigma_{t-1}^2 + 0.05\varepsilon_{t-1}^2, & t \in [1; 500], \\ Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = 0.0006 + 0.9\sigma_{t-1}^2 + 0.05\varepsilon_{t-1}^2, & t \in [501; 1000], \\ Y_t = \varepsilon_t, & \varepsilon_t = \sigma_t \xi_t, & \sigma_t^2 = 0.0036 + 0.9\sigma_{t-1}^2 + 0.05\varepsilon_{t-1}^2, & t \in [1001; 1500], \end{cases}$$

содержащей два структурных сдвига в моменты времени $\tau_1 = 501$ и $\tau_2 = 1001$. Для каждого из сгенерированных рядов с целью обнаружения структурных сдвигов были применены KL-ICSS метод с уровнем значимости 0.01 и ML-KL-ICSS метод при $\Delta_1 = 100$ и $\Delta_2 = 100$. Сохранялись результаты только тех симуляций, в которых KL-ICSS метод обнаружил правильное число структурных сдвигов, т.е. два сдвига. Данный эксперимент продолжался до тех пор, пока число таких симуляций не составило $N = 10000$. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2. Эксперимент 5 (два скачка)

Характеристика	$\tau_1 = 501$		$\tau_2 = 1001$	
	KL-ICSS	ML-KL-ICSS	KL-ICSS	ML-KL-ICSS
Mean	510.76	499.14	1009.40	998.33
MAE	10.50	6.46	9.29	5.93

Из таблицы 2 видно, что ML-KL-ICSS оценка каждого из структурных сдвигов $\tau_1 = 501$ и $\tau_2 = 1001$ имеет меньшее смещение, а также существенно меньшую среднюю абсолютную ошибку по сравнению с KL-ICSS оценкой.

В Приложении (рисунки П5 и П6) изображены графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа проводимых симуляций, соответствующие результатам численного эксперимента 5. Так же как и для экспериментов 1–4, эти графики показывают, что результаты, приведенные в табл. 2, являются стабильными и практически не меняются при дальнейшем увеличении числа проводимых симуляций.

5. Апробирование ML-KL-ICSS метода на реальных данных

Данный раздел посвящен апробированию ML-KL-ICSS метода на реальных данных. В качестве исследуемого ряда был взят ряд логарифмических доходностей обыкновенных акций компании ПАО «Газпром» за промежуток времени с 23 января 2006 г. по 22 июня 2018 г. Структурные сдвиги волатильности оценивались в рамках кусочно-заданной GARCH(1,1)-модели с применением описанных выше KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов.

На указанном промежутке KL-ICSS метод на уровне значимости 0.01 выявил три структурных сдвига: 5 сентября 2008 г., 29 июля 2009 г. и 19 декабря 2011 г. На том же промежутке при $\Delta_1 = \Delta_2 = 100$ ML-KL-ICSS метод выявил следующие структурные сдвиги: 22 сентября 2008 г., 3 августа 2009 г. и 13 сентября 2011 г.

На рисунке 2 приведен график логарифмических доходностей обыкновенных акций компании ПАО «Газпром». Вертикальными пунктирными линиями на нем отмечены моменты структурных сдвигов, обнаруженные ML-KL-ICSS методом.

