Прикладная эконометрика, 2021, т. 63, с. 117–141.
Applied Econometrics, 2021, v. 63, pp. 117–141.
DOI: 10.22394/1993-7601-2021-63-117-141

А. А. Скроботов[1]

Структурные сдвиги в моделях коинтеграции

В данном обзоре рассматриваются методы тестирования коинтеграции во временных рядах при наличии структурных сдвигов. Обсуждаются современные подходы, основанные как на одном, так и на нескольких уравнениях. Приводятся различные методы оценивания датировки сдвигов и построения доверительных интервалов для полученных дат. Рассматриваются также нелинейные модели коинтеграции с переключением режимов.

Ключевые слова: тестирование на коинтеграцию; тестирование ранга коинтеграции; структурные сдвиги; модель коррекции ошибок.

JEL classification: C12; C22.

1. Введение

Исследование коинтеграции уже давно является важным элементом анализа данных при изучении долгосрочных соотношений между макроэкономическими переменными. Если временные ряды являются интегрированными первого порядка и существует их стационарная линейная комбинация, то говорят, что эти временные ряды являются коинтегрированными. Стационарная линейная комбинация временных рядов интерпретируется как долгосрочное положение равновесия в системе.

Исследование коинтеграции началось с важного вопроса о наличии ложной (spurious) связи между переменными. Существует известный факт, что при анализе зависимости одной нестационарной переменной от другой (или других), регрессионные оценки и соответствующие им t-статистики не будут иметь смысла, поскольку t-статистика будет расходиться к бесконечности, тем самым приводя к ложным выводам относительно наличия взаимосвязи, и кажущаяся значимость коэффициента может быть просто результатом случайной реализации данных. Можно говорить о действительной (долгосрочной) зависимости между нестационарными переменными только в том случае, если они являются коинтегрированными, т. е. существует их линейная комбинация, являющаяся стационарным процессом. Если такая линейная комбинация существует, то оценки наименьших квадратов будут суперсостоятельными, т. е. будут сходиться с более высокой скоростью к истинным коэффициентам, в отличие от случая со стационарными переменными.

Стандартной методологией исследования временных рядов является тестирование на наличие единичного корня каждого из исследуемых временных рядов, анализ зависимости этих временных рядов и тестирование остатков на стационарность / единичный корень. Если

[1] **Скроботов Антон Андреевич** — РАНХиГС, Москва; СПБГУ, Санкт-Петербург; skrobotov@ranepa.ru; antonskrobotov@gmail.com.

есть коинтеграция, то можно делать содержательные выводы об оцененных коэффициентах, а также строить модель коррекции ошибок. Можно пойти другим путем — с самого начала тестировать ранг коинтеграции (максимальное число линейно независимых комбинаций временных рядов — коинтеграционных соотношений) и строить модель коррекции ошибок на основе полученного ранга коинтеграции. Последний подход имеет смысл, когда исследователь априорно не знает, сколько коинтеграционных соотношений может быть в модели.

Однако такая методология не исключает и некоторые проблемы, которые могут возникать при анализе экономических временных рядов. Одной из важных проблем является наличие структурных сдвигов, особенно если рассматриваются относительно длинные временные периоды. Длинные периоды нужны, среди прочего, из-за того, что коинтеграционное соотношение интерпретируется как некоторое долгосрочное положение равновесия между переменными, а в этом случае необходимо учитывать, что экономическая структура может измениться в течение рассматриваемого периода[2]. Кроме этого, структурные сдвиги можно обнаружить и для индивидуальных рядов (см. недавний обзор (Скроботов, 2020)).

