Прикладная эконометрика, 2020, т. 58, с. 96–141.
Applied Econometrics, 2020, v. 58, pp. 96–141.
DOI: 10.22394/1993-7601-2020-58-96-141

А. А. Скроботов[1]

Структурные сдвиги и тестирование на единичный корень

В данном обзоре рассматриваются методы тестирования на единичный корень во временном ряде при наличии структурных сдвигов. Отдельно обсуждаются методы оценивания даты структурных сдвигов при неопределенности относительно того, является ли временной ряд стационарным или нет. В обзоре рассматривается большое число недавно разработанных методов тестирования, робастных к различным типам неопределенности данных, включая начальные значения и изменяющуюся во времени волатильность. Обзор знакомит читателя с практическим применением современных методов тестирования в совокупности с пониманием системы развития этих методов.

Ключевые слова: тестирование на единичный корень; структурные сдвиги; тестирование на стационарность; нестационарная волатильность; робастные методы.

JEL classification: C12; C22.

1. Введение

Данный обзор посвящен тестированию гипотезы о существовании единичного корня при наличии структурных сдвигов. Кроме того, рассматриваются теоретические свойства различных оценок дат сдвигов при разных порядках интегрированности и обсуждаются робастные подходы для такого оценивания. Работа в некоторой степени дополняет обзоры (Perron, 2006) и (Perron, Casini, 2019), а также (Kejriwal, 2012). В то время как первый обзор написан достаточно давно и не учитывает многие недавние исследования, во втором рассматриваются только стационарные модели со структурными сдвигами, которые в настоящей работе не затрагиваются. В (Kejriwal, 2012) анализируются только сдвиги в изменении инерционности временного ряда (в частности, тесты на единичный корень или на стационарность против альтернативы об изменении инерционности). Также можно упомянуть обзоры (Aue, Horváth, 2013; Jandhyala et al., 2013), почти не затрагивающие вопросы анализа нестационарных временных рядов при наличии структурных сдвигов, но полезные, например, при изучении методов тестирования структурной стабильности.

Проблема тестирования гипотезы единичного корня обусловлена тем, что графики большинства макроэкономических временных рядов выявляют нестационарный характер динамики ряда и наличие у него выраженного тренда. В течение долгого времени было принято

[1] **Скроботов Антон Андреевич** — Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (РАНХиГС); Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ); skrobotov@ranepa.ru.

моделировать такие ряды как стационарные около детерминированного тренда (TS-модели, trend-stationary models), в которых на детерминированный тренд накладывается случайная составляющая (стохастический компонент ряда) в форме того ли иного слабо стационарного процесса, чаще всего, процесса ARMA (процесса авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего).

Моделирование временного ряда как стационарного около детерминированного тренда предполагает, что принимается предпосылка о преходящем влиянии шоков (инноваций) предложения, спроса и т. п., воздействующих на динамику ряда, быстром убывании влияния каждого отдельного шока при удалении от момента времени, когда этот шок произошел. При этом траектория ряда, отклоняясь от линии тренда, имеет тенденцию достаточно часто к ней возвращаться (свойство «возвращения к среднему», mean reverting). При принятии такой точки зрения, например, инновации в реальном валовом национальном продукте не должны влиять на долгосрочные прогнозы этого показателя.

Нестационарный ряд, описывающийся TS-моделью, приводится к стационарному («остационаривается») вычитанием из него детерминированного тренда. Соответственно, остатки, получаемые при OLS-оценивании модели регрессии ряда на тренд, образуют стационарный ряд. Между тем для многих макроэкономических рядов, графики которых (для уровней или их логарифмов) обнаруживают линейный тренд, ряды остатков имеют траектории, которые достаточно редко возвращаются к нулевому уровню, что не характерно для стационарных рядов.

Простейшей моделью для такого рода рядов является случайное блуждание со сносом (дрейфом), в котором разность между значением ряда в момент $t > 0$ и в «начальный момент» $t = 0$ состоит из детерминированной трендовой составляющей и суммы всех шоков, соответствующих моментам $1, 2, \ldots, t$ (стохастический тренд). Вычитание детерминированного линейного тренда не приводит здесь к остационариванию ряда («недодифференцированный» ряд). Остационаривание достигается переходом к ряду из разностей (дифференцирование ряда). Соответственно, случайное блуждание (со сносом или без него) относят к классу стационарных в разностях рядов (DS-ряды, difference-stationary series)[2]. В DS-рядах влияние шока, возникающего в момент t, не затухает со временем, а сохраняется постоянным для всех последующих моментов времени (свойство инерционности ряда, persistence). Поэтому инновации в таких рядах должны влиять на долгосрочные прогнозы.

Заметим, что применение дифференцирования к TS-ряду также позволяет устранить детерминированный тренд и приводит к стационарному ряду. Однако результирующий ряд обладает некоторыми нежелательными свойствами (передифференцированный ряд, имеющий необратимую MA-составляющую).

Ответ на вопрос о принадлежности конкретных временных рядов классу TS- или DS-рядов является важным не только для построения адекватной модели порождения ряда и использования ее для прогнозирования. Характер рассматриваемых рядов необходимо учитывать при построении регрессионных моделей связи между рядами. Отсутствие учета характера связываемых рядов приводит к неправильной спецификации модели и даже к получению так называемой ложной регрессии (высокий коэффициент детерминации при оценивании линейной модели регрессии для пары никак не связанных между собой временных рядов, порождаемых независимо друг от друга).

---

[2] Оценивание DS-ряда при помощи TS-модели приводит к модели кажущегося (мнимого, ложного) тренда.

В рамках моделей ARMA различение TS- и DS-рядов сводится к решению вопроса о наличии единичного корня у полинома, соответствующего авторегрессионной составляющей модели. Тогда проблему выбора между наличием единичного корня и стационарностью относительно детерминированного тренда можно свести к ответу на следующий вопрос. Какое предположение лучше соответствует имеющимся статистическим данным: тренд изменяется в каждый момент времени (стохастический тренд), или тренд не изменяется никогда (линейный тренд)? Эмпирический анализ, приведенный в работе (Nelson, Plosser, 1982), авторы которой рассматривали исторические макроэкономические ряды США, показал, что большинство рассмотренных рядов содержат стохастический тренд, т. е. меняющийся в каждый момент времени.

Как отмечается в (Perron, 2006), возникает естественный вопрос: почему выбор производится именно между альтернативами «всегда» и «никогда». Почему, например, не рассмотреть выбор между «всегда» и «иногда», а также задаться вопросом, какова частота этих иногда возникающих шоков, приводящих к перманентному изменению тренда?

Исследования, начатые в (Perron, 1989, 1990), как раз и мотивировались последним вопросом, т. е. в модели допускается наличие возникающих иногда существенных изменений в функции тренда рассматриваемых рядов (для американских данных). Эти изменения могут быть связаны с важными историческими событиями, такими как Великая депрессия в США, Первая и Вторая мировые войны. Такие изменения можно было бы рассматривать как стохастические, выбранные из распределения, отличающегося от распределения шоков, которые происходят в каждый период. Однако то обстоятельство, что большие изменения являются достаточно редкими, мешает определять и оценивать вероятностное распределение для них. Поэтому приходится моделировать эти редкие большие изменения в тренде как структурные изменения. При тестировании на единичный корень допускается наличие нескольких больших перманентных изменений в функции тренда и решается вопрос о наличии единичного корня в структуре стохастического компонента. Как отмечается в (Perron, 2006), во-первых, спецификация модели допускает, но не обязательно предполагает такие большие изменения, и, во-вторых, перманентность изменения понимается только в рамках имеющегося множества данных, а вовсе не предполагается, что это изменение останется и в будущем за пределами имеющейся выборки.

Для экономистов представляет интерес исследование экономических причин соответствующих структурных сдвигов — какие события в экономике повлияли на возникающие изменения в макроэкономических временных рядах. Актуален также вопрос о том, насколько соотносятся между собой структурные сдвиги в разных временных рядах, т. е. на какие ряды воздействует определенное событие, обуславливающее шок в экономике.

Данный обзор состоит из следующих частей. В разделе 2 формулируются основные модели и методы тестирования гипотезы о наличии единичного корня в данных. В разделе 3 рассмотрены современные методы датировки структурных сдвигов, их тестирование, а также методы тестирования гипотезы на единичный корень в данных при наличии структурных сдвигов. В разделе 4 обсуждаются методы тестирования гипотезы о стационарности при наличии структурных сдвигов, а в разделе 5 — методы тестирования при наличии изменяющейся во времени волатильности.

2. Классические методы тестирования гипотезы единичного корня при наличии структурных сдвигов

2.1. Тесты на единичный корень, допускающие структурный сдвиг в известное время

Как было показано в основополагающей работе (Perron, 1989), отсутствие учета структурных сдвигов в тестировании временного ряда на единичный корень, если сдвиги действительно имеются, приводит к тому, что нулевая гипотеза не отвергается даже асимптотически (Montanes, Reyes, 1999, 1998, 2000). Также в (Lee et al., 1997) показано, что наличие сдвига в тренде влияет и на тесты, в которых нулевой является гипотеза о стационарности, т. е. приводит к «либеральным» искажениям (т. е. тест слишком часто отвергает нулевую гипотезу, больше 5%) размера теста без учета структурного сдвига.

Изначально в работах (Perron, 1989, 1990) предполагалось однократное изменение в функции тренда трех различных типов:

1) изменение в уровне (модель «краха», crash-model);
2) изменение в наклоне тренда (модель «изменения роста», changing growth model);
3) изменение и в уровне, и в наклоне тренда (наличие обоих эффектов).

Для каждого из этих случаев различные эффекты перехода (transition effects) учитываются в двух версиях: инновационный выброс (IO), который предполагает постепенное изменение функции тренда, и аддитивный выброс (AO), который предполагает мгновенное изменение в функции тренда. Разница между аддитивным и инновационным выбросом важна не только из-за того, что предполагаются различные траектории перехода, но также и потому, что статистические процедуры для тестирования на единичный корень в этих случаях различны (подробности см. в (Perron, 2006, Section 5.2)).

Напомним, что стандартное тестирование на единичный корень обычно производится с использованием расширенного теста Дики–Фуллера (ADF), основанного на t-статистике для проверки нулевой гипотезы о том, что $\alpha = 0$ в регрессии

$$\Delta y_t = \mu + \beta t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta y_{t-i} + e_t,$$

где тренд может быть исключен из модели. Основная идея работ Perron состоит в том, чтобы добавить в эту регрессию переменные, связанные со структурным сдвигом, и получить (асимптотически) корректные выводы о наличии единичного корня.

Основная статистика для IO-моделей строится на основе регрессии

$$\Delta y_t = \mu_0 + \mu_1 DU_t + \beta_0 t + \beta_1 DT_t + \delta D_t(T_1) + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} c_i \Delta y_{t-i} + e_t, \tag{1}$$

где

$$D_t(T_1) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = T_1 + 1, \\ 0, \text{ если } t \neq T_1 + 1, \end{cases} \quad DU_t = \begin{cases} 1, \text{ если } t > T_1, \\ 0, \text{ если } t \leq T_1, \end{cases} \quad DT_t = \begin{cases} t - T_1, \text{ если } t > T_1, \\ 0, \quad\quad \text{ если } t \leq T_1. \end{cases}$$

Здесь T_1 — дата сдвига, после которой определенные коэффициенты могут изменяться. $D_t\left(T_1\right)$ является импульсной фиктивной переменной на одно наблюдение T_1+1, переменная DU_t отвечает за сдвиг в константе (новый уровень после сдвига), а DT_t — за сдвиг в тренде (новый наклон тренда после сдвига).

В этой модели общего вида могут быть исключены или регрессоры (t, DT_t) (получается модель изменения в уровнях без тренда), или регрессор DT_t (получается модель изменения в уровнях с трендом), или регрессор $(D_t\left(T_1\right), DU_t)$ (получается модель изменения в наклоне тренда). Тестовой статистикой для проверки нулевой гипотезы $\alpha=0$ против альтернативы $\alpha<0$ является обычная *t*-статистика[3] $t_\alpha(\lambda_1)$, где $\lambda_1=T_1/T$ — доля даты структурного сдвига (break fraction) — ключевая величина, используемая для асимптотического анализа таких моделей (она является непрерывной в отличие от T_1, что упрощает анализ). Если используемая дата сдвига является истинной датой сдвига (т. е. исследователь достоверно знает, в какой момент произошел сдвиг), то предельное распределение статистики инвариантно к параметрам функции тренда, отвечающим за изменения в константе и наклоне тренда. Это распределение имеет простой вид типа Дики–Фуллера:

$$t_{\hat{\alpha}}(\lambda_1) \Rightarrow \int_0^1 W^*(r,\lambda_1)dW(r)\cdot\left[\int_0^1 W^*(r,\lambda_1)^2\,dr\right]^{-1/2}, \tag{2}$$

где $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость, а $W^*(r,\lambda_1)$ — функция остатков от проекции винеровского процесса $W(r)$ на подпространство, порожденное соответствующим непрерывным во времени детерминированным компонентом $\{1, \mathrm{I}(r>\lambda_1), r, \mathrm{I}(r>\lambda_1)(r-\lambda_1)\}$, где $\mathrm{I}(\cdot)$ — индикаторная функция (с соответствующими изменениями, связанными с ограничениями). Другими словами, данное распределение будет зависеть от доли даты сдвига λ_1[4]. В случае обычного теста Дики–Фуллера с трендом функция $W^*(r,\lambda_1)$ упрощается до $W^*(r)$ — функции остатков от проекции винеровского процесса $W(r)$ на подпространство, порожденное непрерывным во времени детерминированным компонентом $\{1, r\}$.

Для АО моделей процедура несколько отлична от описанной выше и состоит из двух шагов. На первом шаге оценивается трендовая функция ряда, которая затем удаляется из оригинального ряда посредством регрессии

$$y_t=\mu_0+\beta_0 t+\mu_1 DU_t+\beta_1 DT_t+\tilde{u}_t, \tag{3}$$

и соответствующий детрендированный ряд определяется как $\tilde{u}_t$. Второй шаг различается в зависимости от того, присутствует ли на первом шаге компонент DU_t, определяющий сдвиг в константе. Если он присутствует, то тест на единичный корень основан на *t*-статистике для проверки нулевой гипотезы о том, что $\alpha=0$ в регрессии

$$\Delta\tilde{u}_t=\alpha\tilde{u}_{t-1}+\sum_{i=0}^{k} d_i D_{t-i}(T_1)+\sum_{i=1}^{k} a_i\Delta\tilde{u}_{t-i}+e_t. \tag{4}$$

[3] Заметим также, что кроме обычных аналогов статистик ADF Perron рассматривал модификации статистик Филлипса–Перрона во всех рассматриваемых моделях.

[4] Соответствующие критические значения даны в (Perron, 1989, 1990).

Если предполагается, что сдвига в константе нет, то импульсные фиктивные переменные $D_{t-i}(T_1)$ в регрессию не включаются.

Отметим, что изначально в своей статье (Perron, 1989) автор неправильно интерпретировал результаты, получая предельное распределение только для моделей с инновационными сдвигами. Ошибка была устранена в (Perron, Vogelsang, 1993a,b). Perron (1989) рассматривал модель (1) без импульсной переменной $D_t(T_1)$, поэтому полученное им предельное распределение соответствовало только IO моделям. Однако, как было показано в (Perron, Vogelsang, 1993a,b), при включении импульсной переменной $D_t(T_1)$ в модель предельное распределение тестовой статистики для AO моделей то же самое, что и для IO моделей (при некоторых слабых предположениях об ошибках). Для AO модели только с изменением наклона тренда (без сдвига в константе) оно отличается и приводится в (Perron, Vogelsang, 1993a, Equation 6; Perron, Vogelsang, 1993b, Equation 5). Заметим, что нет необходимости введения импульсных фиктивных переменных в такую модель, т. к. она не содержит сдвиг в уровне. Снова во всех случаях тесты инвариантны относительно параметров сдвига, когда дата сдвига специфицирована корректно.

2.2. Тесты на единичный корень, допускающие структурный сдвиг в неизвестное время

В рассмотренных выше работах Perron предполагалось, что дата структурного сдвига задается экзогенно, т. е. определяется на основании тех или иных экономических событий независимо от имеющихся данных о последовательных значениях изучаемого показателя.

Если в действительности структурные сдвиги отсутствуют, то критерии, предложенные Perron, могут иметь более низкую мощность по сравнению с критерием Дики–Фуллера (ADF). Кроме того, хотя в подходе Perron датировка момента структурного сдвига тренда привязывается к важным историческим и экономическим событиям, она может все же оказаться неверной. Это вызывает искажение размера и потерю мощности на конечных выборках. Но этот эффект исчезает асимптотически для данных, не содержащих тренд (Hecq, Urbain, 1993; Montanes, 1997). Для данных, содержащих тренд, в (Montanes, Olloqui, 1999) было показано, что потеря мощности происходит и на больших выборках (см. также (Kim et al., 2000)).

Zivot и Andrews (1992)[5] предложили тест на наличие единичного корня (нулевая гипотеза) против альтернативы о том, что временной ряд является стационарным около тренда с эндогенным структурным сдвигом (т. е. структурным сдвигом, произошедшим в неизвестный момент времени).

Авторы рассматривали следующую IO спецификацию модели, основанную на регрессии (1), но предположили, что при нулевой гипотезе процесс y_t является интегрированным первого порядка без структурных сдвигов:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + e_t, \tag{5}$$

[5] Далее ZA.

где e_t — стационарные инновации[6]. Тестовая регрессия строится при альтернативной гипотезе аналогично (Perron, 1989):

$$\Delta y_t = \mu_0 + \mu_1 DU_t + \beta_0 t + \beta_1 DT_t + \alpha y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} c_j \Delta y_{t-j} + e_t . \tag{6}$$

Заметим, что импульсные переменные $D_{t-i}(T_1) = \mathrm{I}(t - i = T_1 + 1)$ (как в уравнении (4)) не включаются в регрессию ввиду отличной от Perron нулевой гипотезы. Таким образом, в данном случае проверяется гипотеза о наличии единичного корня при отсутствии структурного сдвига против альтернативной гипотезы о стационарности ряда около детермнированного тренда с неизвестным во времени структурным сдвигом (в константе и/или в тренде). Авторы (ZA) предлагают статистику, основанную на минимизации тестовых статистик ADF для проверки $\alpha = 0$ для всех возможных дат сдвигов, т. е. $t_{\hat{\alpha}} = \inf_{\lambda_1 \in \Lambda} t_{\hat{\alpha}}(\lambda_1)$, где Λ — замкнутое подмножество интервала (0,1) (авторы выбирают $\Lambda = [0.001;\ 0.999]$). Предельное распределение тестовой статистики при нулевой гипотезе будет сходиться к инфимуму от распределения в правой части соотношения (2) по всем $\lambda_1 \in \Lambda$.