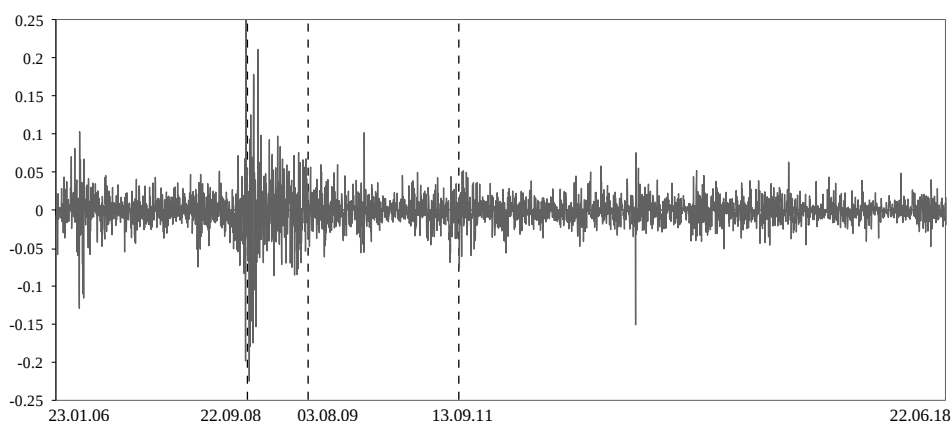


Рис. 2. График логарифмических доходностей обыкновенных акций компании ПАО «Газпром»

Обнаруженные моменты структурных сдвигов, вероятно, можно объяснить рядом значимых событий, которые в это время происходили в экономике.

- [22 сентября 2008 г.] Сентябрь 2008 г. — начало финансового экономического кризиса в России; 15 сентября 2008 г. инвестиционный банк Lehman Brothers обратился в суд с заявлением о своем банкротстве.

- [3 августа 2009 г.] 8 сентября 2009 г. — начало роста цен на природный газ после годового падения; 31 июля 2009 г. «Газпром» начал строительство газотранспортной системы «Сахалин–Хабаровск–Владивосток».

- [13 сентября 2011 г.] Началась очередная фаза затяжного падения цен на природный газ; 6 сентября 2011 г. «Газпром» начал заполнение природным газом первой нитки газопровода «Северный поток».

6. Заключение

В работе рассмотрена задача обнаружения структурных сдвигов в классе кусочно-заданных GARCH(1,1)-моделей. Предложен гибридный алгоритм обнаружения моментов структурных сдвигов. Данный алгоритм состоит из двух шагов. На первом шаге с помощью KL-ICSS метода обнаруживаются моменты структурных сдвигов. На втором шаге с помощью некоторого варианта метода максимального правдоподобия уточняются найденные на первом шаге моменты структурных сдвигов (ML-KL-ICSS алгоритм).

На основе пяти численных экспериментов было проведено сопоставление точности обнаружения структурных сдвигов KL-ICSS и ML-KL-ICSS методами. В четырех из пяти экспериментов ML-KL-ICSS метод продемонстрировал *существенно* более высокую точность: средняя абсолютная ошибка KL-ICSS метода по этим экспериментам оказалась приблизительно в 1.7 раз выше, чем для ML-KL-ICSS метода. В одном эксперименте точность

рассматриваемых методов оказалась сопоставимой, но при этом ML-KL-ICSS метод все равно оказался немного точнее.

ML-KL-ICSS метод был апробирован на реальных данных в рамках решения задачи обнаружения структурных сдвигов волатильности доходности обыкновенных акций компании ПАО «Газпром». В качестве исследуемого ряда был взят ряд логарифмических доходностей обыкновенных акций компании ПАО «Газпром» за промежуток времени с 23 января 2006 г. по 22 июня 2018 г. С помощью ML-KL-ICSS метода было обнаружено три момента структурных сдвигов (22 сентября 2008 г., 3 августа 2009 г. и 13 сентября 2011 г.), которые можно объяснить рядом значимых событий, происходившими в то время в экономике.

Список литературы

- Badagián A. L. (2013). Time series segmentation procedures to detect, locate and estimate change-points. <https://core.ac.uk/download/pdf/29404624.pdf>.
- Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G. (2008). Break detection for a class of nonlinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 29 (5), 834–867.
- Fukuda K. (2010). Parameter changes in GARCH model. *Journal of Applied Statistics*, 37 (7), 1123–1135.
- Kim S., Cho S., Lee S. (2000). On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) models. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 29 (2), 445–462.
- Kokoszka P., Leipus R. (1999). Testing for parameter changes in ARCH models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 39 (2), 182–195.
- Kokoszka P., Leipus R. (2000). Change-point estimation in ARCH models. *Bernoulli*, 6 (3), 513–539.
- Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. (2004). The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 34 (2), 173–188.
- Inclán C., Tiao G. (1994). Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89 (427), 913–923.
- Ombao H., Raz J., von Sachs R., Guo W. (2002). The SLEX model of a non-stationary random process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 54 (1), 171–200.
- Ross G. J. (2013). Modeling financial volatility in the presence of abrupt changes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392 (2), 350–360.