В данном обзоре обсуждаются проблемы исследования коинтеграционных свойств временных периодов, если имеется информация о наличии структурных сдвигов. В разделе 2 описываются методы тестирования нулевой гипотезы о наличии/отсутствии коинтеграции, если в коинтегрирующей регрессии имеются структурные сдвиги. Причем рассматриваются как структурные сдвиги в константе и/или наклоне тренда, так и структурные сдвиги в коинтегрирующем векторе (в долгосрочных коэффициентах). Также обсуждаются тесты на структурные сдвиги, на определение числа сдвигов и методы построения доверительных множеств для дат сдвигов. В разделе 3 рассматриваются многомерные методы исследования коинтеграционных свойств временных рядов. Здесь многие методы основаны на теории Йохансена и определении ранга коинтеграции последовательным тестированием, с учетом наличия структурных сдвигов. Рассматриваются известные даты структурного сдвига, а также методы, основанные на неизвестной дате структурного сдвига. Обсуждается проблема изменения ранга коинтеграции в выборке, в частности, в конце выборки. В разделе 4 рассматриваются модели коинтеграции, в которых либо коинтеграционное соотношение является нелинейным, либо нелинейным является механизм коррекции (возвращения к долгосрочному равновесию).

2. Тестирование одного коинтеграционного соотношения при наличии структурных сдвигов

Тестирование коинтеграции при наличии структурных сдвигов было выполнено в работах (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006; Arai, Kurozumi, 2007). Рассмотрим коинтегрирующую регрессию с одним уравнением и единственным структурным сдвигом. Пусть y_t — стохастический процесс, который порождается следующим образом:

$$y_t = f(t) + \beta' x_t + e_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{1}$$

[2] Одной из первых работ по анализу структурной стабильности в коинтеграционных моделях была (Hansen, Johansen, 1999), в которой авторы анализировали рекурсивные коэффициенты и рекурсивные тесты модели.

где $f(t)$ — некоторая детерминированная функция от времени, отвечающая за структурный сдвиг, x_t — вектор $I(1)$-регрессоров размерности $(p\times 1)$, и

$$e_t=\gamma_t+\nu_{1t}, \tag{2}$$

$$x_t=x_{t-1}+\nu_{2t}, \tag{3}$$

$$\gamma_t=\gamma_{t-1}+u_t,\quad \gamma_0=0,\ u_t\sim \text{i.i.d.}(0,\sigma_u^2). \tag{4}$$

$\nu_t=(\nu_{1t},\nu'_{2t})'$ предполагается процессом сильного перемешивания с нулевым средним и степенным убыванием коэффициентов перемешивания (подробнее см. (Arai, Kurozumi, 2007; Phillips, Durlauf, 1986)). Цель состоит в том, чтобы протестировать гипотезу о наличии коинтеграции и эффективно оценить коинтегрирующий вектор β.

Определим фиктивные переменные $DU_t=\mathrm{I}(t>T_1)$ и $DT_t=(t-T_1)\mathrm{I}(t>T_1)$, где $\mathrm{I}(\cdot)$ — индикаторная функция, $T_1=[\lambda_1 T]$ — дата структурного сдвига, λ_1 — доля даты структурного сдвига ($0<\lambda_1<1$), определяющая его местоположение в выборке (эта величина непрерывна, в отличие от дискретной даты сдвига). Рассмотрим несколько типов моделей, которые специфицированы через конкретный вид детерминированной функции $f(t)$.

Модель 0a. Сдвиг в уровнях без наличия тренда:

$$f(t)=\mu_1+\mu_2 DU_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{5}$$

Модель 0. Сдвиг в уровнях с наличием тренда без изменения его наклона:

$$f(t)=\mu_1+\mu_2 DU_t+\theta_1 t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{6}$$

Модель I. Изменение наклона тренда без сдвига в уровнях:

$$f(t)=\mu_1+\theta_1 t+\theta_2 DT_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{7}$$

Модель II. Сдвиг в уровнях с изменением наклона тренда:

$$f(t)=\mu_1+\mu_2 DU_t+\theta_1 t+\theta_2 DT_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{8}$$

Также в некоторых практических ситуациях имеет смысл моделировать коинтеграционное соотношение, которое может само «сдвинуться» от своей долгосрочной траектории в определенный момент времени. Исходя из этого, целесообразно исследовать иной тип структурных сдвигов — сдвигов в коэффициентах β, т. е. рассматривать модель вида

$$y_t=f(t)+\beta'_1 x_t+\beta'_2 x_t DU_t+e_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{9}$$

В этой модели можно также рассмотреть две спецификации детерминированного компонента.