Отметим еще работу (Banerjee et al., 1992)[7], близко связанную с ZA. В ней были предложены рекурсивный (recursive) и повторяющийся (rolling) тесты. Оба применяются как стандартные тесты на единичный корень без сдвигов. Первый рассматривает фиксированную начальную дату для всех тестов и увеличивает выборку (от некоторого минимального значения до всей выборки), в то время как второй использует выборку фиксированной длины (намного меньше, чем вся выборка) и двигающуюся последовательно от некоторой начальной даты до конца выборки. В каждом случае рассматривается минимальное значение теста на единичный корень, и нулевая гипотеза о наличии единичного корня отвергается, если это минимальное значение достаточно мало. Асимптотически такая процедура будет иметь корректный размер, но фактически все тесты, основанные на подвыборках, не используют всю информацию из данных, что может привести к потере мощности. Последовательный (sequential) тест, рассмотренный также в BLS, является аналогом теста ZA.

Perron (1997) обобщил теоретические результаты тестов ZA и BLS. Он рассмотрел IO модели, где в тестовые регрессии включается только одна импульсная переменная $D_t(T_1)$ (см. уравнение (1)). Также он рассмотрел различные методы выбора даты структурного сдвига. Так же как и в ZA, Perron предполагает, что процесс порождения данных (нулевая гипотеза) является случайным блужданием (но, в отличие от ZA, без сноса): $y_t = y_{t-1} + e_t$. Первый метод такой же, как и в ZA, т. е. дата сдвига выбирается посредством минимизации t-статистики для тестирования гипотезы $\alpha = 0$. В то время как предельные распределения были получены в ZA при ограничениях даты сдвига (некоторым замкнутым подмножеством, исключающим значения в начале и в конце выборки), в (Perron, 1997) этого не требуется. В таких случаях регрессия становится эквивалентной регрессии без сдвигов (без

6 Здесь и в дальнейшем не будут приводиться различные классы стандартных предположений для процесса инноваций, которые необходимы для выполнения функциональной центральной предельной теоремы для частичной суммы e_t. Заинтересованный читатель может обратиться, например, к книгам (Davidson, 1994; White, 2001).

7 Далее BLS.

соответствующих фиктивных переменных), и тогда можно использовать стандартное распределение Дики–Фуллера для проверки гипотезы единичного корня. Последний результат важен, потому что он показывает, что нет необходимости использования усечения (trimming) около концов выборки, например, исключения 15% наблюдений с каждой из сторон для возможных дат сдвигов. Также слабая сходимость выполняется при равномерной (sup) метрике, в отличие от ZA, которые использовали гибридную $\sup/L^2$ метрику.

Второй метод в (Perron, 1997) заключается в том, чтобы минимизировать *t*-статистику $t_{\hat{\mu}_1}$ параметра μ_1, связанного с изменением в константе (для модели со сдвигом в константе), либо *t*-статистику $t_{\hat{\beta}_1}$ параметра β_1, связанного с изменением в наклоне тренда (для моделей со сдвигом в тренде). Такая процедура, однако, не может хорошо работать без каких-либо априорных знаний о знаке параметра структурного сдвига, поэтому Perron предложил также статистики, основанные на максимизации абсолютного значения $t_{\hat{\mu}_1}$ и $t_{\hat{\beta}_1}$.

Асимптотические критические значения теста Perron (1997) были получены для каждого вида тестовой статистики. Также были получены критические значения для конечных выборок с использованием двух различных методов выбора числа лагов (на основе F- или t-статистик).

Другие подходы тестирования гипотезы единичного корня при неизвестной дате сдвига (или сдвигов, если их несколько) обсуждаются в (Perron, 2006, Section 5.4.1.).

3. Современные подходы к тестированию гипотезы единичного корня при наличии структурных сдвигов

Тесты, рассмотренные в предыдущем разделе, являлись очень популярными на протяжении долгого времени. Однако для случая неизвестной даты сдвига тесты имеют серьезный недостаток, который противоречит исходной формулировке Perron. Структурный сдвиг в них предполагается только для альтернативной гипотезы, но не допускается для нулевой гипотезы о наличии единичного корня. Если бы он предполагался для нулевой гипотезы, это бы означало, что сдвиг в уровне должен рассматриваться как результат появления инновации, соответствующей хвосту распределения инноваций, а изменение в наклоне тренда связано с различными средними ошибок в некоторых подвыборках. Другими словами, при нулевой гипотезе можно рассмотреть модель из уравнения (6), но взяв первую разность всех переменных. Такая постановка существенно упрощает процедуру поиска неизвестной даты излома и получение различных процедур тестирования на единичный корень, например, путем минимизации *t*-статистики, используемой в критерии Дики–Фуллера, по всем возможным датам излома. Но если шумовой компонент содержит единичный корень, а в функции тренда процесса порождения данных происходит структурный сдвиг, то такая процедура проверки на единичный корень приводит к искажению размера критерия, так что гипотеза единичного корня отвергается слишком часто. Применяя такую процедуру, исследователь может ошибочно решить, что ряд является стационарным с изломом, когда в действительности этот ряд является нестационарным с изломом. К тому же процедуры типа ZA не являются инвариантными к параметрам сдвига (может иметь место частое ошибочное отвержение нулевой гипотезы при увеличении размера сдвига), и мощность таких тестов существенно меньше мощности тестов исходной работы Perron (1989).

Vogelsang и Perron (1998) показали, что t-статистика расходится к $-\infty$[8], когда присутствует изменение в наклоне тренда при нулевой гипотезе. Из этого следует, что отклонение гипотезы происходит из-за присутствия процесса с единичным корнем со сдвигом в тренде. Причина заключается в том, что в случае с фиксированной датой сдвига, как в работе (Perron, 1989), t-статистика инвариантна относительно значений параметров детерминированной функции и при нулевой, и при альтернативной гипотезах. Но когда происходит поиск по всем возможным датам сдвигов, эта инвариантность не выполняется. Случай модели только со сдвигом в уровнях без наличия тренда был рассмотрен в (Perron, Vogelsang, 1992a). В этом случае t-статистика асимптотически инвариантна относительно значения сдвига в уровнях, но не на конечных выборках. Симуляции в (Perron, Vogelsang, 1992b) показали искажения размера, возрастающие с увеличением величины сдвига в уровнях. Авторы, однако, заявили, что такие существенные искажения являются эффектом только неправдоподобно больших сдвигов, которые не возникают на практике. В (Vogelsang, Perron, 1998) были получены те же самые результаты в случае сдвига в тренде. Но даже хотя на практике искажения могут быть небольшими, особенность формулировки нулевой гипотезы, при которой не происходит никакого сдвига, остается необоснованной.

В работе (Kim, Perron, 2009) авторы вернулись к оригинальной формулировке Perron, утверждая, что тест ZA «неадекватен и может приводить к вводящим в заблуждение результатам». В этой работе рассматривались тесты с аддитивным сдвигом и с инновационным сдвигом, и использовалась первоначальная формулировка Perron, допускающая структурный сдвиг и при нулевой, и при альтернативной гипотезах. Авторы предложили процедуру нахождения дат изломов, для которой предельное распределение тестов в случае неизвестной даты сдвига то же самое, что и при известной дате сдвига. При этом они ограничились случаем единственного структурного сдвига, полагая, что данный подход может быть распространен и на случай произвольного числа сдвигов. Такое обобщение было предложено в работе (Carrion-i-Silvestre et al., 2009), однако только для случая аддитивных сдвигов. Подобный подход был также рассмотрен в работе (Harris et al., 2009), но только для случая единственного структурного сдвига. В следующих подразделах будут приведены последние исследования и результаты, посвященные рассматриваемой в настоящей работе проблеме. В разделе 3.1 обсуждается важный сопутствующий вопрос, связанный с тем, с какой скоростью сходятся различные оценки дат сдвигов к своим истинным аналогам (т. е. насколько точно оценивается дата сдвига на конечных выборках). В разделе 3.2 рассматриваются недавние подходы для тестирования гипотезы единичного корня, когда сдвиги могут происходить и при нулевой, и при альтернативной гипотезах, но их точные даты неизвестны. Раздел 3.3 описывает проблемы, связанные с методами, основанными на минимизации тестовых статистик по всем возможным датам сдвигов, и предложенные решения. Наконец, в разделе 3.4 даются рекомендации, как эффективно использовать одновременно несколько тестов, когда неизвестно, имеется ли структурный сдвиг в данных или нет.

[8] Некоторые замечания об их работе будут рассмотрены в разделе 3.3.

3.1. Оценивание даты сдвига

Для начала стоит обсудить вопросы нахождения оценки даты сдвига и ее асимптотические свойства. В работе (Perron, Zhu, 2005) исследуется состоятельность и скорость сходимости оценок дат структурных сдвигов, а также их предельное распределение. Кроме этого, устанавливается предельное распределение оценок параметров, отвечающих за детерминированный компонент.

Рассматривается следующая спецификация модели, где зависимая переменная y_t состоит из суммы систематической части (или детерминированного компонента) d_t и случайного компонента u_t:

$$y_t = d_t + u_t. \tag{7}$$

Асимптотические результаты были получены для двух различных предположений об ошибках $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$: при $|\rho|<1$ (процесс $I(0)$) и $\rho = 1$ (процесс $I(1)$), где e_t является стационарным процессом и удовлетворяет стандартным предположениям.

Авторы рассматривают три типа моделей, отличающихся детерминированным компонентом:

$$d_t = \begin{cases} \mu_0 + \beta_0 t + \beta_1 DT_t & \text{для Модели I,} \\ \mu_0 + \beta_0 t + \mu_1 DU_t + \beta_1 DT_t & \text{для Модели II,} \\ \mu_0 + \beta_0 t + \mu_1 DU_t + \beta_1 DT_t^* & \text{для Модели III,} \end{cases}$$

где DU_t и DT_t определяются, как и ранее, а $DT_t^* = \mathrm{I}(t > T_1)t$, T_1 — дата сдвига. Модель I соответствует Модели B в оригинальной формулировке Perron (1989). Perron и Zhu называют эту модель «joint broken trend», т. к. функция тренда непрерывна в момент времени T_1. Также коэффициент изменения наклона тренда (или скорость роста, когда применяется логарифмическое преобразование) изменяется с β_0 до $\beta_0 + \beta_1$ в момент времени T_1. Модель II соответствует Модели C из Perron (1989) и называется «local disjoint segmented trend». Модель III приводит численно к точно таким же результатам при оценивании, как и Модель II, но к совершенно другим асимптотическим выводам, касающимся скорости сходимости и предельных распределений оценок. Эта модель называется «global disjoint segmented trend», т. к. в отличие от предыдущей она предполагает, что относительный уровень в дате сдвига (к общему уровню функции тренда) сходится к $\beta_1/\beta_0 \neq 0$ при $T \to \infty$, т. к. $d_{T_1+1} - d_{T_1} = \beta_0 + \mu_1 + \beta_1 T_1$.

Авторы анализировали по две спецификации каждой модели, с $I(0)$ и $I(1)$ ошибками. Процесс порождения данных для Моделей II и III может быть обобщен, если допустить, что параметр μ_1 в Модели II может быть функцией от величины выборки, т. е. $\mu_1 = \kappa_1 T^{\varpi}$ для некоторого $\kappa_1 > 0$ и $\varpi \geq 0$. Тогда Модель II получается при $\varpi = 0$, а Модель III — при $\varpi = 1$.

Если дата сдвига неизвестна, то ее поиск производится через минимизацию сумм квадратов остатков по всем возможным датам сдвигов. Более конкретно,

$$\hat{T}_1 = \underset{T_1}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2, \tag{8}$$

где $\hat{u}$ — остатки от регрессии y_t на соответствующий детерминированный компонент.

Были получены следующие результаты о скорости сходимости доли даты сдвига $\hat{\lambda}_1 = \hat{T}_1 / T$ (где λ_1^0 — истинная доля даты сдвига):

1) в Модели I с $I(1)$ ошибками $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = O_p(T^{-1/2})$, а с $I(0)$ ошибками $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = O_p(T^{-3/2})$;
2) в Модели II с $I(1)$ ошибками $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = O_p(T^{-1/2})$, а с $I(0)$ ошибками $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = O_p(T^{-1})$;
3) в Модели II с $I(1)$ ошибками при $\mu_1 = \kappa T^{\varpi}$:
   (a) если $\varpi < 1/2$, то $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = O_p(T^{-1/2})$, (b) если $\varpi > 1/2$, то $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = o_p(T^{-2\varpi-1})$;
   в Модели II с $I(0)$ ошибками при $\mu_1 = \kappa_1 T^{\varpi}$ и $\varpi > 1$ $\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0 = o_p(T^{-2\varpi-1})$;
4) в Модели III с $I(1)$ и $I(0)$ ошибками $\left|\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0\right| = o_p(T^{-3})$.

Заметим, что в случае $I(0)$ ошибок в Модели I доля даты сдвига сходится с более высокой скоростью ($O_p(T^{-3/2})$), чем в Модели II ($O_p(T^{-1})$), в которой присутствует фиктивная переменная, отвечающая за сдвиг в константе. Следовательно, включение в модель сдвига в уровнях может «загрязнить» точность оценивания даты сдвига.

Кроме скорости сходимости, авторами были получены предельные распределения оценок дат сдвигов для Моделей I и II (для Модели III получить скорость сходимости невозможно), что позволяет строить доверительные интервалы для дат сдвигов, если порядок интегрированности ошибок известен. Например, для Модели I предельные распределения имеют простой вид:

- если ошибки $I(1)$, то $T^{1/2}(\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0) \xrightarrow{d} N\left(0, 2\sigma^2 / \left[15(\beta_1)^2\right]\right)$;
- если ошибки $I(0)$, то $T^{3/2}(\hat{\lambda}_1 - \lambda_1^0) \xrightarrow{d} N\left(0, 4\sigma^2 / \left[\lambda_1^0(1-\lambda_1^0)(\beta_1)^2\right]\right)$.

Видно, что предельное распределение является нормальным для обоих типов ошибок и не зависит от структуры ошибок, т.е. результат остается тем же самым независимо от природы серийной корреляции. Кроме того, в случае $I(1)$ ошибок предельное распределение инвариантно относительно местоположения сдвига, но это неверно для $I(0)$ ошибки. В последнем случае дисперсия наименьшая, когда сдвиг находится в середине выборки. Также в обоих случаях дисперсия уменьшается при росте сдвига в наклоне тренда (за который отвечает параметр β_1). Полученное простое асимптотическое распределение позволяет легко строить доверительные интервалы. Предельное распределение, полученное авторами для Модели II, сильно отличается от полученного для Модели I — оно является бимодальным и выражается в виде функции от двухстороннего случайного процесса (two-sided random process), включающего много мешающих параметров.

В (Deng, Perron, 2006) производится сравнение подхода (Perron, Zhu, 2005), который основан на асимптотической структуре с «неограниченным трендом» (‘unbounded-trend’ asymptotic framework), с альтернативным подходом, основанным на асимптотической структуре с «ограниченным трендом» (‘bounded-trend’ asymptotic framework). В качестве простого примера с отсутствием сдвига, первому случаю соответствует описание детерминированного компонента как $\mu + \beta t$, а второму — как $\mu + \beta(t/T)$, так что тренд будет ограничен и лежать в интервале [0,1] (см., например, (Bai, 1997)). В пользу последнего подхода свидетельствует то, что он предлагает более трактуемые результаты. При $I(1)$ ошибках асимптотика с «ограниченным трендом» будет малопригодной, поскольку (стохастически неограниченная) шумовая компонента будет подавлять любой сигнал в тренде. Для стационарных ошибок результаты становятся более интересными. Если константа μ не изменяется одновременно с наклоном тренда, то обе асимптотические структуры приводят к одинаковой аппроксимации. Однако если допускается изменение константы вне зависимости от того, изменяется ли она на самом деле или нет, асимптотическая структура с «ограниченным трендом» полностью пропускает важные особенности распределения оценки даты сдвига на конечных выборках, особенно выраженную бимодальность распределения, обнаруженную в (Perron, Zhu, 2005) и хорошо отражаемую в асимптотической структуре с «неограниченным трендом». Симуляции подтверждают теоретические результаты, которые выявляют недостатки асимптотической структуры с «ограниченным трендом» в контексте моделей со структурными сдвигами.

В работе (Chang, Perron, 2016) обобщаются результаты (Perron, Zhu, 2005) на случай дробно-интегрированных ошибок с параметром памяти d (параметр дробной интегрированности).

Поиск датировки сдвига согласно минимизации суммы квадратов остатков в модели в уровнях (оценка доли даты сдвига будет тогда суперсостоятельной при стационарных ошибках) является наиболее популярным, хотя существуют некоторые его модификации. Эти модификации решают проблему недостаточной скорости сходимости доли даты сдвига при нестационарных ошибках, что влияет на выводы тестов на единичный корень. Например, в работе (Carrion-i-Silvestre et al., 2009) производится предварительное (квази) GLS-детрендирование ряда y_t. Пусть ряд y_t порождается как

$$y_t = \mu_0 + \beta_0 t + \mu_1 DU_t + \beta_1 DT_t + u_t, \tag{9}$$

где u_t может быть $I(0)$ или $I(1)$, т.е. $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$. Процедура GLS-детрендирования является аналогом преобразования, используемого для устранения автокоррелированности ошибок в процедуре Кохрейна–Оркатта. А именно, вместо оценивания вектора параметров детерминированного компонента $\phi = \left(\mu_0, \beta_0, \mu_1, \beta_1\right)$ в линейной модели регрессии переменной y_t на $X_t\left(\lambda_1^0\right) = [x_1, \ldots, x_T]'$, где $x_t = \left[1, t, DU_t, DT_t\right]$, производится оценивание этого вектора в модели

$$y_t^{\bar{\rho}} = X_t^{\bar{\rho}}\left(\lambda_1^0\right)\phi + u_t^{\bar{\rho}}, \tag{10}$$

где $y_t^{\bar{\rho}}$ принимает значения $y_1, \left(1-\bar{\rho}L\right)y_2, \ldots, \left(1-\bar{\rho}L\right)y_T$, а $X_t^{\bar{\rho}}\left(\lambda_1^0\right)$ — значения $x_1, \left(1-\bar{\rho}L\right)x_2, \ldots, \left(1-\bar{\rho}L\right)x_T$. GLS-оценка $\hat{\phi}$ вектора ϕ есть OLS-оценка вектора коэффициентов в уравнении (10).