Поступила в редакцию 15.07.2018;
принята в печать 11.09.2018.

Приложение

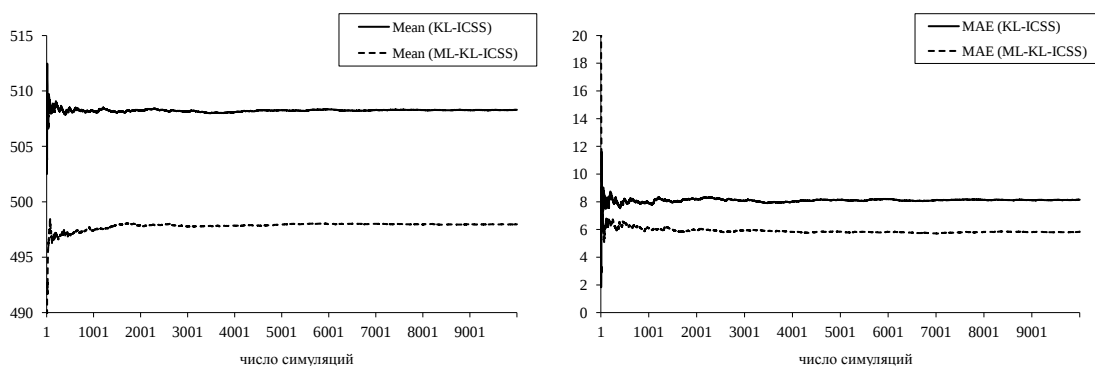


Рис. П1. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 1

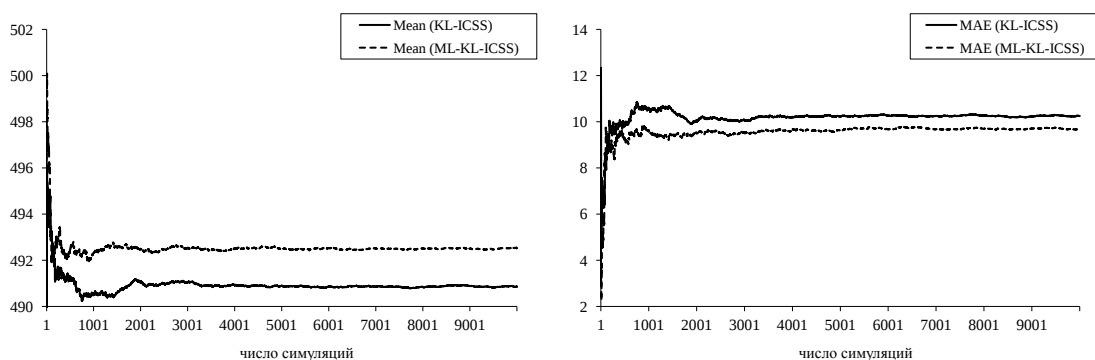


Рис. П2. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 2

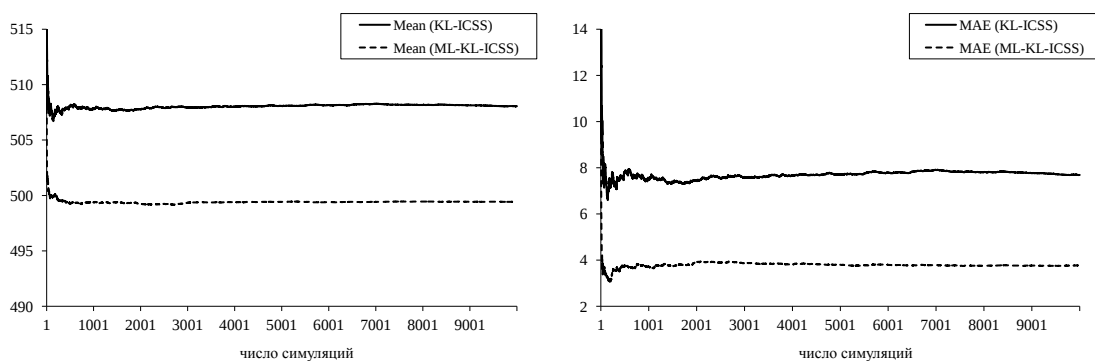