Модель IIIa. Сдвиг в β при наличии сдвига в уровнях без наличия тренда:

$$f(t)=\mu_1+\mu_2 DU_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{10}$$

Модель IIIb. Сдвиг в β при наличии сдвига в уровнях и наклоне тренда:

$$f(t)=\mu_1+\mu_2 DU_t+\theta_1 t+\theta_2 DT_t,\quad t=1,\ldots,T. \tag{11}$$

В работе (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006) были рассмотрены все указанные модели, в то время как в (Arai, Kurozumi, 2007) — только модели 0а, 0 и IIIа. Нулевая гипотеза о наличии коинтеграции со структурными сдвигами соответствует тому, что e_t — стационарный ряд, т. е. в уравнении (4) $\sigma_u^2 = 0$. Если дата сдвига известна, то регрессии (1) и (9) оцениваются с помощью OLS, а затем полученные остатки тестируются на стационарность аналогом теста множителей Лагранжа (KPSS-тест):

$$V(\lambda_1) = T^{-2}\sum_{t=1}^{T} S_t^2 \big/ \hat{\omega}_e^2 , \tag{12}$$

где $\hat{e}_t$ — OLS-остатки в регрессии (1) или (9), $S_t = \sum_{j=1}^{t} \hat{e}_j$, а $\hat{\omega}_e^2$ — любая состоятельная оценка долгосрочной дисперсии ошибок e_t[3]. Остатки $\hat{e}_t$ от OLS-оценивания модели получены исходя из известной даты структурного сдвига. Предельное распределение тестовой статистики (12) при нулевой гипотезе зависит как от датировки структурного сдвига, так и от числа элементов ряда x_t (т. е. числа $I(1)$-регрессоров). При альтернативной гипотезе статистика расходится к бесконечности со скоростью $O_p(T/l)$, где l — ширина окна, используемая для оценивания долгосрочной дисперсии. Соответствующие критические значения приведены в (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006; Arai, Kurozumi, 2007).

При коррелированности регрессора и ошибки (x_t и e_t) рекомендуется, например, дополнить регрессию (1) или (9) опережающими и запаздывающими разностями («leads and lags», см. (Saikkonen, 1991; Stock, Watson, 1993)). Этот подход также часто называют динамическим методом наименьших квадратов (DOLS), и рассматриваемые выше модели (1) и (9) переписываются следующим образом:

$$y_t = f(t) + \beta' x_t + \sum_{i=-K_L}^{K_U} \pi_i' \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t , \tag{13}$$

$$y_t = f(t) + \beta_1' x_t + \beta_2' x_t DU_t + \sum_{i=-K_L}^{K_U} \pi_i' \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t , \tag{14}$$

где K_L — число запаздывающих разностей, K_U — число опережающих разностей. Частный случай $K_L = K_U$ был рассмотрен в (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006; Arai, Kurozumi, 2007). В (Choi, Kurozumi, 2012) рекомендуется использовать различное число опережающих и запаздывающих разностей, выбираемое на основе информационных критериев, таких как, например, $BIC = n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{t=K_L+2}^{T-K_U} \hat{e}_t^2\right) + (k)\ln(n)$, где $n = T - K_L - K_U - 1$, (k) — число пара-

[3] Чтобы эта оценка была состоятельной, рекомендуется подход к выбору ширины окна, предложенный в (Kurozumi, 2002). Этот подход использует ядро Бартлетта в оценке долгосрочной дисперсии, оцененной на нулевой частоте с параметром ширины окна l, выбранным следующим образом: $l = 1.1447\min\left(\left\{\frac{4\hat{\rho}^2 T}{(1+\hat{\rho})^2(1-\hat{\rho})^2}\right\}^{1/3}, \left\{\frac{4k^2 T}{(1+k)^2(1-k)^2}\right\}^{1/3}\right)$, где $\hat{\rho}$ — оценка AR(1)-коэффициента для остатков e_t, а $k = 0.8$, как предложено в (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006).