В (Carrion-i-Silvestre et al., 2009) предлагается выбирать $\bar{\rho} = 1 + \bar{c}/T$ в зависимости от датировки структурного сдвига ($\bar{c}$ называется параметром нецентральности), т.к. априори неизвестен порядок интегрированности ряда u_t (хотя можно использовать и некоторое фиксированное $\bar{c}$, как в (Harvey et al., 2013b)). Тогда оценка доли даты сдвига выражается как

$$\hat{\lambda}_1^{\bar{\rho}} = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}}\, S(\bar{\rho}, \lambda_1), \tag{11}$$

где $(\bar{\rho}, \lambda\ )$ — сумма квадратов остатков в регрессии (10), а $\Lambda(\varepsilon)$ — множество допустимых значений λ_1, зависящее от некоторого параметра ε. Полученная оценка будет суперсостоятельной оценкой доли даты сдвига при обоих типах ошибок ($I(0)$ или $I(1)$).

Однако в (Harvey, Leybourne, 2013)[9] предлагается альтернативный алгоритм, также робастный к порядку интегрированности ряда $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$. Пусть порядок интегрированности известен. Тогда, если $\rho = 0$, то оптимальная оценка доли даты сдвига была бы следующей:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} S(0,\lambda_1) = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^{T} \left(y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\beta}_0 t - \hat{\mu}_1 DU_t - \hat{\beta}_1 DT_t \right)^2, \tag{12}$$

а если бы $\rho = 1$, то

$$\hat{\lambda}_1^{(1)} = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} S(1,\lambda_1) = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^{T} \left(\Delta y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\mu}_1 D_t(T_1) - \hat{\beta}_1 DU_t \right)^2, \tag{13}$$

где $D_t(T_1) = \mathrm{I}(t = T_1 + 1)$. Оценка доли даты сдвига согласно (13) используется в работе (Harris et al., 2009), где доказывается ее суперсостоятельность вне зависимости от типа ошибок (см. раздел 3.2).

На практике, конечно, значение параметра ρ априори неизвестно, поэтому авторы предлагают некоторую гибридную оценку доли даты сдвига, которая выбирает между $\hat{\lambda}_1^{\bar{\rho}}$, $|\bar{\rho}| < 1$, и $\hat{\lambda}_1^{(1)}$ в зависимости от свойств выборки. Если рассматриваются только два возможных значения: $\bar{\rho} = \rho'$ и $\bar{\rho} = 1$, то выбор между оценками $\hat{\lambda}_1^{\rho'}$ и $\hat{\lambda}_1^{(1)}$ осуществляется на основе того, при какой оценке сумма квадратов остатков будет наименьшей, т. е.:

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_1^{\rho'}, \text{ если } \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)} S(\rho',\lambda_1) < \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)} S(1,\lambda_1), \\ &\hat{\lambda}_1^{(1)}, \text{ если } \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)} S(\rho',\lambda_1) > \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)} S(1,\lambda_1). \end{aligned}$$

Другим способом записать это выражение гибридной оценки можно так:

$$\hat{\lambda}_1^{D_2} = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon), \bar{\rho} \in D_2}{\operatorname{argmin}} S(\bar{\rho},\lambda_1), \tag{14}$$

где $D_2 = \{\rho', 1\}$ — множество, состоящее из элементов ρ' и 1.

Можно доказать, что таким образом в случае $I(1)$ $\hat{\lambda}_1^{D_2} = \hat{\lambda}_1^{(1)}$ асимптотически, как было бы желательно. Однако в случае $I(0)$ $\hat{\lambda}_1^{D_2} = \hat{\lambda}_1^{\rho'}$, если $\rho < \rho'$ и ρ ближе к ρ', чем к 1, в противном случае будет выбрана оценка $\hat{\lambda}_1^{(1)}$, которая не является эффективной в случае $I(0)$. Для иллюстрации, пусть $|\rho| < 1$ и полагается $\rho' = 0$, т. е. $\hat{\lambda}_1^{D_2}$ выбирает между оценками доли даты сдвига между уровнями и первыми разностями. Тогда $\hat{\lambda}_1^{D_2} = \hat{\lambda}_1^{(1)}$ (неэффективная оценка) при $\rho > 0.5$. С другой стороны, если положим $\rho' = 0.9$, то $\hat{\lambda}_1^{D_2} = \hat{\lambda}_1^{(1)}$ выбирается в случае $\rho > 0.95$. Таким образом, можно выбрать произвольно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho' = 1 - \varepsilon$, чтобы уменьшить проблемный интервал до $\rho > 1 - \varepsilon / 2$.

---

[9] Далее HL.

Однако, несмотря на асимптотические результаты, на конечных выборках ρ' может иметь значимое влияние на поведение $\hat{\lambda}_1^{D_2}$ даже при условии, что $\rho-\rho'<1-\rho$. Поэтому выбор ρ' близким к единице может привести к нежелательным свойствам. Harvey и Leybourne (2013) рассмотрели обобщение гибридной оценки, заменяя двухэлементное множество D_2 на m-элементное $D_m=\{\rho'_1,\rho'_2,\ldots,\rho'_{m-1},1\}$, где $|\rho'_i|<1$ для любого i и, без потери общности, $-1<\rho'_1<\rho'_2<\ldots<\rho'_{m-1}<1$. Эту гибридную оценку можно записать как

$$\hat{\lambda}_1^{D_m}=\underset{\lambda_1\in\Lambda(\varepsilon),\bar{\rho}\in D_m}{\operatorname{argmin}} S(\bar{\rho},\lambda_1). \tag{15}$$

Полученное предельное распределение показывает, что при ρ'_{m-1}, достаточно близким к единице, оценка (15) имеет требуемые асимптотические свойства. Поведение на конечных выборках согласуется с асимптотическим, поэтому использование этой оценки наиболее предпочтительно применять на практике. В качестве D_m авторы предлагают использовать $D_m=\{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95, 0.975, 1\}$ [10]. Причина заключается в том, что отрицательная серийная корреляция обычно не наблюдается на практике, а также что серийная корреляция часто может быть строго положительной, поэтому включение значения 0.975 допускает малый интервал $0.975<\rho<1$ для неадекватного асимптотического выбора, обсужденного ранее. Естественно также допустить обобщение процедуры на случай произвольного числа структурных сдвигов, хотя и с серьезным увеличением вычислительного времени.

Естественное обобщение описанного подхода — построить доверительное множество для даты сдвига. Проблема снова заключается в том, что достоверная спецификация доверительного множества для даты сдвига будет зависеть от порядка интегрированности данных. Подход (Elliott, Müller, 2007) для построения доверительного множества соответствует только случаю $I(0)$ ошибок, но при $I(1)$ уровень накрытия доверительного множества не будет корректным даже асимптотически. Хотя доверительное множество можно построить на основе асимптотического распределения оценки доли даты сдвига, существуют методы, позволяющие получить более мощную процедуру (с точки зрения более узких доверительных интервалов). Данный подход основан на том, что доверительный интервал можно рассматривать как множество неотвергнутых гипотез. Тогда можно было бы тестировать гипотезы о разных местоположениях структурного сдвига, и включать этот сдвиг в доверительное множество, если гипотеза не отвергается[11]. Другими словами, можно тестировать гипотезу $\mathbf{H_0}:\lfloor\lambda_0T\rfloor=\lfloor\lambda T\rfloor$ (λ_0 — истинная доля даты сдвига, $\lfloor\cdot\rfloor$ здесь и далее — целая часть числа) против альтернативы $\mathbf{H_1}:\lfloor\lambda_0T\rfloor\neq\lfloor\lambda T\rfloor$. Тогда доверительное множество на уровне $(1-\xi)$ для λ_0 строится, согласно (Elliott, Müller, 2007), путем обращения последовательности тестов $\mathbf{H_0}:\lfloor\lambda_0T\rfloor=\lfloor\lambda T\rfloor$ на уровне значимости ξ для $\lfloor\lambda\rfloor\in\Lambda(\varepsilon)$, так что доверительное множество состоит из всех $\lfloor\lambda T\rfloor$, для которых $\mathbf{H_0}$ не отвергается. В качестве теста авторами предлагается статистика отношения правдоподобий. Для того чтобы устранить зависимость статистики отношения правдоподобий от параметров при сдвигах, рассматриваются тесты, которые максимизируют средневзвешенную мощность.

---

[10] Если нужно гарантировать суперсостоятельность при $I(1)$ ошибках, то достаточно не рассматривать значения, близкие к нулю, что согласуется с результатами (Carrion-i-Silvestre et al., 2009).

[11] Конечно, в этом случае доверительное множество может быть и разрывным.

В (Harvey, Leybourne, 2015) предлагается обобщение подхода (Elliott, Müller, 2007) на случай неопределенности относительно порядка интегрированности ряда. Для того чтобы устранить зависимость статистики отношения правдоподобий от параметров при сдвигах, авторы рассматривают тесты, которые максимизируют критерий средневзвешенной мощности. Harvey и Leybourne получают локально наилучший инвариантный тест $S(\lambda)$, который выражается:

при $I(0)$ ошибках ($\rho = 0$) как

$$S_0(\lambda) = \lfloor \lambda T \rfloor^{-2} \sum_{t=2}^{\lfloor \lambda T \rfloor - 1} \left(\sum_{s=1}^{t} \hat{u}_s \right)^2 + \lfloor \lambda T \rfloor^{-4} \sum_{t=2}^{\lfloor \lambda T \rfloor - 1} \left(\sum_{s=1}^{t} (s-t)\hat{u}_s \right)^2 +$$

$$+ (T - \lfloor \lambda T \rfloor)^{-2} \sum_{t=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{T-2} \left(\sum_{s=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{t} \hat{u}_s \right)^2 + (T - \lfloor \lambda T \rfloor)^{-4} \sum_{t=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{T-2} \left(\sum_{s=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{t} (s-t)\hat{u}_s \right)^2,$$

где $\hat{u}_t$ — остатки от OLS-регрессии y_t на детерминированный компонент при $I(0)$ ошибках;

а при $I(1)$ ошибках ($\rho = 1$) как

$$S_1(\lambda) = \lfloor \lambda T \rfloor^{-1} \sum_{t=2}^{\lfloor \lambda T \rfloor - 1} \hat{u}_{t+1}^2 + \lfloor \lambda T \rfloor^{-2} \sum_{t=2}^{\lfloor \lambda T \rfloor - 1} \left(\sum_{s=2}^{t} \hat{u}_s \right)^2 +$$

$$+ (T - \lfloor \lambda T \rfloor)^{-1} \sum_{t=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{T-2} \hat{u}_{t+1}^2 + (T - \lfloor \lambda T \rfloor)^{-2} \sum_{t=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{T-2} \left(\sum_{s=\lfloor \lambda T \rfloor + 1}^{t} \hat{u}_s \right)^2,$$

где $\hat{u}_t$ — остатки от OLS-регрессии в разностях, Δy_t, на соответствующий детерминированный компонент при $I(1)$ ошибках.

Предельные распределения $\omega_e^{-2} S_0(\lambda)$ и $\omega_u^{-2}(S_1(\lambda) - 2\sigma_u^2)$ не зависят от мешающих параметров и от λ. Вычитание σ_u^2 из $S_1(\lambda)$ появляется из-за того, что первый и третий члены в выражении для $S_1(\lambda)$ сходятся к σ_u^2. Эти выражения связаны с тестированием фиктивной переменной на одно наблюдение, которое появляется из-за взятия первой разности переменной, отвечающей за сдвиг в уровнях. В этом случае при наличии только сдвигов в уровнях при гипотезе $I(0)$ тест $S_1(\lambda)$ не будет иметь никакой мощности для их идентификации, и немасштабированный сдвиг в уровнях не играет никакой роли асимптотически в $I(1)$ рядах. Однако, оставляя эти компоненты в статистике $S_1(\lambda)$ и соответствующим образом выбирая оценку для σ_u^2, можно получить улучшение для конечных выборок.

При некорректном предположении о порядке интегрированности $\omega_e^{-2} S_0(\lambda)$ расходится к бесконечности ($O_p(T^2)$), т. е. доверительное множество будет асимптотически пустым (нулевое накрытие), а $\omega_u^{-2}(S_1(\lambda) - 2\sigma_u^2)$ будет сходиться по вероятности к константе. Если эта константа превышает критическое значение, то доверительное множество также будет асимптотически пустым. Если константа меньше критического значения, доверительное множество будет асимптотически полным (стопроцентное накрытие доверительным интервалом).

Какой из этих двух случаев будет соответствовать данным, зависит от ω_u^2, $\mathrm{E}(\Delta e_t)^2$ и σ_u^2. В целом, некорректное предположение о порядке интегрированности может сильно повлиять на доверительное множество.

Для построения доступных тестов в (Harvey, Leybourne, 2015) рекомендуется вместо истинных значений дисперсий ω_e^2, ω_u^2 и σ_u^2 использовать их оценки, при этом на симуляциях показывается, что авторегрессионная оценка долгосрочной дисперсии работает лучше непараметрической. В качестве оценки для доли даты сдвига для построения оценок этих дисперсий предлагается использовать гибридную оценку HL, описанную выше. Такой выбор улучшает мощность при альтернативной гипотезе, и оценки дисперсий обладают теми же самыми асимптотическими свойствами, что и при произвольном выборе даты сдвига. Далее, чтобы выбрать, какую из статистик, $\hat{\omega}_e^{-2}(\hat{\lambda}_1^{D_m})S_0(\lambda)$ или $\hat{\omega}_u^{-2}(\hat{\lambda}_1^{D_m})(S_1(\lambda)-2\sigma_u^2(\hat{\lambda}_1^{D_m}))$, использовать для построения доверительного множества, предлагается предварительно применять тест на единичный корень (с учетом сдвига). Тогда, в зависимости от выбора порядка интегрированности, можно использовать одну из них.

3.2. Тесты на единичный корень, использующие оценки дат сдвигов

Одна из наиболее общих моделей для тестирования гипотезы единичного корня при наличии структурных сдвигов была предложена в (Carrion-i-Silvestre et al., 2009)[12].

Пусть y_t — стохастический процесс, который порождается следующим образом:

$$y_t = d_t + u_t, \tag{16}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t, \tag{17}$$

где e_t — ненаблюдаемый стационарный процесс инноваций.

По аналогии с (Perron, 1989) рассматриваются три модели: Модель 0 («изменение в уровнях», или модель краха), Модель I («изменение роста») и Модель II («совместный эффект»). Определим фиктивные переменные, отвечающие за сдвиги как

$$DU_t(T_j^0) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > T_j^0, \\ 0, & \text{если } t \le T_j^0, \end{cases} \quad DT_t(T_j^0) = \begin{cases} t - T_j^0, & \text{если } t > T_j^0, \\ 0, & \text{если } t \le T_j^0, \end{cases}$$

где $T_j^0 = \lfloor T\lambda_j^0 \rfloor$ обозначает дату j-го сдвига, параметр $\lambda_j^0 \equiv T_j^0 / T \in (0,1)$ — доля даты j-го структурного сдвига на периоде наблюдений. Для удобства полагаем $T_0^0 = 0$ и $T_{m+1}^0 = T$, где m — число структурных сдвигов ($m+1$ режимов). При этом m параметров долей дат сдвигов объединяются в вектор $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0)$. Первоначально предполагается, что даты структурных сдвигов известны.

12 Далее СКР.

Детерминированный компонент из (16) определяется как

$$d_t = z_t'\left(T_0^0\right)\phi_0 + z_t'\left(T_1^0\right)\phi_1 + \ldots + z_t'\left(T_m^0\right)\phi_m \equiv z_t'\left(\lambda^0\right)\phi, \tag{18}$$

где $z_t\left(\lambda^0\right) = [z_t'\left(T_0^0\right), \ldots, z_t'\left(T_m^0\right)]'$ и $\phi = \left(\phi_0', \ldots, \phi_m'\right)$.

Соответственно, $z_t\left(T_0^0\right) \equiv z_t(0) = (1, t)'$ с $\phi_0 = (\mu_0, \beta_0)'$ и

$$z_t\left(T_j^0\right) = \begin{cases} DU_t(T_j^0) & \text{в Модели 0,} \\ DT_t(T_j^0) & \text{в Модели I,} \\ (DU_t(T_j^0), DT_t(T_j^0)) & \text{в Модели II,} \end{cases}$$

где $1 \le j \le m$ с $\phi_j = \mu_j$ для Модели 0, $\phi_j = \beta_j$ для Модели I и $\phi_j = (\mu_j, \beta_j)'$ для Модели II. Также в Модели 0 можно допустить наличие детерминированного тренда, так что $\phi_0 = (\mu_0, \beta_0)'$, а $\phi_j = \mu_j$. В Моделях 0 и II сдвиг в уровнях принадлежит классу медленно растущего тренда (slowly evolving trend), определенному в (Elliott et al., 1996). Фактически это будет далее означать, что асимптотическое распределение предложенных авторами тестов не будет меняться в зависимости от наличия сдвигов в уровнях.

Для проверки гипотезы $\mathbf{H_0}: \rho = 1$ (процесс y_t с единичным корнем) против альтернативы $\mathbf{H_1}: |\rho| < 1$ (стационарность относительно структурных сдвигов) производится предварительное GLS-детрендирование ряда y_t с использованием уравнения (10) и оцениваются даты сдвигов с использованием аналога уравнения (11) с соответствующими изменениями. Поскольку оценки дат сдвигов являются суперсостоятельными, их можно использовать как истинные в построении тестовых статистик, тем самым сохранив предельное распределение этих тестовых статистик, как если бы даты сдвигов были известны. В качестве тестов в (Carrion-i-Silvestre et al., 2009) были предложены модификации тестов (Ng, Perron, 2001), а именно, точечно оптимальный тест и модифицированные тесты Филлипса–Перрона (Phillips, Perron, 1988) из (Stock, 1999), для построения которых используются GLS-остатки, учитывающие структурные сдвиги.

Симуляции показывают очень хорошие свойства рассмотренных тестов на конечных выборках. Вместе с тем, размер теста несколько выше номинального, когда коэффициенты β близки к нулю, т. е. в случае малых сдвигов, см. (Harvey et al., 2013b).

Та же самая проблема, что и в СКР тесте, была рассмотрена в работе (Harris et al., 2009)[13], хотя их подход является несколько иным и ограничен случаем только одного структурного сдвига в Модели I[14]. Так же как и в тесте СКР, рассматривается модель (16)–(17). Соответствующий детерминированный компонент тот же, что и в уравнении (18) для Модели I. Начальная оценка даты структурного сдвига определяется как

[13] Далее HHLT.