Рис. П3. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 3

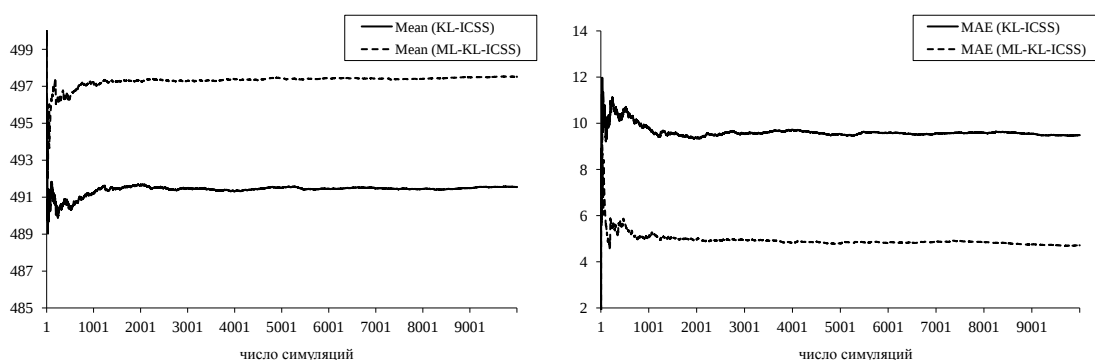


Рис. П4. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 4

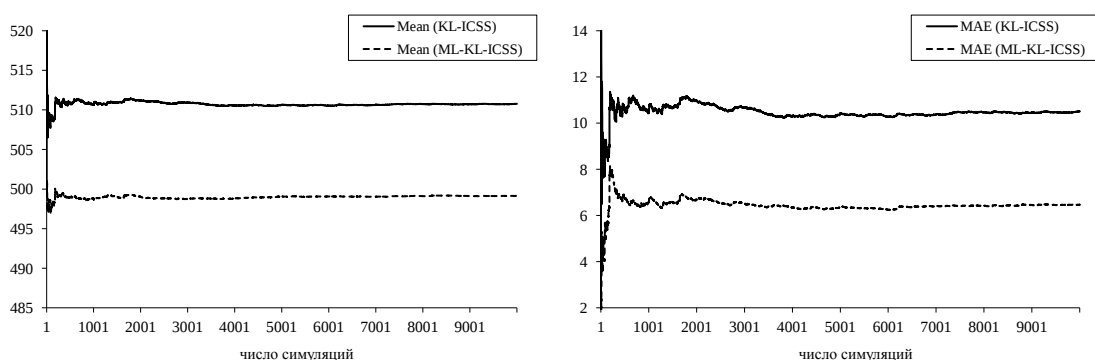


Рис. П5. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 5 для структурного сдвига в точке $\tau_1 = 501$