[14] В этой модели имеются те же самые результаты, что и в модели II, т. к. эффект $\hat{\mu}_j - \mu_j$ асимптотически незначителен. Это происходит потому, что изменения в уровнях есть специальный случай медленно меняющегося детерминированного компонента (slowly evolving deterministic component) в условии B из (Elliott et al., 1996).

$$\tilde{\lambda}_1 = \underset{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)}{\operatorname{argmin}} \tilde{\sigma}^2(\lambda_1), \tag{19}$$

где $\tilde{\sigma}^2(\lambda_1) = T^{-1}\sum_{t=2}^{T}\tilde{\nu}_t(\lambda_1)^2$ и $\tilde{\nu}_t(\lambda_1)$ — OLS-остатки регрессии

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 DU_t(T_1) + \omega_t. \tag{20}$$

Другими словами, оценка даты сдвига основана на регрессии в первых разностях. Эта оценка будет суперсостоятельной, как и оценка в СКР, основанная на GLS-детрендированных данных. Проблема, однако, в том, что в тесте HHLT, так же как и в СКР тесте, делается предположение о наличии структурного сдвига[15], но когда структурного сдвига нет, происходит большая потеря мощности теста, поскольку можно было бы использовать тест без учета сдвига. Для предотвращения этого строится модифицированная оценка доли даты сдвига $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda}_1 = (1-\bar{\theta})\tilde{\lambda}_1, \tag{21}$$

а вспомогательная функция $\bar{\theta}$ определяется как

$$\bar{\theta} = \exp\left(-gT^{-1/2}W_T\left(\tilde{\lambda}_1\right)\right), \tag{22}$$

где g — некоторая константа (предлагается использовать значения $g = 1.5,\ 3$ и 6) и $W_T(\tilde{\lambda})$ — немасштабированная статистика Вальда для тестирования гипотезы $\beta_1 = 0$ в аналоге уравнения регрессии (20), использующего частичные суммы. Если статистика будет очень большой, то $\bar{\theta}$ будет близко к нулю, и $\bar{\lambda}_1$ будет близко к $\tilde{\lambda}_1$. В противном случае $\bar{\lambda}_1$ близко к 0.

Соответственно, HHLT предлагают следующую тестовую процедуру. Если $\bar{\lambda}_1$ лежит правее некоторого значения ε, т. е. попадает в интервал, где допускается наличие структурного сдвига, то применяется тест на единичный корень, соответствующий случаю наличия структурного сдвига. Если $\bar{\lambda}$ лежит левее ε, то применяется тест на единичный корень для ряда, не имеющего никакого сдвига (стандартный тест с трендом). Другими словами, статистика теста на единичный корень имеет вид

$$t(\bar{\lambda}_1) = \begin{cases} ADF-GLS^t, & \text{если } \bar{\lambda}_1 < \varepsilon, \\ ADF-GLS^{tb}(\bar{\lambda}_1, \bar{c}), & \text{если } \bar{\lambda}_1 \geq \varepsilon, \end{cases} \tag{23}$$

где ε — параметр усечения (например 0.15), а $ADF-GLS$ — обычная t-статистика для проверки гипотезы единичного корня[16], индекс tb обозначает статистику, учитывающую наличие структурного сдвига, а индекс t — статистику, не учитывающую наличие структурного сдвига[17].

---

[15] В СКР — что их число известно.

[16] Предельное распределение статистики $ADF-GLS^{tb}(\bar{\lambda}_1, \bar{c})$ совпадает с предельным распределением статистики $MZ_t^{GLS}(\lambda^0)$ теста СКР.

[17] В работе (Kejriwal, Lopez, 2012) авторы используют $ADF-GLS^{tb}\left(\bar{\lambda}_1, c_{\bar{\lambda}_1}\right)$ для тестов, допускающих единственный структурный сдвиг, проверяя его наличие тестами на определение числа сдвигов. В HHLT также рассматривается возможность применения одного из таких тестов, а именно, (Harvey et al., 2009). См. также раздел 3.4.

Модели с аддитивными выбросами (AO модели) являются более популярными вследствие того, что их анализ проще моделей с аддитивными выбросами (IO). Одной из немногих работ, посвященных IO моделям, была статья (Kim, Perron, 2009). Хотя в этой работе рассмотрен случай только одного структурного сдвига, было отмечено, что модель легко обобщается на случай произвольного заданного числа структурных сдвигов без принципиального изменения асимптотических результатов. Авторы рассматривали IO и AO модели. Было также рассмотрено общее представление IO моделей, и проанализировано асимптотическое поведение оценки даты сдвига, полученного на основе минимизации сумм квадратов остатков в IO модели общего вида. Оказалось, что в таких моделях скорость сходимости оценки доли даты сдвига недостаточна для того, чтобы асимптотическое распределение тестовой статистики с оцененной датой сдвига совпадало с асимптотическим распределением тестовой статистики с известной (истинной) датой сдвига. Та же самая ситуация наблюдается и для AO моделей, как было ранее показано в (Perron, Zhu, 2005). Для AO моделей можно было бы использовать не статическую, а динамическую регрессию, как для IO моделей, добавляя лагированное значение y_{t-1}. Это приводит к суперсостоятельной оценке доли даты сдвига, но к не очень хорошим свойствам на малых выборках.

Исходя из указанных выше проблем, Kim и Perron предлагали использовать другой подход для тестирования, используя усеченный набор данных (trimmed data), что приводит к увеличению скорости сходимости и гарантирует, что предельное распределение тестовой статистики такое же, что и для известной даты сдвига. Основная идея — исключить некоторое окно данных около оцененной даты сдвига и применить тест на единичный корень к полученному ряду с помощью Модели I (без учета сдвига в константе).

Еще раз отметим, что такая процедура усечения данных применена из-за низкой скорости сходимости оценок долей дат структурных сдвигов, но она не является необходимой для процедуры GLS-типа, обсуждавшейся ранее для случая аддитивных выбросов. Понятно, что тесты CKP и HHLT, описанные в предыдущем разделе, можно использовать для тестирования наличия единичного корня в модели с инновационными выбросами после усечения данных.

Выше были рассмотрены только Модели I и II, имеющие тренд. Кратко рассмотрим модель, включающую сдвиг в уровнях, не имеющую изменения наклона тренда. Как замечено в (Perron, Zhu, 2005), для случая, когда величина сдвига фиксирована (не зависит от длины выборки), доля даты сдвига не может быть оценена состоятельно, т. к. в случае нулевой гипотезы процесс с интегрированными ошибками доминирует над сдвигом в уровне, и сам структурный сдвиг асимптотически пренебрежим. Поэтому при нулевой гипотезе, если оценка даты сдвига сходится по вероятности к любому значению из отрезка [0,1], t-статистика имеет то же самое предельное распределение, что и при известной дате сдвига. Тем самым, использование некорректной оценки доли даты сдвига не имеет значения асимптотически. Таким образом, даже стандартный тест на единичный корень без структурных сдвигов становится асимптотически робастен к сдвигу в константе, см. (Montanes, Reyes, 1999).

Однако использование некорректной даты сдвига может привести к существенному уменьшению мощности на конечных выборках. В этом случае применяется другой подход к тестированию на единичный корень в Моделях 0 и II, уже рассмотренный для теста CKP, в котором при увеличении выборки величина структурного сдвига возрастает, а именно, $(\mu_1,\ldots,\mu_m)=T^{1/2+\varpi}(\kappa_1,\ldots,\kappa_m)$, где $\varpi>0$. Такой подход полезен для получения лучшей аппроксимации свойств тестов на конечных выборках, когда величина сдвигов в уровнях достаточно велика, см. (Harvey et al., 2001). При таком подходе (для случая произвольного количества сдвигов) $\left\|\hat{\lambda}-\lambda^0\right\| = o_p\left(T^{-1}\right)$. Также, для Моделей 0 и II, при использовании такого подхода, необходимым условием того, что статистика теста на единичный корень при оцененных датах сдвигов имеет то же самое распределение, что и при известных датах, является $\left\|\hat{\lambda}-\lambda^0\right\| = o_p\left(T^{-1}\right)$. В этом случае нет необходимости использовать усеченный набор данных.

Отметим еще один важный подход, рассматривающий тестирование на единичный корень при наличии нескольких сдвигов в уровнях, (Cavaliere, Georgiev, 2007), где структурные сдвиги могут порождаться вспомогательной стохастической компонентой. Данный подход является полезным еще и потому, что, как замечено в HHLT, для случая более двух структурных сдвигов процедура СКР становится проблематичной на конечных выборках.

Обобщение тестов на единичный корень против альтернативы о дробно-интегрированном процессе при наличии структурного сдвига в тренде было предложено в (Iacone et al., 2017a; Chang, Perron, 2017).

3.3. Тесты, основанные на минимизации тестовой статистики

В работе (Harvey et al., 2013a) авторы вернулись к анализу теста ZA для модели изменения наклона тренда (без сдвига в уровнях):

$$y_t = \mu_0 + \beta_0 t + \beta_1 t + \beta_2 DT(\lambda_1) + u_t, \tag{24}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + e_t. \tag{25}$$

Однако, в отличие от ZA, был рассмотрен AO тип модели, в которой на первом шаге ряд детрендируется, а затем на втором шаге остатки проверяются на наличие единичного корня с использованием минимизации t-статистики по всем возможным датам структурного сдвига. В этой и других работах, упоминаемых в данном разделе, авторы анализируют поведение тестовых статистик, когда структурный сдвиг имеет место при нулевой гипотезе.

Асимптотическое поведение тестовой статистики говорит о том, статистика ZA будет неправильно отвергать нулевую гипотезу с вероятностью, приближающейся в пределе к единице, когда действительная доля даты сдвига лежит ниже $2/3$ (т. е. структурный сдвиг находится в первых двух третях выборки), а также, если структурный сдвиг присутствует при нулевой гипотезе (в отличие от ZA, где при нулевой гипотезе никакого структурного сдвига не происходило). Эта статистика, однако, не будет неверно отвергать нулевую гипотезу с вероятностью единица в пределе, если действительная доля даты сдвига выше $2/3$. Последнее противоречит результату (Vogelsang, Perron, 1998), в котором неправильное отклонение нулевой гипотезы происходит с вероятностью единица в пределе независимо от местоположения действительной даты сдвига[18]. Очевидно, что в реальности местоположение сдвига

[18] В (Vogelsang, Perron, 1998), однако, был рассмотрен случай IO моделей.

может быть неизвестно, поэтому в эмпирических приложениях будет возникать проблема некорректных результатов.

Симуляции подтверждают теоретические результаты, показывая, что для доли даты сдвига $\lambda_1^0 = 0.75$ размер теста несколько ниже номинального при любом размере выборки и любом размере сдвига. Если $\lambda_1^0 = 0.5$, то серьезные искажения размера наблюдаются только при очень больших выборках (больше 1600 наблюдений) и неправдоподобно больших сдвигах. Но если $\lambda_1^0 = 0.25$, то размер теста сильно увеличивается к единице даже при незначительном увеличении выборки и величины сдвига.

В (Harvey et al., 2013a) предлагается решение данной проблемы с использованием того результата, что тест ведет себя нормально, если сдвиг находится во второй половине выборки. Рассмотрим данные, полученные из исходных обращением времени (time-reverse data), т. е. полученные перестановкой наблюдений в обратном порядке — $\left\{y_{T-t+1}\right\}_{t=1}^{T}$ вместо $\left\{y_t\right\}_{t=1}^{T}$. Тогда любой сдвиг, находящийся в первой половине первоначальной выборки, перемещается во вторую половину выборки в обращенных во времени данных. Обозначим получившуюся ZA статистику для оригинальных данных как ZA_{AO}, а для обращенных во времени данных — как ZA'_{AO}. Так как априори неизвестно, в какой половине выборки действительно происходит структурный сдвиг, рассматривается максимум от этих двух статистик:

$$ZA_{AO}^{\max} = \max\left(ZA_{AO}, ZA'_{AO}\right). \tag{26}$$

Получившийся тест является робастным в том смысле, что процедура выбирает между ZA_{AO} и ZA'_{AO} на основе того, какая из статистик является наиболее благоприятной к нулевой гипотезе, устраняя возможность для размера теста быть выше номинального. Результаты симуляций показывают, что размер предложенной модификации теста близок к номинальному при любом местоположении сдвига для различных комбинаций объема выборки и величины сдвига (кроме слишком больших выборок более 1600 наблюдений в случае $\lambda_1^0 = 0.5$). Тест $ZA_{AO}^{\max}$ имеет высокую мощность независимо от того, присутствует ли сдвиг фактически или нет. Также симуляции показывают небольшое возрастание мощности по сравнению с обычным тестом ZA, что вместе с хорошим размером показывает превосходство предложенной процедуры над тестом ZA и дает возможность ее практического применения. Отметим, что формально процедура не будет обоснована асимптотически, если сдвиг находится во второй трети выборки.

В работе (Harvey, Leybourne, 2012) авторы рассмотрели асимптотическое поведение ZA теста при локальной альтернативе ($\mathbf{H_1}: \rho = 1 + c/T$, где $c < 0$), а также допуская соответствующий Питмановский снос[19] для параметра сдвига: $\beta_1 = \kappa\omega_e T^{-1/2}$ (в данном случае при $\kappa = 0$ альтернативная гипотеза редуцируется в нулевую), где ω_e^2 — соответствующая долгосрочная дисперсия процесса e_t. Однако, в отличие от (Harvey et al., 2013a), тестовая статистика была получена не путем минимизации *t*-статистики для проверки гипотезы $\rho = 1$, а путем минимизации нормализованного смещения коэффициента ρ, а именно, $T(\rho - 1)$. Тогда результирующая статистика есть

[19] Питмановский снос (Pitman drift) — последовательность локальных альтернатив в виде последовательности альтернативных процессов порождения данных, DGP, сближающихся с DGP, соответствующего нулевой гипотезе. Используется для анализа локальной мощности, которая дает более точное приближение результатов на конечных выборках.

$$DF_{\rho}^{\min} = \inf_{\lambda_1 \in \Lambda(\varepsilon)} DF_{\rho}(\lambda_1), \tag{27}$$

где $DF_{\rho}(\lambda_1) = T(\hat{\rho} - 1)$, а $\hat{\rho}$ — оценка коэффициента ρ в обычной ADF-регрессии ряда $\hat{u}_t$, где $\hat{u}_t$ — остатки от детрендирования ряда y_t.

Симуляции подтверждают, что асимптотический размер практически никогда не превышает номинальный уровень, кроме случаев очень маленьких сдвигов (малых κ). По сравнению с асимптотическим размером статистики ZA, здесь не будет отклонения нулевой гипотезы со 100%-ной вероятностью вне зависимости от местоположения сдвига. В (Harvey, Leybourne, 2012) на основе асимптотического приближения предельного распределения статистики $DF_{\rho}^{\min}$ при больших значениях κ (большой сдвиг) демонстрируется, что искажения размера возникнут, если для критических значений 10, 5 и 1%-ных уровней значимости структурный сдвиг находится, соответственно, левее, чем 0.045, 0.040 и 0.033 доли выборки. Но эта проблема не имеет существенного значения, поскольку обычно параметр усечения $\varepsilon \geq 0.05$, т. е. структурный сдвиг предполагается лежащим в некотором множестве $\Lambda(\varepsilon) = [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Асимптотическая мощность теста $DF_{\rho}^{\min}$ также превосходит соответствующую асимптотическую мощность минимума *t*-статистики. Отметим, что хотя данный тест является достаточно робастным к величине начального значения (его мощность хотя и убывает при увеличении начального значения, но остается достаточно высокой при «разумных» начальных значениях), он имеет существенные искажения размера, например, при MA(1) ошибках с отрицательным коэффициентом (подробнее см. результаты симуляций в (Skrobotov, 2017)).

Обобщение на случай произвольного числа структурных сдвигов для модели (24) было предложено в (Harvey et al., 2013b). Тестовая статистика — обобщение статистики, предложенной в (Perron, Rodríıguez, 2003), на случай произвольного числа изломов тренда, а именно:

$$MDF_m = \inf_{\lambda \in \Lambda(\varepsilon)} \left(ADF - GLS(\lambda, \bar{c}) \right), \tag{28}$$

где $ADF - GLS(\lambda, \bar{c})$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ обозначает стандартную *t*-статистику из ADF-регрессии для проверки гипотезы единичного корня (число запаздывающих разностей выбирается на основе подхода Ng и Perron (2001) с модификацией Perron и Qu (2007)) для GLS-детрендированных данных.

Заметим, что хотя тест и не требует специфицировать действительное число сдвигов, необходимо установить некоторую верхнюю границу m максимально возможного числа сдвигов, которые могут происходить в выборке. Компромисс заключается между достаточно малым выбором m, с риском пренебрежения сдвига в тренде, и достаточно большим, в связи с чем может возникать уменьшение мощности на конечных выборках. Авторы предлагают выбирать $m = 3$ в эмпирических приложениях, т. к. при возможности большого числа сдвигов необходимо накладывать ограничения на их местоположение (чтобы они находились друг от друга не менее чем в 0.15 выборки), что может препятствовать корректному нахождению некоторых сдвигов.

Harvey et al. (2013b) исследуют асимптотическое поведение теста MDF_m в условиях не только локальной альтернативы при единичном корне, но и локального (к нулю) поведения величины сдвига, предполагая соответствующий Питмановский снос для излома тренда в локальном к единичному корню процессе, в отличие от фиксированной величины сдвига, как было в CKP. В отличие, например, от HHLT, значение параметра $\bar{c}$ для GLS-детрендирования приводится не для каждого возможного местоположения сдвига, а как среднее этих значений (т. к. эти значения очень мало отличаются друг от друга при предположении о локальном изломе тренда).

Асимптотический размер теста MDF близок к номинальному, хотя наблюдается незначительное уменьшение при большой величине сдвига, однако не происходит слишком частое ложное отклонение нулевой гипотезы, как в тесте ZA. Тем самым, при фиксированном (не локальном) изломе тренда асимптотические размер и мощность достаточно нечувствительны к величине сдвига. По сравнению с тестом CKP тест ZA имеет тенденцию к увеличению размера при умеренной величине сдвига, но никогда не превышает 0.094. Сравнивая асимптотическую мощность при локальном изломе тренда, можно заключить, что малые величины сдвигов мало влияют на мощность теста MDF .

Интересная модификация теста *MDF* была предложена в (Harvey et al., 2014). Многие тесты на единичный корень при наличии структурного сдвига используют тот факт, что сдвиг может происходить в любой момент времени, за исключением некоторых значений в начале и в конце ряда. Однако исследователь может знать некоторую априорную информацию о местоположении сдвига в некоторой окрестности, не зная его местоположения точно. Такой подход был впервые рассмотрен в (Andrews, 1993) в контексте общей структурной нестабильности. Он мотивировался двумя примерами: 1) значимое политическое событие (или экономическая реформа, война и т. п.) может происходить в определенный промежуток времени, но точно не известно, когда это событие произведет эффект; 2) событие может происходить в известную дату, но эффект или не ожидаемый, или происходит с некоторой задержкой.

3.4. Использование комбинаций из нескольких тестов при наличии структурных сдвигов

В предыдущих разделах предполагалось, что число структурных сдвигов известно, и тесты строятся исходя из этого числа. А что делать, если мы априори не знаем, были ли вообще структурные сдвиги во временном ряде, и сколько их? Недавно было разработано множество процедур, позволяющих тестировать сдвиги вне зависимости от того, являются ли ошибки стационарными или нет. Данный вопрос важен потому, что при разном типе ошибок мы имеем различное асимптотическое поведение тестов на равенство нулю коэффициента при переменной, отвечающей за структурный сдвиг. Данные тесты можно использовать в качестве предварительных в дополнение к тестам на единичный корень, чтобы получить более высокую мощность. Например, если сдвиг является значимым (т. е. коэффициент при переменной сдвига статистически отличен от нуля), то необходимо использовать тест на единичный корень, учитывающий сдвиг. В противном случае можно предположить, что сдвига нет, и использовать более мощный тест без сдвига.

Существует три группы тестов на сдвиг, робастных к порядку интегрированности ошибок. В первую группу входит тест (Harvey et al., 2009) (см. также (Harvey et al., 2007) для случая тестирования тренда). Данный тест основан на построении взвешивающей функции таким образом, чтобы веса позволяли асимптотически выбирать тот тест, который является эффективным и обоснованным при некотором типе ошибок, $I(0)$ или $I(1)$. Например, если ошибки являются $I(0)$, то вес того теста, который эффективен при $I(0)$ ошибках, должен сходиться к 1. Обобщение этого подхода для оценивания количества сдвигов было предложено в (Sobreira, Nunes, 2012).

Другой класс тестов предложен в (Perron, Yabu, 2009b) (см. также (Perron, Yabu, 2009a) для случая тестирования тренда) с обобщением на случай нескольких сдвигов в (Kejriwal, Perron, 2010). Идея данного подхода заключается в применении авторегрессионного GLS-преобразования, которое можно проиллюстрировать на простом примере без структурных сдвигов:

$$y_t - \rho y_{t-1} = (1-\rho)\mu + \beta\left[t - \rho(t-1)\right] + e_t, \tag{29}$$

для $t = 2,\ldots,T$ совместно с

$$y_1 = \mu + \beta + u_1. \tag{30}$$

Тогда можно показать, что если вместо истинного ρ использовать оценку

$$\hat{\rho}_S = \begin{cases} \hat{\rho}, & \text{если } |\hat{\rho}-1| > d\,T^{-\delta}, \\ 1, & \text{если } |\hat{\rho}-1| \le d\,T^{-\delta} \end{cases} \tag{31}$$

для некоторого $\delta \in (0,1)$ и $d > 0$, то в получившейся регрессии t-статистика для коэффициента β будет асимптотически нормальной вне зависимости от того, $\rho = 1$ или $|\rho| < 1$.

В (Chun, Perron, 2011) было проведено сравнение тестов (Perron, Yabu, 2009b) и (Harvey et al., 2009). Было показано, что в целом первый имеет более высокую мощность. Последний показывает большие искажения размера, если отрицательная компонента скользящего среднего не присутствует в данных. Также на примере реальных данных было показано, что применение обоих тестов может привести к совершенно противоположным результатам и, соответственно, выводам.

В работе (Sayginsoy, Vogelsang, 2011) был предложен третий подход к тестированию сдвига (см. также (Vogelsang, 1997, 1998a,b)). Поскольку при различных ошибках, $I(0)$ или $I(1)$, распределение тестовой статистики отличается, предлагается масштабировать ее таким образом (на основе некоторой функции от данных), чтобы предельное распределение теста на сдвиг было одинаковым вне зависимости от типа ошибок. В дополнение, если дата сдвига неизвестна, авторы предлагают использовать подход (Andrews, 1993; Andrews, Ploberger, 1994) и вычислять супремум, среднюю и экспоненциальную версии тестовых статистик. Однако исследования Монте-Карло по сравнению данного подхода и рассмотренных выше ограничены.

Отметим еще одну работу, (Harvey et al., 2010), в которой авторы оценивают число сдвигов в уровнях на основе статистики из класса обобщенных флуктуаций (generalized fluctuation class), введенному в (Kuan, Hornik, 1995) и (Leisch et al., 2000).

Также в работах (Iacone et al., 2013a,b, 2017b) были предложены тесты на сдвиг, робастные к типу дробной интегрированности.

Все эти тесты можно эффективно использовать для тестирования на единичный корень. Сначала можно определить, присутствует ли сдвиг в ряде на основе приведенных выше робастных тестов, а затем использовать соответствующий тест на единичный корень со сдвигом или без него. Однако у такой процедуры есть существенный недостаток. Когда структурные сдвиги либо велики, либо очень малы, мощность в этих процедурах достаточно высокая. Однако в промежуточном диапазоне, называемом «долиной» мощности (power 'valley'), наблюдается существенное падение мощности. «Долины» мощности возникают потому, что для диапазона амплитуд, соответствующих локальному излому, структурный сдвиг является достаточно большим, чтобы значительно уменьшить мощность тестов на единичный корень без изломов, и одновременно является слишком маленьким, чтобы быть достоверно идентифицированным процедурами датировки и обнаружения. Левее этого диапазона структурные сдвиги являются настолько маленькими, что не оказывают никакого влияния на мощность теста без сдвигов. Правее их легче обнаружить, поэтому мощность снова увеличивается, т. к. применяется тест на единичный корень с наличием структурного сдвига. Такие «долины» мощности можно сгладить, всегда используя тест на единичный корень со структурным сдвигом, но его мощность значительно меньше в комбинированных стратегиях в областях слишком маленьких и больших структурных сдвигов. В (Harvey et al., 2012) авторы предлагают две альтернативные процедуры, которые помогают смягчить явление «долины» мощности.

Первая процедура основывается на статистике $ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1)$ для тестирования на единичный корень для GLS-детрендированных данных при наличии сдвига (с оценкой даты сдвига $\tilde{\lambda}_1$, как в HHLT, основанной на минимизации сумм квадратов остатков модели в первых разностях). Этот подход, однако, не дает возможности достигнуть такой же мощности, как в тесте $ADF-GLS^{\tau}$ без учета сдвига, когда структурный сдвиг фактически не происходит, но страхует от низкой мощности, когда сдвиг присутствует, но не обнаружен. Неудобство использования $ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1)$ заключается в том, что для контролирования размера в случае, когда никакой излом не происходит, следует использовать консервативные критические значения (иначе при нулевых и малых сдвигах тест будет иметь «либеральные» искажения размера). Однако у этого способа есть неустранимые недостатки: когда происходит структурный сдвиг разумной величины, возникает потеря мощности по сравнению со случаем использования критических значений, связанных с известной долей даты излома.

Чтобы предотвратить это, используется адаптивная процедура (так называемый тест с адаптивными критическими значениями), где s_{κ} обозначает предварительный тест для проверки наличия сдвига, cv_B — соответствующее ему критическое значение:

$$A = ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1) \text{ с критическими значениями } \begin{cases} cv_{tb}^{consv}, & \text{если } s_{\kappa} < cv_{\kappa}, \\ cv_{tb}^{\tilde{\lambda}_1}, & \text{если } s_{\kappa} \geq cv_{\kappa}, \end{cases} \quad (32)$$

где cv_{tb}^{consv} — консервативные критические значения (полученные в (Perron, Rodrıíguez, 2003) при предположении, что сдвига нет), $cv_{tb}^{\tilde{\lambda}_1}$ — критические значения для известной даты сдвига, приводимые в HHLT (зависящие от даты сдвига). Иначе говоря, если структурный сдвиг обнаружился, то применяется обычная тестовая статистика для проверки гипотезы единичного корня при наличии сдвига с критическими значениями при известной дате сдвига, а если структурный сдвиг не обнаруживается, используется та же тестовая статистика, но с консервативными критическими значениями cv_{tb}^{consv}.

Вторая процедура, «адаптивное объединение отклонений $ADF-GLS^{\tau}$ (тест без сдвига) и $ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1)$ », пытается использовать часть мощности, связанной с $ADF-GLS^{\tau}$, когда нет никакого структурного сдвига, в то же время исключая возможность применения только $ADF-GLS^{\tau}$, когда сдвиг присутствует. Если обозначить критическое значение теста $ADF-GLS^{\tau}$ как cv_{τ}, то процедура «совместного отклонения» устроена следующим образом:

$$U^{m_{\xi}} = \text{Отвергать } \mathbf{H_0}, \text{ если } \left\{ADF-GLS^{\tau} < m_{\xi} cv_{\tau} \ \text{ или } \ ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1) < m_{\xi} cv_{tb}^{consv}\right\}, \quad (33)$$

где m_{ξ} — некоторая масштабирующая константа ($m_{\xi} > 1$), предназначенная для предотвращения проблемы повышенного размера, оцененная при $\mathbf{H_0}$ в случае, когда в тренде нет структурного сдвига.

Альтернативный вид $U^{m_{\xi}}$ может быть записан как

$$U^{m_{\xi}} = \left\{ADF-GLS_U = \min\left(ADF-GLS^{\tau}, \frac{cv_{\tau}}{cv_{tb}^{consv}} ADF-GLS(\tilde{\lambda}_1)\right) < m_{\xi} cv_{\tau}\right\}. \quad (34)$$

Можно дальше модифицировать это простое объединение отклонений, чтобы использовать дополнительную мощность, когда структурный сдвиг присутствует. Используя предыдущую адаптивную процедуру в (32), процедура адаптивного объединения отклонений принимает вид

$$U_A^{m_{\xi}} = \begin{cases} \text{Отвергать } \mathbf{H_0}, \text{ если } \left\{ADF-GLS^{\tau} < m_{\xi} cv_{\tau} \text{ или } ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1) < m_{\xi} cv_{tb}^{consv}\right\}, s_{\kappa} < cv_{\kappa}, \\ \text{Отвергать } \mathbf{H_0}, \text{ если } \left\{ADF-GLS^{tb}(\tilde{\lambda}_1) < cv_{tb}^{\tilde{\lambda}_1}\right\}, \ s_{\kappa} \geq cv_{\kappa}. \end{cases} \quad (35)$$

Как показывают симуляции, из двух альтернативных процедур тест A менее чувствителен к величине сдвига, а $U_A^{m_{\xi}}$ обеспечивает значительно более высокую мощность для нулевых или небольших изломов за счет некоторых потерь в мощности для промежуточных величин сдвига. Обе процедуры помогают снизить эффект «долин» мощности. Исследование авторов основано на локальном асимптотическом поведении всех рассматриваемых тестов и с локальным поведением параметра при сдвиге в тренде.

В (Skrobotov, 2017) анализируются различные тесты на единичный корень при наличии сдвига при дополнительной неопределенности относительно начальных значений. Также исследуется влияние начального значения на робастные тесты на сдвиг. Автор заключает, что при малых начальных значениях необходимо использовать тест $MDF-GLS$, а при больших — комбинацию $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$ (т. е. с оценкой доли даты сдвига, как в (Harvey, Leybourne, 2013), см. раздел 3.1 и уравнение (15)[20]) и $MDF-OLS$ (тест ZA) в зависимости от робастных тестов на сдвиг в тренде. Также при высоких начальных значениях тесты, предложенные в (Harvey et al., 2012, 2013b), будут иметь очень низкую мощность, так что их применение в эмпирических приложениях становится проблематичным.

---

[20] Отметим, что в контексте тестирования гипотезы единичного корня в множество D_m нельзя включать 0 и близкие к нему значения. Подробности и обсуждение суперсостоятельности такой оценки см. в (Skrobotov, 2017).

В (Skrobotov, 2017) предлагается модификация процедур A и $U_A^{m_\xi}$, робастная к высоким начальным значениям и в то же время сохраняющая высокую мощность при низких начальных значениях. Предварительный тест на начальное значение строится аналогично подходам (Harvey, Leybourne, 2005, 2006), а оценка для начального значения $|\zeta|$ (нормализованного значения первого наблюдения) — как

$$|\hat{\zeta}|=\frac{|y_1-\hat{d}_1|}{\hat{\sigma}}, \tag{36}$$

где $\hat{d}_1$ — подобранное значение детерминированной функции в момент времени $t=1$, использующее некоторую оценку доли даты сдвига, а $\hat{\sigma}$ — соответствующая оценка стандартного отклонения ошибок u_t. Оценка $|\hat{\zeta}|$ будет состоятельной при фиксированной альтернативе, но не будет состоятельной при локальной альтернативе. Автор применяет простое эвристическое правило, что $|\hat{\alpha}|>1$ указывает на высокое начальное значение. Причина этого заключается в том, что при $|\alpha|>1$ мощность эффективного при малых начальных значениях теста $MDF-GLS$ перестает быть выше, чем у остальных тестов.

Модификация стратегии $A=A(s_\kappa)$, называемая $A^*(s_\kappa,s_\zeta)$, представлена ниже, где s_κ и s_ζ обозначают тест на значимость сдвига и тест на высокое начальное значение, а cv_κ и cv_ζ — соответствующие им критические значения.

Алгоритм. *Модифицированная стратегия $A^*(s_\kappa,s_\zeta)$ определяется следующим образом.*

1. Если $s_\kappa \le cv_\kappa$ и $s_\zeta > cv_\zeta$, то использовать тест $MDF-OLS$ с критическим значением $cv^{MDF-OLS}$.
2. Если $s_\kappa \le cv_\kappa$ и $s_\zeta \le cv_\zeta$, то использовать стратегию

$$\text{Отвергать } \mathbf{H_0}, \text{ если } \left\{MDF-OLS<m_\xi^1 cv^{MDF-OLS} \text{ или } MDF-GLS<m_\xi^1 cv^{MDF-GLS}\right\}, \tag{37}$$

где m_ξ^1 — масштабирующая константа для объединения тестов $MDF-OLS$ и $MDF-GLS$ с консервативными критическими значениями.

3. Если $s_\kappa > cv_\kappa$ и $s_\zeta > cv_\zeta$, то использовать тест $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$ с консервативным критическим значением $cv^{ADF-OLS^{tb}}$.
4. Если $s_\kappa > cv_\kappa$ и $s_\zeta \le cv_\zeta$, то использовать стратегию

$$\text{Отвергать } \mathbf{H_0}, \text{ если } \left\{ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})<m_\xi^2 cv^{ADF-OLS^{tb}} \text{ или } MDF\text{-}GLS<m_\xi^2 cv^{MDF-GLS}\right\}, \tag{38}$$

где m_ξ^2 — масштабирующая константа для объединения тестов $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$ (с критическим значением для известной даты сдвига) и $MDF-GLS$.

Важно отметить, что используются только консервативные критические значения для всех тестов, калиброванные при $\kappa=0$. Причина заключается в том, что хотя размер всех тестов уменьшается при росте κ, на конечных выборках при автокоррелированных ошибках размер для всех κ примерно одинаковый. Таким образом, консервативные критические значения позволяют лучше контролировать размер.

Идея этой стратегии состоит в следующем. В п. 1 нет причин полагать, что сдвиг фактически присутствует в данных, но есть свидетельство в пользу высокого начального значения. Таким образом, эффективным тестом будет $MDF-OLS$ (ZA). В п. 2 нет причин полагать ни высокую величину сдвига, ни высокое начальное значение, поэтому следует использовать объединение отклонений, включающее тесты $MDF-OLS$ и $MDF-GLS$. В п. 3 есть свидетельство высокой амплитуды сдвига в тренде и высокого начального значения, так что в этом случае эффективным тестом будет $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$. В п. 4 есть свидетельство высокого сдвига в тренде, но нет оснований полагать, что начальное значение высоко, поэтому необходимо использовать оба теста, $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$ и $MDF-GLS$. Отметим, что $MDF-OLS$ (ZA) используется только при очень малых сдвигах, что предотвращает возникновение слишком частого ложного отклонения нулевой гипотезы, обсуждаемое в разделе 3.3.

Альтернативный и более простой способ тестирования гипотезы единичного корня — просто использовать один наиболее робастный тест, $ADF-OLS^{tb}(\hat{\lambda}_1^{D_m})$, особенно если структурных сдвигов больше одного. Обобщение процедуры $A^*(s_\kappa, s_\zeta)$ на случай нескольких сдвигов становится затруднительным, тем более что непонятно, как ведет себя тест $MDF-OLS$ с более чем одним сдвигом, когда этот сдвиг присутствует при нулевой гипотезе.

4. Проверка гипотезы о стационарности при наличии структурных сдвигов

Аналогично тестам на единичный корень, естественно обобщить тесты на стационарность против альтернативы единичного корня при наличии структурных сдвигов для предотвращения нежелательного слишком частого отклонения нулевой гипотезы.

Для тестирования гипотезы о стационарности перепишем модель в виде представления ненаблюдаемых компонент (unobserved components representation), в котором временной ряд y_t раскладывается на сумму детерминированного компонента, случайного блуждания и стационарной ошибки:

$$y_t = d_t + r_t + e_t, \tag{39}$$

$$r_t = r_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{40}$$

где $e_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \upsilon_{t-j}$, а d_t — детерминированный компонент. Этот детерминированный компонент определяется аналогично моделям тестирования на единичный корень (см. раздел 3.2).

В работе (Lee, Strazicich, 2001) предлагается использовать аналог KPSS статистики:

$$KPSS^{tb} = \left(T\hat{\omega}_e\right)^{-2} \sum_{t=1}^{T} \hat{S}_t^2, \tag{41}$$

где $\hat{S}_t = \sum_{s=1}^{t} \hat{e}_s$, $\hat{e}_s$ — остатки от регрессии ряда y_t на соответствующий детерминированный компонент d_t, включающий структурный сдвиг, а $\hat{\omega}_e^2$ — непараметрическая оценка долгосрочной дисперсии ошибок этой регрессии. Авторы, однако, рассмотрели случай только двух моделей, в первой $d_t' = (1, DU_t)$, а во второй $d_t' = (1, t, DU_t, DT_t)$. Соответственно, предельное распределение тестовой статистики (41) при нулевой гипотезе $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ выражается следующим образом.

1. Если $d_t' = (1, DU_t)$, то

$$KPSS^{tb} \Rightarrow \lambda_1^2 \int_0^1 V_1(b_1)^2\, db_1 + (1-\lambda_1)^2 \int_0^1 V_2(b_2)^2\, db_2 ,$$

где V_1 и V_2 — два независимых броуновских моста, т. е. $V_i(b_i) = W(b_i) - b_i W(1)$ для $i = 1, 2$ с $0 < b_1 = b / \lambda_1 < 1$ и $0 < b_2 = (b - \lambda_1)/(1-\lambda_1) < 1$, где $W(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс.

2. Если $d_t' = (1, t, DU_t, DT_t)$, то предельное распределение то же самое, что и в предыдущем случае, за исключением того, что $V_i(b_i)$ заменяется на броуновский мост второго порядка, определяемый как

$$V_i(b_i) = W(b_i) + (2b_i - 2b_i^2) W(1) + (-6b_i + 6b_i^2) \int_0^1 W(s)\, ds .$$

Если дата сдвига неизвестна априорно[21], авторы рассмотрели минимум соответствующей тестовой статистики по всем возможным датам сдвига. Однако этот тест имеет низкую мощность, поскольку минимизация тестовой статистики приводит к наименее благоприятному исходу против альтернативы.