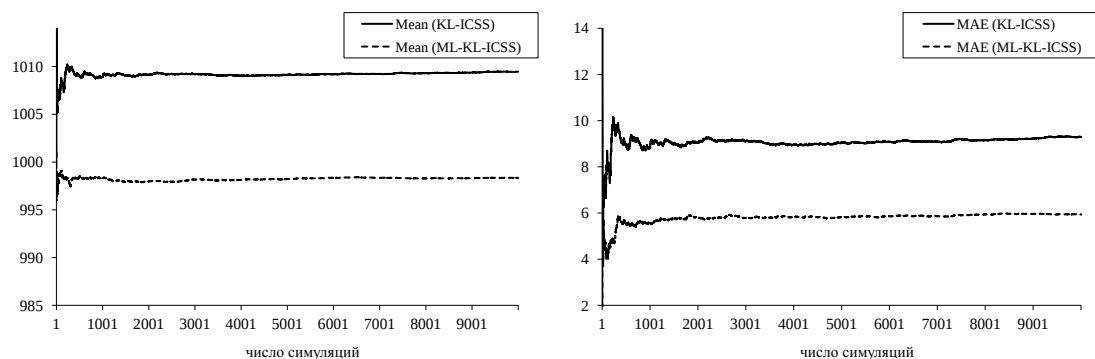


Рис. П6. Графики Mean и MAE для KL-ICSS и ML-KL-ICSS методов в зависимости от числа симуляций в эксперименте 5 для структурного сдвига в точке $\tau_2 = 1001$

Borzykh D. A., Khasykov M. A. The refinement procedure of ICSS algorithm for structural breaks detection in GARCH-models. *Applied Econometrics*, 2018, v. 51, pp. 126–139.

Dmitriy Borzykh

National Research University Higher School of Economics (NRU HSE),
Moscow, Russian Federation;
borzykh.dmitriy@gmail.com

Mikhail Khasykov

National Research University Higher School of Economics (NRU HSE),
Moscow, Russian Federation;
mkhasykov@gmail.com

**The refinement procedure of ICSS algorithm
for structural breaks detection in GARCH-models**

We suggest a hybrid algorithm for structural breaks detection when using a class of piecewise-specified GARCH(1,1)-models. The algorithm comprises two steps. In the first step the moments of structural breaks are detected using KL-ICSS method based on (Kokoszka, Leipus, 1999) and (Inclán, Tiao, 1994). In the second step previously detected moments of structural breaks are refined with the help of a modified MML method. Therefore, the whole procedure is called ML-KL-ICSS algorithm. We also provide five numeric experiments to show the overall performance of the proposed procedure. Four of five experiments show that ML-KL-ICSS method is significantly more accurate in detecting structural breaks as opposed to one-step procedures. In one experiment the accuracy of both methods was comparable but ML-KL-ICSS method performed slightly better. Finally, we test our method using real data. In order to do that we detect structural breaks in common stocks returns volatility for the Russian «Gazprom» company. Detected moments of structural breaks correspond to significant events in the Russian economy.

Keywords: GARCH; volatility; multiple change points; structural breaks; ICSS; CUSUM.

JEL classification: C32; C58; C63.

References

- Badagían A. L. (2013). Time series segmentation procedures to detect, locate and estimate change-points. <https://core.ac.uk/download/pdf/29404624.pdf>.
- Davis R., Lee T., Rodriguez-Yam G. (2008). Break detection for a class of nonlinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 29 (5), 834–867.
- Fukuda K. (2010). Parameter changes in GARCH model. *Journal of Applied Statistics*, 37 (7), 1123–1135.
- Kim S., Cho S., Lee S. (2000). On the CUSUM test for parameter changes in GARCH(1,1) models. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, 29 (2), 445–462.
- Kokoszka P., Leipus R. (1999). Testing for parameter changes in ARCH models. *Lithuanian Mathematical Journal*, 39 (2), 182–195.
- Kokoszka P., Leipus R. (2000). Change-point estimation in ARCH models. *Bernoulli*, 6 (3), 513–539.

Lee S., Tokutsu Y., Maekawa K. (2004). The CUSUM test for parameter change in regression models with ARCH errors. *Journal of the Japanese Statistical Society*, 34 (2), 173–188.

Inclán C., Tiao G. (1994). Use of cumulative sums of squares for retrospective detection of changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89 (427), 913–923.

Ombao H., Raz J., von Sachs R., Guo W. (2002). The SLEX model of a non-stationary random process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 54 (1), 171–200.

Ross G. J. (2013). Modeling financial volatility in the presence of abrupt changes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 192 (2), 350–360.

Received 15.07.2018; accepted 11.09.2018.