В работе (Kurozumi, 2002) рассматривалась локальная асимптотика KPSS-теста при наличии четырех типов структурных сдвигов (изменение в уровне без тренда, с трендом, изменение наклона тренда и совместный эффект). Эта локальная асимптотика заключается в том, что тестируется нулевая гипотеза $\mathbf{H_0} : \rho = \sigma_u^2 / \sigma_v^2 = 0$ против локальной альтернативы $\mathbf{H_1} :\ \rho = c^2 / T^2$, где c — константа. Kurozumi получил предельные распределения тестовой статистики для каждой из четырех рассмотренных моделей, а также асимптотическую локальную функцию мощности (используя подход (Tanaka, 1996, Chapter 9)). Для даты сдвига, расположенной ближе к концам выборки (а также при малых значениях c), мощность выше, чем при сдвигах, расположенных ближе к середине выборки. Однако для модели со сдвигом в уровнях и с трендом, самая высокая мощность наблюдается в случае, когда сдвиг происходит в середине выборки, $\lambda_1 = 0.5$, при c меньше примерно 15. Для конкретной доли даты сдвига мощность выше в моделях, имеющих меньше параметров (самая высокая в модели со сдвигом в константе без тренда, а самая низкая — в модели со сдвигом в константе с изменением наклона тренда).

Предельное распределение тестовой статистики, очевидно, зависит от доли даты структурного сдвига. Kurozumi предложил другой тест, однако, только для моделей сдвига в уровнях без наличия тренда и сдвига в уровнях с изменением наклона тренда[22]. Следуя (Park, Sung, 1994), построим взвешенную переменную y_t^*:

[21] В (Carrion-i-Silvestre, 2003) было проанализировано поведение теста при неверно специфицированной дате сдвига. Автор показал, что тест расходится со скоростью $O_p(T)$, и искажения размера увеличиваются при увеличении величины структурного сдвига.

[22] Для других моделей невозможно построить статистику, предельное распределение которой не зависело бы от датировки сдвига.

$$y_t^* = \begin{cases} (T/T_1)y_t, & t = 1,\ldots,T_1, \\ [T/(T-T_1)]y_t, & t = T_1+1,\ldots,T. \end{cases} \quad (42)$$

Используя эту переменную, можно построить следующую PS-статистику:

$$PS^{tb} = \left(T\hat{\omega}_e\right)^{-2} \sum_{t=1}^{T} \hat{S}_t^{*2}, \quad (43)$$

где $\hat{S}_t^* = \sum_{s=1}^{t} \hat{e}_s^*$, $\hat{e}_s^*$ — остатки от регрессии y_t^* на соответствующий детерминированный компонент. Предельное распределение полученной статистики не зависит от датировки структурного сдвига при нулевой гипотезе (однако зависит для последовательности локальных альтернатив). При сравнении локальных мощностей было показано, что тест KPSS лучше PS для небольших значений c[23], но при возрастании c наблюдается обратная картина, хотя различие между мощностями очень мало.

Если дата сдвига априорно неизвестна, Kurozumi предлагает использовать ее оценку, полученную минимизацией сумм квадратов остатков по всем возможным датам сдвига. Соответственно, тестовые статистики, полученные при оцененной дате сдвига, имеют то же самое распределение, что и при известной дате (вспомним, что при нулевой гипотезе справедлива суперсостоятельность оценок). KPSS и PS статистики состоятельны при фиксированной альтернативе, даже если дата сдвига неправильно специфицирована, и доля даты сдвига может не сходиться по вероятности к истинному значению (хотя в случае локальной асимптотики это не так).

В (Busetti, Harvey, 2001) была рассмотрена аналогичная проблема, но только для тестирования стационарности при фиксированной альтернативе. Авторы рассмотрели аналогичные тесты для четырех моделей и получили соответствующие предельные распределения и критические значения. Важно отметить, что в (Harvey, Mills, 2003) была обнаружена ошибка в итоговом распределении для модели сдвига в уровнях, хотя доказательство было корректным, и критические значения были получены с использованием корректного распределения, когда дата сдвига известна.

Busetti и Harvey заметили, что тестовую статистику для моделей сдвига в уровнях и сдвига в уровнях с изменением наклона тренда можно переписать следующим образом:

$$KPSS^{tb} = \lambda_1^2 \frac{\sum_{t=1}^{T_1}\left(\sum_{s=1}^{t}\hat{e}_s\right)^2}{T_1^2\hat{\omega}_e^2} + (1-\lambda_1)^2 \frac{\sum_{t=T_1+1}^{T}\left(\sum_{s=T_1+1}^{t}\hat{e}_s\right)^2}{(T-T_1)^2\hat{\omega}_e^2}. \quad (44)$$

Предельное распределение этой статистики было ранее получено в (Lee, Strazicich, 2001). Busetti и Harvey предложили модификацию статистики (44). Она заключается в том, что если игнорировать веса λ_1^2 и $(1-\lambda_1)^2$, то предельное распределение не будет зависеть от датировки структурного сдвига. Это может быть полезно для расширения теста на случай нескольких (m) структурных сдвигов:

$$KPSS_m^{tb} = \sum_{j=1}^{m+1} (T_j - T_{j-1})^{-2} \hat{\omega}_e^{-2} \sum_{t=T_{j-1}+1}^{T_j} \left(\sum_{s=T_{j-1}+1}^{t} \hat{e}_s \right)^2 , \quad (45)$$

где $T_0 = 0$ и $T_{m+1} = T$. Предельное распределение будет тогда соответствующей суммой Крамера–фон Мизеса (первого или второго порядка) с $m+1$ степенями свободы.

Тест (44), являющийся LBI, явно превосходит тест (45) только в области, близкой к нулевой гипотезе на конечных выборках, а также при дате сдвига, находящейся в начале или в конце выборки. Для других значений λ_1 свойства на конечных выборках примерно одинаковы. Ситуация в случае двух сдвигов аналогична.

При неизвестной дате сдвига предлагается использовать ее оценку, полученную путем минимизации тестовой статистики, в духе идеи Zivot и Andrews. Предельным распределением тогда будет инфимум предельного распределения обычной статистики. Оно не зависит от датировки сдвига при предположении, что параметры, отвечающие за сдвиг, стремятся к нулю (при росте выборки) быстрее, чем $T^{-3/2}$ для параметра изменения наклона тренда и $T^{-1/2}$ для параметра сдвига в уровнях. При отсутствии этого предположения распределение тестовой статистики будет зависеть не только от доли даты сдвига, но и от его величины. Однако критические значения (при неизвестной дате сдвига) были получены при некорректном распределении для модели сдвига в уровнях. В работе (Harvey, Mills, 2003) были приведены корректные критические значения для всех моделей, в том числе для конечных выборок. Заметим, что они были получены с использованием интервала возможных дат сдвигов $[0.2, 0.8]$, в то время как Busetti и Harvey использовали полный интервал $(0,1)$.

В (Busetti, Harvey, 2003) авторы вернулись к другому вопросу, возникшему в их предыдущей работе (Busetti, Harvey, 2001). Так как тест, построенный на минимизации тестовой статистики, основывается на предположении о небольших сдвигах, возникает естественный вопрос, насколько небольшим должен быть сдвиг, чтобы удовлетворять этому предположению, поскольку при большой величине сдвига происходит слишком частое отклонение нулевой гипотезы. Авторы предлагают альтернативную процедуру, которая имеет хорошие свойства размера, но теряет мощность при небольших сдвигах. Она заключается в том, чтобы предварительно оценить дату сдвига путем минимизации суммы квадратов остатков, а затем применить обычную тестовую статистику, используя полученную оценку как истинную дату сдвига. Этот подход обоснован, поскольку при нулевой гипотезе такая оценка доли даты сдвига будет суперсостоятельной, так что предельное распределение будет тем же самым, что и при известной дате сдвига. Симуляции показали, что минимизация тестовой статистики слишком часто отвергает нулевую гипотезу стационарности даже для таких небольших сдвигов, как одно стандартное отклонение ошибок. Для больших сдвигов эмпирический размер теста никогда не превышает 0.17. Размер теста, основанного на использовании суперсостоятельной оценки как истинной, близок к номинальному при любой величине сдвига. Мощность мала для небольшого сдвига, но увеличивается с ростом его величины (более легко идентифицировать сдвиг). Когда сдвига фактически не происходит, инфимум-тест более мощный, чем тест, использующий оценку даты сдвига. Таким образом, если существует неопределенность относительно наличия сдвига, то инфимум-тест является предпочтительным. С другой стороны, если есть уверенность в том, что сдвиг существует, но его местоположение неясно, предпочтительнее использовать двухшаговую процедуру, используя суперсостоятельную оценку даты сдвига, полученную путем минимизации суммы квадратов остатков.

В (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2005) была рассмотрена возможность двух структурных сдвигов в KPSS тесте. Авторы использовали подход (Sul et al., 2005) для оценки долгосрочной дисперсии. Для каждой из семи рассмотренных моделей было получено предельное распределение и критические значения. Поиск неизвестных дат сдвига производился через минимизацию сумм квадратов остатков.

В (Skrobotov, 2014) было предложено обобщение работы (Kurozumi, Tanaka, 2010), в которой было найдено смещение для конечных выборок на случай одного структурного сдвига. Скорректированная на смещение статистика строится как

$$KPSS = \frac{T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{s=1}^{t}\hat{u}_s\right)^2 - \hat{b}_T}{\hat{\omega}_{u,AR}^2}, \tag{46}$$

где $\hat{u}_s$ — остатки от регрессии ряда y_t на соответствующий детерминированный компонент, и, аналогично (Kurozumi, Tanaka, 2010), компонент b_T отвечает за смещение. В предположении о том, что ковариации γ_{T_1} и γ_{T-T_1} являются $o(1)$ ($\gamma_j = \mathrm{E}[v_t v_{t-j}]$)[23], было показано, что

$$b_T = \frac{b_0}{T}\left(\gamma_0 + \sigma_e^2\frac{\varphi'(1)}{\varphi^3(1)}\right),$$

где $\gamma_0 = \mathrm{E}[v_t^2]$, $\varphi(L)$ — авторегрессионный лаговый полином процесса ошибок, $\varphi'(1) = d\varphi(z)/dz|_{z=1}$. Кроме того, $b_0 = 5/3$ для Модели 0 при отсутствии тренда,

$$b_0 = (285\lambda_1^4 - 570\lambda_1^3 + 498\lambda_1^2 - 213\lambda_1 + 38)\big/(30(1 - 3\lambda_1 + 3\lambda_1^2)^2)$$

для Модели 0 при наличии тренда, $b_0 = 7/6$ для Модели I и $b_0 = 19/15$ для Модели II[24].

Заметим, что в случае Моделей 0 (без тренда), I и II смещение не зависит от датировки структурного сдвига. Однако это не так для Модели 0 с трендом. Для Моделей 0 и II смещение то же самое, как и для моделей без структурного сдвига. Кроме того, при приближении λ_1 к 0 или к 1 параметр смещения для Модели 0 с трендом приближается к 19/15, получаемому в модели без сдвига. Однако смещение для Модели I одинаково вне зависимости от λ_1, кроме $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_1 = 1$ (случай с отсутствием структурного сдвига). Объяснение этой разрывности заключается в том, что в доказательстве используется условие, что γ_{T_1} и γ_{T-T_1} являются $o(1)$. Однако при $\lambda_1 \to 0$ и $\lambda_1 \to 1$ автоковариации γ_{T_1} и γ_{T-T_1} сходятся к $\gamma_0 \neq 0$, так что параметр b_0 будет сходиться к случаю без структурного сдвига.

Отметим еще альтернативный подход, предложенный в (Harvey, Mills, 2005) аналогично работе (Leybourne et al., 1998). В этих двух работах считается, что мгновенный сдвиг

23 Это предположение достаточно реалистично, поскольку обычно считается, что сдвиг находится в интервале $(0.15T, 0.85T)$, так что можно пренебречь ковариацией между T_1 наблюдениями.

24 В (Kurozumi, Tanaka, 2010) авторы показали, что в случае модели только с константой $b_0 = 5/3$, а в случае модели с константой и трендом $b_0 = 19/15$.

может быть нереалистичным в экономических приложениях, поэтому авторы предлагают гладкий переход между двумя режимами. Это можно сделать, введя логистическую функция гладкого перехода (logistic smooth transition function) $S_t = \left(1+\exp\{-\gamma'(t-\lambda_1 T)/\hat{\sigma}(t)\}\right)^{-1}$, где $\hat{\sigma}(t)$ — стандартное отклонение переменной перехода. Эта функция умножается на каждый регрессор, отвечающий за структурный сдвиг, а затем при помощи нелинейного метода наименьших квадратов оцениваются соответствующие параметры и получаются остатки, которые затем можно использовать для тестирования. Заметим, что серединной точкой перехода является $T_1 = \lambda_1 T$, а скорость перехода контролируется параметром γ'. В граничном случае $\gamma' = 0$ предполагается, что переход происходит во всех наблюдениях, а при $\gamma' = \infty$ переход предполагается мгновенным (т. е. отсутствие сдвига и мгновенный сдвиг есть частные случаи этой модели). Компонент $\hat{\sigma}(t)$ предполагается $O(T)$, масштабированный на γ', скорости перехода для различных размеров выборок допускаются такими, чтобы γ' не зависел от T. Заметим также, что переход здесь симметричен относительно T_1, в то время как можно использовать асимметричные гладкие переходы, используя обобщенную логистическую функцию.

5. Тестирование на единичный корень при нестационарной волатильности

Многие временные ряды (особенно для развивающихся стран) характеризуются значимым перманентным сдвигом в волатильности. В (Nelson et al., 2001; Cavaliere, 2003) было показано, что сдвиги волатильности, подчиняющиеся процессу с марковскими переключениями, не приводят к значительным искажениям размера в стандартных тестах на единичный корень. Аналогично, стационарная изменяющаяся во времени дисперсия (как в процессе ARCH) не влияет на тесты на единичный корень и коинтеграцию (см., например, (Kim, Schmidt, 1993; Ling et al., 2003; Gospodinov, Tao, 2011)). С другой стороны, перманентные изменения в волатильности (когда волатильность становится нестационарной) могут значительно влиять на статистические выводы в тестировании наличия единичного корня. В (Hamori, Tokihisa, 1997) было показано, что один резкий сдвиг в дисперсии инноваций увеличивает размер теста Дики–Фуллера при отсутствии детерминированного компонента. В (Boswijk, 2001) автор разработал тест на единчиный корень, когда волатильность следует почти интегрированному GARCH(1,1) процессу. Более общая структура для исследования эффектов перманентных сдвигов в волатильности была разработана в (Cavaliere, 2004b), где автор показал, что предельное распределение статистик Филлипса–Перрона зависит от конкретной функции (профиля дисперсии $\eta(\cdot)$, формальное определение которого дается ниже), лежащей в основе процесса волатильности, что приводит либо к слишком высокому, либо к слишком низкому размеру теста.

Для решения данной проблемы в последнее время был проведен ряд исследований. Kim et al. (2002) рассматривают частный случай резкого сдвига в дисперсии и предлагают двухшаговую процедуру, которая оценивает дату сдвига в дисперсии, а также дисперсии до и после момента сдвига. Эти оценки затем используются в модифицированном варианте теста на единичный корень, предложенном в (Perron, 1989, 1990). Статистики имеют асимптотические распределения, полученные в (Perron, 1989, 1990), которые зависят от (неизвестной) даты сдвига. Данный подход, однако, не работает, если данные лучше характеризуются не резкими, а гладкими изменениями волатильности, и если наблюдается несколько сдвигов в волатильности, см., например, (Van Dijk et al., 2002; Amado, 2014).

В (Cavaliere, Taylor, 2007) предлагается альтернативный подход для решения проблемы, робастный к очень общему классу изменений волатильности. Пусть процесс порождается следующим образом:

$$y_t = d_t + u_t, \tag{47}$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + e_t, \tag{48}$$

$$e_t = \gamma(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}, \tag{49}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d.}(0,1). \tag{50}$$

Ошибки u_t являются линейным процессом по ε_t, который сам формируется как произведение двух компонент, $\{z_t\}$ и $\{\sigma_t\}$. Поскольку $\{z_t\}$ являются i.i.d., то ошибки ε_t, условные на $\{\sigma_t\}$, имеют нулевое среднее и изменяющуюся во времени дисперсию σ_t^2. Условия на лаговый полином $\gamma(L)$ — стандартные, как в (Phillips, Solo, 1992; Chang, Park, 2002). Компонент волатильности σ_t удовлетворяет $\sigma_{\lfloor sT \rfloor} = \omega(s)$ для $s \in [0,1]$, где $\omega(\cdot)$ принадлежит пространству непрерывных справа и имеющих предел слева (càdlàg) функций на [0,1]. Для $t < 0$ $\sigma_t \le \sigma^* < \infty$.

Остановимся подробно на предположении о процессе $\{\sigma_t\}$. Требуется, чтобы дисперсия инноваций была только ограниченной и имела счетное число скачков, что допускает очень широкий класс процессов волатильности. Например, единственный резкий сдвиг в волатильности соответствует функции $\omega(s) = \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)\mathrm{I}(s \ge \lambda)$, $0 < \lambda < 1$, так что дисперсия сдвигается с σ_0^2 до σ_1^2 в момент времени $\lfloor \lambda T \rfloor$. Множественные сдвиги в волатильности можно получить, задавая $\omega(\cdot)$ кусочной функцией. Случай трендовой волатильности получается как $\omega(s) = \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)s$, и по аналогии можно получить полиномиальный тренд. Сдвиг в дисперсии с гладким переходом (smooth-transition) можно представить как $\omega(s)^2 = \sigma_0^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)S(s)$, где $S(s) = (1 + \exp(-\gamma(s - \lambda)))^{-1}$ соответствует гладкому (логистическому) переходу от σ_0^2 к σ_1^2. Средняя точка перехода определяется через λ, $0 < \lambda < 1$, так что $\sigma_t^2 = 0.5(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)$ для $t = \lfloor \lambda T \rfloor$, в то время как γ контролирует скорость перехода. При приближении γ к нулю σ_t^2 стремится к $0.5(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)$ для всех *t*, а при приближении γ к бесконечности σ_t^2 изменяется от σ_0^2 к σ_1^2 мгновенно в момент времени $\lfloor \lambda T \rfloor$, тем самым модель с резким сдвигом включается в качестве предельного случая. Стандартный случай гомоскедастичности $\sigma_t = \sigma$ также удовлетворяет предположению с $\omega(s) = \sigma$. Процесс волатильности $\omega(\cdot)$ может быть также стохастическим, например, процессом стационарной волатильности или GARCH, см. (Cavaliere, Taylor, 2009c).

Фундаментальная величина, называемая *профилем дисперсии* (variance profile), задается как

$$\eta(s) = \left(\int_0^1 \omega(r)^2 \, dr \right)^{-1} \int_0^s \omega(r)^2 \, dr \tag{51}$$

и зависит только от поведения волатильности временного ряда. При гомоскедастичности профиль дисперсии имеет вид $\eta(s)=s$. Величина $\int_0^1 \omega(r)^2\,dr=\omega^2$ является пределом для $T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2$ и может быть интерпретирована как (асимптотическая) средняя дисперсия инноваций.

В (Cavaliere, Taylor, 2007) рассматривались модифицированные статистики Филлипса–Перрона из (Ng, Perron, 2001). Основная роль нестационарной волатильности в асимптотическом распределении статистик заключается в том, что в предельных распределениях винеровский процесс $W(s)$ заменяется на процесс $W_\eta(s)=W(\eta(s))$. Поскольку $\omega(\cdot)\neq 0$ почти всюду, то $\eta(\cdot)$ является возрастающим гомеоморфизмом на $[0,1]$ с $\eta(0)=0$ и $\eta(1)=1$. Следовательно, $W_\eta(\cdot)$ является преобразованным относительно дисперсии (variance-transformed) винеровским процессом. Он образует винеровский процесс при модификации временной области, поскольку $W_\eta(\cdot)$ в момент времени $s\in[0,1]$ имеет то же самое распределение, что и стандартный винеровский процесс $W(\cdot)$ в момент времени $\eta(s)\in[0,1]$. Кроме того, авторегрессионная оценка долгосрочной дисперсии сходится к $\omega^2\gamma(1)^2$, где ω^2 — средняя дисперсия инноваций, определенная выше. Если рассматривается случай почти единичного корня, то $W_\eta(\cdot)$ заменяется на соответствующий процесс диффузии $W_{c,\eta}(s)=\int_0^s \exp(-c(s-r))dW_\eta(r)$, который становится обычным процессом Орштейна–Уленбека при постоянной волатильности. Таким образом, и размер и локальная мощность подвергаются влиянию нестационарной волатильности.

Тем самым, нестационарная волатильность вызывает временну́ю деформацию предельного винеровского процесса посредством профиля дисперсии, так что предельное распределение при нулевой гипотезе изменяет свой вид по отношению к случаю гомоскедастичности. При заданной состоятельной оценке профиля дисперсии можно использовать симуляции Монте-Карло для получения (асимптотически) тех же самых выводов, что и при отсутствии нестационарной волатильности. В качестве оценки для (51) в работе (Cavaliere, Taylor, 2007) предлагается следующий выборочный аналог:

$$\hat{\eta}(s)=\left(\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2\right)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{\lfloor sT\rfloor}\hat{e}_t^2+\left(sT-\lfloor sT\rfloor\right)\hat{e}_{\lfloor sT\rfloor+1}^2\right), \tag{52}$$

так что $\hat{\eta}(1)=1$ и $\hat{\eta}(0)=0$, где $\hat{e}_t$ — остатки от регрессии $\hat{y}_t$ на $\hat{y}_{t-1}$, $\hat{y}_t$ — OLS- или GLS-детрендированный ряд. Эта оценка является равномерно состоятельной (т.е. сходится по вероятности равномерно для всех $s\in[0,1]$). Альтернативная форма для $\hat{\eta}(s)$ — вместо остатков $\hat{e}_t$ использовать $\Delta\hat{u}_t$, т.е. принимая ограничение при нулевой гипотезе. Можно также использовать остатки от оценивания ADF-регрессии для $\hat{u}_t$. Эти три оценки профиля дисперсии будут асимптотически эквивалентны (и при нулевой, и при локальной, и при фиксированной альтернативах).

Поскольку предельные распределения тестовых статистик зависят от преобразованного относительно дисперсии винеровского процесса и имеет место слабая сходимость для процесса частичных сумм, $W_{\eta,T}(\cdot)=T^{-1/2}\sum_{t=1}^{\lfloor \eta(\lfloor\cdot T\rfloor/T)T\rfloor} z_t \Rightarrow W_\eta(\cdot)$, то при использовании состоятельной оценки $\hat{\eta}(\cdot)$ сходимость также будет выполняться. Поэтому для получения квантилей можно аппроксимировать предельный функционал $W_{\eta}(\cdot)$ с помощью càdlág-процесса $W_{\hat{\eta},T}(\cdot)$.

Альтернативный способ тестирования гипотезы единичного корня был предложен в (Cavaliere, Taylor, 2008b). Вместо того чтобы симулировать предельные распределения, авторы предлагают преобразовать наблюдаемый временной ряд, удаляя тем самым деформацию времени, появляющуюся в асимптотическом распределении. Предположим, что профиль дисперсии известен. Следовательно, также известна его (единственная) обратная функция, $g(s)=\eta^{-1}(s)$. Рассмотрим преобразованный по времени ряд $\tilde{y}_t$ (при предположении об отсутствии детерминированного компонента):

$$\tilde{y}_t = y_{t'}, \quad t' = \lfloor g(t/T)T \rfloor, \; t = 0,\ldots,T .$$

Процесс $\{\tilde{y}_t\}$ соответствует $\{y_t\}$, индексированным неубывающей последовательностью $\{t'\}$. То есть отображение y_t в $\tilde{y}_t$ образует деформацию по времени[25].

Полезное свойство преобразованного по времени ряда $\{\tilde{y}_t\}$ заключается в том, что после нормализации он слабо сходится к стандартному винеровскому процессу. Следовательно, предельные распределения тестовых статистик, построенных по преобразованным по времени данным, имеют тот же вид, что и при гомоскедастичности. Cavaliere, Taylor (2008b) делают предположение о строго возрастающей функции $\hat{\eta}(s)$, так что $\hat{g}(\cdot)$ будет равномерно состоятельной оценкой для $g(\cdot)$, и для получения $\hat{g}(\cdot)$ можно использовать численное обращение $\hat{\eta}(\cdot)$. Отметим, что хотя преобразованные статистики при нулевой гипотезе имеют распределения, не зависящие от мешающих параметров, асимптотическая локальная мощность все еще будет зависеть от профиля дисперсии[26]. При наличии детерминированного компонента, аналогично (Cavaliere, Taylor, 2007), сначала проводится детрендирование ряда, а затем к нему применяется преобразование. Однако в случае линейного тренда предельные распределения будут зависеть от нестационарной волатильности через компонент непрерывного процесса остатков $Z(g(s))$ от проекции винеровского процесса на соответствующий детерминированный компонент. Но, поскольку $g(s)$ состоятельно оценивается, соответствующие квантили можно получить через симуляции.

В (Cavaliere, Taylor, 2008b) также предлагается ряд тестов для проверки нулевой гипотезы о стационарной волатильности, $\mathbf{H_0}: \eta(s)=s$, с использованием величины $\hat{W}(s)=\hat{\eta}_s - s$, которая при нулевой гипотезе близка к нулю для всех $s\in[0,1]$ (подробности и соответствующие ссылки см. в (Cavaliere, Taylor, 2008b, Theorem 3)).

В (Beare, 2018) предлагается подход, основанный на оценивании функции дисперсии[27]. Автор делает дополнительное предположение о том, что функция дисперсии $\omega(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, что позволяет оценить ее непараметрически: для $r\in[0,1]$ определим оценку Надарая–Уотсона как

$$\hat{\omega}_T(r) = \left(\sum_{t=1}^{T} k\left(\frac{t/T-r}{b_T}\right)\hat{u}_t^2\right)^{1/2} \left(\sum_{t=1}^{T} k\left(\frac{t/T-r}{b_T}\right)\right)^{-1/2}, \tag{53}$$

[25] В качестве примера преобразованного во времени временного ряда для заданного выражения нестационарной волатильности см. (Cavaliere, Taylor, 2008b, p. 305).

[26] Для решения этой проблемы см. (Boswijk, 2005).

[27] В (Boswijk, Zu, 2018) предлагался похожий подход с непараметрическим оцениванием дисперсии и построением оптимальных тестов.

где $k(\cdot)$ — ядерная функция, b_T — ширина окна, удовлетворяющие стандартным условиям (b_T сходится к нулю с более низкой скоростью, чем $T^{-1/4}$, чтобы была определена производная $\hat{\omega}_T$), а $\hat{u}_t$ — один из трех видов остатков, использующихся для построения $\hat{\eta}(s)$ в (52). Тогда временной ряд преобразовывается как

$$\tilde{y}_t = \sum_{s=1}^{t} \frac{\Delta y_s}{\hat{\omega}_T(s/T)}, \quad t = 1, \ldots, T, \quad \tilde{y}_0 = 0, \tag{54}$$

и на основе преобразованного ряда строятся интересующие статистики, которые имеют предельные распределения, как в случае гомоскедастичности. Ситуация с наличием линейного тренда аналогична (Cavaliere, Taylor, 2008b).

Последние два подхода имеют некоторые недостатки, связанные с оцениванием профиля дисперсии, преобразованием рядов и проблемой тестирования при наличии тренда. Более простой подход, ставший наиболее популярным при изучении влияния нестационарной волатильности на статистические выводы, использует методы бутстрапа. В (Cavaliere, Taylor, 2008a) предлагается использовать алгоритм «дикого бутстрапа» (wild bootstrap)[28, 29]. Пусть $\hat{\varepsilon}_t$ — OLS- или GLS-остатки от ADF-регрессии. Бутстраповские остатки ε_t^b порождаются как

$$\varepsilon_t^b = \hat{\varepsilon}_t w_t, \tag{55}$$

где $\{w_t\}$ — последовательность независимых $N(0,1)$ случайных величин[30].

Мультипликативный фактор $\hat{u}_t$ служит для воспроизведения картины гетероскедастичности, представленной в оригинальных шоках, на бутстраповские шоки, поскольку ε_t^b, условные на $\hat{u}_t$, независимы (по времени) с нулевым средним и дисперсией $\hat{u}_t^2$. Затем можно получить бутстраповскую выборку, строя процесс частичных сумм

$$y_t^b = y_0^b + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^b, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{56}$$

для некоторого начального значения y_0^b. Поскольку асимптотическое распределение не зависит от начального значения, можно положить $y_0^b = 0$. Далее, используя бутстраповскую выборку y_t^b, можно построить тестовые статистики, как в случае некоррелированных ошибок (т. е. используя обычную оценку дисперсии, а не долгосрочную, поскольку бутстраповская выборка имеет некоррелированные приращения). Можно, конечно, оценить долгосрочную дисперсию авторегрессионным способом, но в этом случае глубина запаздываний

---

28 Алгоритм дикого бутстрапа работает также в классе моделей с нестационарной стохастической волатильностью, моделей со стохастическими скачками в волатильности, ARCH-моделей с почти интегрированной волатильностью и нелинейной нестационарной волатильностью. Подробности см. в (Cavaliere, Taylor, 2009c).

29 В качестве недавнего обзора тестов на единичный корень на основе бутстрапа см. (Palm et al., 2008).

30 Вместо нормального распределения можно использовать другие распределения, которые, однако, не приводят к различиям в поведении на конечных выборках в данном контексте, если дисперсия конечна (см. (Cavaliere et al., 2018)).

не обязательно должна расходиться к бесконечности при росте выборки. Повторяя эту процедуру много раз, можно получить необходимые квантили и p-значения.

Вместо $\hat{\varepsilon}_t$, OLS- или GLS-остатков от ADF-регрессии, можно использовать различные варианты рядов, не изменяющих асимптотические свойства процедуры дикого бутстрапа:

(а) остатки от $AR(p)$ регрессии для $\Delta\hat{u}_t$;

(б) остатки от регрессии $\hat{u}_t$ на $\hat{u}_{t-1}$;

(в) разность $\Delta\hat{u}_t$;

(г) разность Δy_t, скорректированную для Δz_t, z_t — вектор детерминированного компонента.

Последний выбор приводит к лучшим размеру и мощности на конечных выборках.

Cavaliere и Taylor (2008a) показывают, что бутстраповские статистики имеют то же самое асимптотическое распределение, что и оригинальные тестовые статистики (при нулевой гипотезе и локальной альтернативе), а бутстраповские p-значения распределены равномерно при нулевой гипотезе, что приводит к корректному асимптотическому размеру. Таким образом, бутстраповские тесты будут иметь мощность, приблизительно равную скорректированной на размер мощности стандартных тестов. При фиксированной стабильной альтернативе бутстраповские тесты будут состоятельными. Аналогичный результат был получен в (Cavaliere et al., 2019) для случая тестирования сезонных единичных корней.

В (Smeekes, Taylor, 2012), среди прочего, анализируются ADF-тесты с GLS- и OLS-детрендированными данными. При нестационарной волатильности алгоритм дополняется так называемой решетчатой регрессией (sieve regression), чтобы учитывать стационарную серийную корреляцию (см. также (Cavaliere, Taylor, 2009b)). Другими словами, бутстраповские ошибки строятся согласно (55), далее рекурсивно определяется $e_t^b = \sum_{j=1}^{q}\hat{\phi}_j e_t^b + \varepsilon_t^*$ с использованием оцененных параметров $\hat{\phi}_j$ из обычной ADF-регрессии по исходным данным, а затем строится $u_t^b = u_0^b + \sum_{i=1}^{t} e_i^b$, $u_0^b = 0$, и, наконец, бутстраповские данные $y_t^b = u_t^b + d_t^b$, где детерминированный компонент d_t либо равен нулю, либо OLS- или GLS-оценке по исходным данным (подробнее о детрендировании в бутстрап-тестах см. (Smeekes, 2013)). Число лагов в бутстраповских тестах выбирается, однако, большим или равным, чем для регрессии по исходным данным.

В (Tu et al., 2020) разрабатывается еще более общий подход, допускающий, чтобы процесс волатильности зависел от нелинейного преобразования нестационарного временного ряда. Это позволяет использовать информацию из других переменных, порождающих нестационарную волатильность, а также охватывает так называемый эффект рычага (leverage effect) стохастической волатильности (на будущую волатильность влияет знак текущего шока). Другими словами, $\{z_t\}$ и $\{\sigma_t\}$ в модели (47)–(50) теперь не обязательно должны быть независимыми. Авторы предлагают непараметрическую оценку функции волатильности с критическими значениями нестандартного распределения, полученными при помощи симуляций.

Проблема выбора числа лагов при нестационарной волатильности была рассмотрена в (Cavaliere et al., 2015b). Использование стандартных информационных критериев или последовательного тестирования значимости лагов может приводить к неправильным выводам, поскольку эти подходы основаны на предположении о постоянной волатильности. Стандартные информационные критерии при нестационарной волатильности выбирают слишком много лагов. В (Cavaliere et al., 2015b) применяют подход (Beare, 2018). Вместо того чтобы модифицировать сам информационный критерий MAIC, модифицируется временной ряд, использующийся в построении критерия. Другими словами, данные видоизменяются согласно (54), с использованием остатков от ADF-регрессии в построении оценки $\omega(\cdot)$ в (53) с числом лагов либо $k=0$, либо $k=k_{\max}$ (хотя оба подхода приводят к очень похожим результатам). Полученный критерий авторы называют RSMAIC (re-scaled MAIC). Предлагается использовать гауссово ядро и ширину окна $b_T=0.1$. На конечных выборках авторы показывают, что для постоянной волатильности MAIC и RSMAIC работают похожим образом, в то время как при нестационарной волатильности RSMAIC приводит к большей мощности.

Разумным было бы обобщение рассмотренных выше процедур на случай структурных сдвигов. В (Cavaliere et al., 2011) рассматривалось обобщение теста HHLT (см. раздел 3.2), в то время как в (Cavaliere et al., 2011) — обобщение теста MDF (см. раздел 3.3). В (Cavaliere et al., 2011) анализировалось поведение оценок долей дат сдвигов $\tilde{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_1$ в (19) и (21) соответственно. Авторы получили, что при нестационарной волатильности эти оценки имеют те же самые скорости сходимости, что и при гомоскедастичности[31]. Предельные распределения тестовых статистик, однако, все еще зависят от профиля дисперсии при нестационарной волатильности. Для предотвращения этой проблемы в (Cavaliere et al., 2011) предлагается применять бутстрап, используя только OLS-детрендированные данные. Другими словами, сначала ряд y_t детрендируют, используя оценку $\tilde{\lambda}_1$, и получают остатки

$$\hat{u}_t=\Delta y_t-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 DU_t(\tilde{\lambda}_1),$$

где $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$ — OLS-оценки из регрессии Δy_t на константу и $DU_t(\tilde{\lambda}_1)$. Затем применяют процедуру дикого бутстрапа аналогично (Cavaliere, Taylor, 2008a), используя оценку $\bar{\lambda}_1$, вычисленную по исходным данным.

В (Cavaliere et al., 2015a) для теста MDF также используется процедура дикого бутстрапа, однако она применяется для данных во вторых разностях $\Delta^2 y_t$, а бутстраповские остатки строятся как $\varepsilon_t^b=w_t\Delta^2 y_t$, где $\{w_t\}$ обозначает последовательность независимых $N(0,1)$ случайных величин. Взятие вторых разностей устраняет эффект константы, линейного тренда и сдвигов в тренде, что приводит к наличию только выбросов, которые не оказывают асимптотического влияния на бутстраповские статистики, вне зависимости от того, является ли величина тренда фиксированной или локальной к нулю. Авторы также предлагают модификации процедур бутстрапа, связанные с использованием детерминированной функции в бутстрап-алгоритме.

Нестационарную волатильность необходимо также учитывать и при тестировании временного ряда на стационарность. В (Cavaliere, 2004a) и (Busetti, Taylor, 2003) независимо исследовалось поведение KPSS-теста при наличии единственного перманентного сдвига в дисперсии. Было установлено, что при альтернативной гипотезе (что процесс является $I(1)$) этот сдвиг не влияет на состоятельность тестовой статистики, в отличие от нулевой гипотезы, когда размер может сильно превышать номинальный уровень значимости. Размер зависит от даты сдвига, изменения в дисперсии и детерминированного компонента.

[31] В (Harris et al., 2020) была предложена модификация оценок долей дат сдвигов на основе взвешенного метода наименьших квадратов при помощи непараметрически оцененной функции волатильности.

В (Cavaliere, Taylor, 2005) исследуются различные тесты на стационарность для более общего класса волатильности, как в (Cavaliere, Taylor, 2007). Отметим, что нестационарная волатильность может входить как в стационарную, так и в нестационарную ошибку. При нулевой гипотезе о стационарности временного ряда дисперсия нестационарной ошибки равна нулю, так что нестационарная волатильность входит только в стационарную ошибку. В (Cavaliere, Taylor, 2005) рассматривались также локальные альтернативы при нестационарной волатильности, так что на локальную мощность влияла и гетероскедастичность иррегулярной компоненты, и гетероскедастичность процесса ошибок в уровнях. Для решения проблемы авторы также предлагали использовать процедуру дикого бутстрапа. Дальнейшие сравнения различных тестов обсуждаются в (Cavaliere, Taylor, 2009a).

Благодарности. Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы государственного задания РАНХиГС.

Поступила в редакцию 24.04.2020;
принята в печать 10.06.2020.

References

Amado C., Teräsvirta T. (2014). Modelling changes in the unconditional variance of long stock return series. *Journal of Empirical Finance*, 25, 15–35.

Andrews D. W. K. (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61, 821–856.

Andrews D. W. K., Ploberger W. (1994). Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica*, 62, 1383–1414.

Aue A., Horváth L. (2013). Structural breaks in time series. *Journal of Time Series Analysis*, 34 (1), 1–16.

Bai J. (1997). Estimation of a change point in multiple regression models. *The Review of Economics and Statistics*, 79, 551–563.

Banerjee A., Lumsdaine R. L., Stock J. H. (1992). Recursive and sequential tests of the unit-root and trend-break hypotheses: Theory and international evidence. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 271–287.

Beare B. K. (2018). Unit root testing with unstable volatility. *Journal of Time Series Analysis*, 39 (6), 816–835.

Boswijk H. P. (2001). Testing for a unit root with near integrated volatility. *Tinbergen Institute Discussion Paper* No. 01–077/4. Tinbergen Institute, Amsterdam, Rotterdam.

Boswijk H. P. (2005). Adaptive testing for a unit root with nonstationary volatility. *UvA Econometrics discussion paper* No. 2005/07. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

Boswijk H. P., Zu Y. (2018). Adaptive wild bootstrap tests for a unit root with non-stationary volatility. *The Econometrics Journal*, 21 (2), 87–113.

Busetti F., Harvey A. C. (2001). Testing for the presence of a random walk in series with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, 22, 127–150.

Busetti F., Harvey A. C. (2003). Further comments on stationarity tests in series with structural breaks at unknown points. *Journal of Time Series Analysis*, 24, 137–140.

Busetti F., Taylor A. M. R. (2003). Variance shifts, structural breaks and stationarity tests. *Journal of Business and Economic Statistics*, 21, 510–531.

Carrion-i-Silvestre J. L., Kim D., Perron P. (2009). GLS-based unit root tests with multiple structural breaks both under the null and the alternative hypotheses. *Econometric Theory*, 25, 1754–1792.

Carrion-i-Silvestre J. L., Sansó-i-Rosselló A. J. (2005). The KPSS test with two structural breaks. S*panish Economic Review*, 9, 105–127.

Carrion-i-Silvestre J. L. (2003). Breaking date misspecification error for the level shift KPSS test. *Economics Letters*, 81, 365–371.

Cavaliere G. (2003). Asymptotics for unit root tests under Markov-regime switching. *Econometrics Journal*, 6, 193–216.

Cavaliere G. (2004a). Testing stationarity under a permanent variance shift. *Economics Letters*, 82, 403–408.

Cavaliere G. (2004b). Unit root tests under time-varying variances. *Econometric Reviews*, 23, 259–292.

Cavaliere G., Georgiev I. (2007). Testing for unit roots in autoregressions with multiple level shifts. *Econometric Theory*, 23, 1162–1215.

Cavaliere G., Georgiev I., Taylor A. M. R. (2018). Unit root inference for non-stationary linear processes driven by infinite variance innovations. *Econometric Theory*, 34 (2), 302–348.

Cavaliere G., Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2011). Testing for unit roots in the presence of a possible break in trend and non-stationary volatility. *Econometric Theory*, 27, 957–991.

Cavaliere G., Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2015a). Testing for unit roots under multiple possible trend breaks and non-stationary volatility using bootstrap minimum Dickey-Fuller statistics. *Journal of Time Series Analysis*, 36, 603–629.

Cavaliere G., Phillips P. C. B., Smeekes S., Taylor A. M. R. (2015b). Lag length selection for unit root tests in the presence of nonstationary volatility. *Econometric Reviews*, 34, 512–536.

Cavaliere G., Skrobotov A., Taylor A. M. R. (2019). Wild bootstrap seasonal unit root tests for time series with periodic nonstationary volatility. *Econometric Reviews*, 38 (5), 509–532.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2005). Stationarity tests under time-varying second moments. *Econometric Theory*, 21, 1112–1129.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2007). Testing for unit roots in time series models with non-stationary volatility. *Journal of Econometrics*, 140, 919–947.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2008a). Bootstrap unit root tests for time series with nonstationary volatility. *Econometric Theory*, 24, 43–71.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2008b). Time-transformed unit root tests for models with non-stationary volatility. *Journal of Time Series Analysis*, 29, 300–330.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2009a). A note on testing covariance stationarity. *Econometric Reviews*, 28, 364–371.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2009b). Bootstrap M unit root tests. *Econometric Reviews*, 28, 393–421.

Cavaliere G., Taylor A. M. R. (2009c). Heteroskedastic time series with a unit root. *Econometric Theory*, 25, 1228–1276.

Chang S. Y. Perron P. (2016). Inference on a structural break in trend with fractionally integrated errors. *Journal of Time Series Analysis*, 37 (4), 555–574.

Chang S. Y., Perron P. (2017). Fractional unit root tests allowing for a structural change in trend under both the null and alternative hypotheses. *Econometrics*, 5 (1), 1–26.

Chang Y., Park J. (2002). On the asymptotics of ADF tests for unit roots. *Econometric Reviews*, 21, 431–448.

Chun S., Perron P. (2011). Comparisons of robust tests for shifts in trend with an application to trend deviations of real exchange rates in the long run. *Applied Economics*, 45, 3512–3528.

Davidson J. (1994). *Stochastic limit theory*. Oxford University Press, Oxford.

Deng A., Perron P. (2006). A comparison of alternative asymptotic frameworks to analyse a structural change in a linear time trend. *The Econometrics Journal*, 9, 423–447.

Elliott G., Müller U. K. (2007). Confidence sets for the date of a single break in linear time series regressions. *Journal of Econometrics*, 141, 1196–1218.

Elliott G., Rothenberg T. J., Stock J. H. (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64, 813–836.

Gospodinov N., Tao Y. (2011). Bootstrap unit root tests in models with GARCH(1,1) errors. *Econometric Reviews*, 30, 379–405.

Hamori S., Tokihisa A. (1997). Testing for a unit root in the presence of a variance shift. *Economics Letters*, 57, 245–253.

Harris D., Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2009). Testing for a unit root in the presence of a possible break in trend. *Econometric Theory*, 25, 1545–1588.

Harris D., Kew H., Taylor A. M. R. (2020). Level shift estimation in the presence of non-stationary volatility with an application to the unit root testing problem. https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2020.03.008.

Harvey D. I., Leybourne S. J. (2005). On testing for unit roots and the initial observation. *The Econometrics Journal*, 8, 97–111.

Harvey D. I., Leybourne S. J. (2006). Power of a unit-root test and the initial condition. *Journal of Time Series Analysis*, 27, 739–752.

Harvey D. I., Leybourne S. J. (2012). An infimum normalized bias unit root test allowing for an unknown break in trend. *Economics Letters*, 117, 298–302.

Harvey D. I., Leybourne S. J. (2013). Break date estimation for models with deterministic structural change. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 76, 623–642.

Harvey D. I., Leybourne S. J. (2015). Confidence sets for the date of a break in level and trend when the order of integration is unknown. *Journal of Econometrics*, 184, 262–279.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Newbold P. (2001). Innovational outlier unit root tests with an endogenously determined break in level. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 63, 559–575.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2007). A simple, robust and powerful test of the trend hypothesis. *Journal of Econometrics*, 141, 1302–1330.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2009). Simple, robust and powerful tests of the breaking trend hypothesis. *Econometric Theory*, 25, 995–1029.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2010). Robust methods for detecting multiple level breaks in autocorrelated time series. *Journal of Econometrics*, 157, 342–358.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2012). Unit root testing under a local break in trend. *Journal of Econometrics*, 167, 140–167.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2013a). On infimum Dickey-Fuller unit root tests allowing for a trend break under the null. *Computational Statistics and Data Analysis*, 78, 235–242.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2013b). Testing for unit roots in the possible presence of multiple trend breaks using minimum Dickey-Fuller statistics. *Journal of Econometrics*, 177, 265–284.

Harvey D. I., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2014). Unit root testing under a local break in trend using partial information on the break date. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 76, 93–111.

Harvey D. I., Mills T. C. (2003). A note on Busetti-Harvey tests for stationarity in series with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, 24, 159–164.

Harvey D. I., Mills T. C. (2005). Tests for stationarity in series with endogenously determined structural change. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 66, 863–894.

Hecq A., Urbain J. P. (1993). Misspecification tests, unit roots and level shifts. *Economics Letters*, 43, 129–135.

Iacone F., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2013a). On the behavior of fixed-b trend break tests under fractional integration. *Econometric Theory*, 29 (2), 393–418.

Iacone F., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2013b). Testing for a break in trend when the order of integration is unknown. *Journal of Econometrics*, 176 (1), 30–45.

Iacone F., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2017a). Testing the order of fractional integration of a time series in the possible presence of a trend break at an unknown point. *Econometric Theory*, 35, 1201–1233.

Iacone F., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2017b). Testing for a change in mean under fractional integration. *Journal of Time Series Econometrics*, 9 (1).

Jandhyala V., Fotopoulos S., MacNeill I., Liu P. (2013). Inference for single and multiple change-points in time series. *Journal of Time Series Analysis*, 34 (4), 423–446.

Kejriwal M. (2012). The nature of persistence in Euro area inflation: A reconsideration. *Mimeo*.

Kejriwal M., Lopez K. (2012). Unit roots, level shifts and trend breaks in per capita output: A robust evaluation. *Econometric Reviews*, 32, 892–927.

Kejriwal M., Perron P. (2010). A sequential procedure to determine the number of breaks in trend with an integrated or stationary noise component. *Journal of Time Series Analysis*, 31, 305–328.

Kim D., Perron P. (2009). Unit root tests allowing for a break in the trend function at an unknown time under both the null and alternative hypotheses. *Journal of Econometrics*, 148, 1–13.

Kim K., Schmidt P. (1993). Unit root tests with conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 59, 287–300.

Kim T.-H., Leybourne S. J., Newbold P. (2000). Spurious rejections by Perron tests in the presence of a break. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 62, 433–444.

Kim T.-H., Leybourne S., Newbold P. (2002). Unit root tests with a break in innovation variance. *Journal of Econometrics*, 109, 365–387.

Kuan C.-M., Hornik K. (1995). The generalized fluctuation test: A unifying view. *Econometric Reviews*, 14, 135–161.

Kurozumi E. (2002). Testing for stationarity with a break. *Journal of Econometrics*, 108, 63–99.

Kurozumi E., Tanaka S. (2010). Reducing the size distortion of the KPSS test. *Journal of Time Series Analysis*, 31, 415426.

Lee J., Huang C. J., Shin Y. (1997). On stationary tests in the presence of structural breaks. *Economics Letters*, 55, 165–172.

Lee J., Strazicich M. C. (2001). Testing the null of stationarity in the presence of a structural break. *Applied Economics Letters*, 8, 377–382.

Leisch F., Hornik K., Kuan C.-M. (2000). Monitoring structural changes with the generalized fluctuation test. *Econometric Theory*, 16, 835–854.

Leybourne S., Newbold P., Vougas D. (1998). Unit roots and smooth transitions. *Journal of Time Series Analysis*, 19, 8397.

Ling S., Li W. K., McAleer M. (2003). Estimation and testing for unit root process with GARCH(1,1) errors: Theory and Monte Carlo evidence. *Econometric Reviews*, 22, 179–202.

Montanes A. (1997). Level shifts, unit roots and misspecication of the breaking date. *Economics Letters*, 54, 7–13.

Montanes A., Olloqui I. (1999). Misspecification of the beaking date in segmented trend variables: Effect on the unit root tests. *Economics Letters*, 65, 301–307.

Montanes A., Reyes M. (1999). The asymptotic behavior of the Dickey-Fuller tests under the crash hypothesis. *Statistics and Probability Letters*, 42, 81–89.

Montanes A., Reyes M. (1998). Effect of a shift in the trend function on Dickey-Fuller unit root tests. *Econometric Theory*, 14, 355–363.

Montanes A., Reyes M. (2000). Structural breaks, unit roots and methods for removing the autocorrelation pattern. *Statistics and Probablity Letters*, 48, 401–409.

Nelson C. R., Piger J., Zivot, E. (2001). Markov regime-switching and unit root tests. *Journal of Business & Economics Statistics*, 19, 404–415.

Nelson C. R., Plosser C. I. (1982). Trends and random walks in macroeconomics time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139–162.

Ng S., Perron P. (2001). Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power. *Econometrica*, 69, 1519–1554.

Palm F. C., Smeekes S., Urbain J.-P. (2008). Bootstrap unit root tests: Comparison and extensions. *Journal of Time Series Analysis*, 29, 371–401.

Park J. Y., Sung J. (1994). Testing for unit roots in models with structural change. *Econometric Theory*, 10, 917–936.

Perron P. (1989). The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57, 1361–1401.

Perron P. (1990). Testing for a unit root in a time series with a changing mean. *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 153–162.

Perron P. (1997). Further evidence from breaking trend functions in macroeconomic variables. *Journal of Econometrics*, 80, 355–385.

Perron P. (2006). Dealing with structural breaks. In: Palgrave Handbooks of Econometrics: Vol. 1 Econometric Theory, Chapter 8, 278–352.

Perron P., Casini A. (2019). Structural breaks in time series. In: Oxford Research Encyclopedia of Economics and Finance. http://dx.doi.org/10.1093/acrefore/9780190625979.013.179.

Perron P., Qu Z. (2007). A simple modification to improve the finite sample properties of Ng and Perrons unit root tests. *Economics Letters*, 94, 12–19.

Perron P., Rodríguez G. H. (2003). GLS detrending, effcient unit root tests and structural change. *Journal of Econometrics*, 115, 1–27.

Perron P., Vogelsang T. J. (1992a). Nonstationarity and level shifts with an application to purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 301–320.

Perron P., Vogelsang T. J. (1992b). Testing for a unit root in a time series with a changing mean: Corrections and extensions. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 467–470.

Perron P., Vogelsang T. J. (1993a). A note on the additive outlier model with breaks. *Revista de Econometria*, 13, 181–201.

Perron P., Vogelsang T. J. (1993b). The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis: Erratum. *Econometrica*, 61, 248–249.

Perron P., Yabu T. (2009a). Estimating deterministic trends with an integrated or stationary noise component. *Journal of Econometrics*, 151, 56–69.

Perron P., Yabu T. (2009b). Testing for shifts in trend with an integrated or stationary noise component. *Journal of Business and Economic Statistics*, 27, 369–396.

Perron P., Zhu X. (2005). Structural breaks with deterministic and stochastic trends. *Journal of Econometrics*, 129, 65–119.

Phillips P. C. B., Solo V. (1992). Asymptotics for linear processes. *Annals of Statistics*, 20, 971–1001.

Phillips P. C. B., Perron P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75, 335346.

Sayginsoy O., Vogelsang T. J. (2011). Testing for a shift in trend at an unknown date: A fixed-b analysis of heteroskedasticity autocorrelation robust OLS based tests. *Econometric Theory*, 27, 992–1025.

Skrobotov A. (2014). Bias correction of KPSS test with structural break for reducing of size distortion. *Journal of Time Series Econometrics*, 6, 33–61.

Skrobotov A. (2017). On trend, breaks and initial condition in unit root testing. *Journal of Time Series Econometrics*, 10, 1.

Smeekes S. (2013). Detrending bootstrap unit root tests. *Econometric Reviews*, 32, 869–891.

Smeekes S., Taylor A. M. R. (2012). Bootstrap union tests for unit roots in the presence of nonstationary volatility. *Econometric Theory*, 28, 422–456.

Sobreira N., Nunes L. C. (2012). Tests for multiple breaks in the trend with stationary or integrated shocks. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 78, 394–411.

Stock J. H. (1999). A class of tests for integration and cointegration. In: Cointegration, causality, and forecasting: A Festschrift for Clive W. J. Granger. Oxford: Oxford University Press, 135–167.

Sul D., Phillips P. C. B., Choi C.-Y. (2005). Prewhitening bias in HAC estimation. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67, 517–546.

Tanaka K. (1996). *Time series analysis: Nonstationary and noninvertible distribution theory.* Wiley, New York.

Tu Y., Chan N., Wang Q. (2020). Testing for a unit root with nonstationary nonlinear heteroskedasticity. https://doi.org/10.1080/07474938.2020.1721833.

Van Dijk D., Osborn D. R., Sensier M. (2002). Changes in variability of the business cycle in the 7 countries. *The School of Economics Discussion Paper Series* 0204. The University of Manchester.

Vogelsang T. J. (1997). Wald-type tests for detecting breaks in the trend function of a dynamic time series. *Econometric Theory*, 13, 818–849.

Vogelsang T. J. (1998a). Testing for a shift in mean without having to estimate serial correlation parameters. *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 73–80.

Vogelsang T. J. (1998b). Trend function hypothesis testing in the presence of serial correlation. *Econometrica*, 66, 123–148.

Vogelsang T. J., Perron P. (1998). Additional tests for a unit root allowing the possibility of breaks in the trend function. *International Economic Review*, 39, 1073–1100.

White H. (2001). *Asymptotic theory for econometricians*: *Revised edition*. Emerald.

Zivot E., Andrews D. W. K. (1992). Further evidence on the great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 251–270.

Skrobotov A. Survey on structural breaks and unit root tests. *Applied Econometrics*, 2020, v. 58, pp. 96–141.

DOI: 10.22394/1993-7601-2020-58-96-141

Anton Skrobotov
RANEPA, Moscow, SPBU, Saint Petersburg, Russian Federation;
antonskrobotov@gmail.com

Survey on structural breaks and unit root tests

This review discusses methods of testing for a unit root in a time series in the presence of structural breaks. Separately the methods for break date estimation under uncertainty over the order of integration are considered. The review covers a large number of recently developed testing methods that are robust to various types of data uncertainty, including initial conditions and time-varying volatility. The survey introduces the reader to practical application of modern testing methods together with an understanding of the development of these methods.

Keywords: unit root testing; structural breaks; stationarity testing; non-stationary volatility; robust methods.

JEL classification: C12; C22.

Acknowledgment. The article was written on the basis of the RANEPA state assignment research program.

Received 24.04.2020; accepted 10.06.2020.