метров в модели. Также в работе (Kejriwal, Perron, 2008a) показывается, что использование информационных критериев предпочтительнее последовательного исключения незначимых опережающих и запаздывающих разностей.

Можно показать, что выполняется свойство строгой экзогенности вида

$$\mathrm{E}(v_{2t}\varepsilon_{t+k}) = 0 \quad \text{для} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{15}$$

Параметры усечения K_U и K_L должны быть достаточно большими, чтобы эффект усечения стал незначительным, т. к. формально условие (15) выполняется при $K_L = K_U = \infty$, но не слишком большими, т. к. это увеличит неэффективность оценивания β. Важно отметить, что не включаются запаздывающие и опережающие значения переменной $\Delta x_t DU_t$, т. к. требование для получения асимптотической эффективности заключается в экзогенности ε_t по отношению к регрессорам. Заметим, что в (15) это требование выполняется, т. е. ε_t строго экзогенен не только по отношению к Δx_{t-i}, но и по отношению к $\Delta x_{t-i} DU_t$.

Приведенный выше анализ строится на предположении, что даты структурных сдвигов известны априорно. Если дата сдвига неизвестна, в (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006) и (Arai, Kurozumi, 2007) предлагается ее оценить на основе минимизации суммы квадратов остатков в уравнениях (1) и (9) по всем возможным датам сдвигов. Другими словами, оценка $\hat{\lambda}_1$ доли даты сдвига λ_1 определяются следующим образом:

$$\hat{\lambda}_1 = \underset{\lambda_1 \in \Lambda}{\operatorname{argmin}} SSR(\lambda_1), \tag{16}$$

где $SSR(\lambda_1)$ — сумма квадратов остатков в уравнении (1) или (9), Λ — замкнутое подмножество интервала $(0,1)$. В (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006) предлагается определять $\Lambda = [2/T, (T-1)/T]$ для минимизации потери информации. В (Arai, Kurozumi, 2007) в симуляциях рассматриваются два возможных варианта: $\Lambda = [0.05, 0.95]$ и $\Lambda = [0.15, 0.85]$. Свойства на малых выборках практически не отличаются для этих двух вариантов. Полученная оценка доли даты сдвига является T-состоятельной оценкой доли даты сдвига ($\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + O_p(1/T)$), из чего следует, что статистика (12) имеет то же самое распределение с оцененной датой сдвига, как если бы дата была известна. Также в регрессиях (13) и (14) можно тестировать гипотезы о коэффициентах, используя стандартную технику. Подходы, описанные выше, легко обобщаются на случай нескольких структуных сдвигов.

Как отмечается в (Carrion-i-Silvestre, Kim, 2019), тесты Arai, Kurozumi (2007) и Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló (2006) требуют наличия структурных сдвигов при нулевой гипотезе, т. е. контролируют размер только в том случае, если нет согласованных сдвигов (cobreaking). Эту проблему можно решить, используя большие процентили, полученные из двух предельных распределений — с согласованными сдвигами и без них. Carrion-i-Silvestre и Kim (2019) разрабатывают тест, который определяет, является ли линейная комбинация, устраняющая нестационарность, комбинацией со сдвигом в коинтеграционном соотношении, или же комбинацией без сдвига, если сдвиги у нескольких переменных согласованы. Также рассматривается вариант возможного согласованного трендового поведения в нестационарных временных рядах. Авторы обобщают подход Jansson (2005) для построения точечно-оптимального инвариантного теста (point optimal invariant, POI). Данный подход позволяет при помощи соответствующих ограничений (на согласованные сдвиги и на согласованные тренды) построить тесты на коинтеграцию.

Mogliani (2010) сравнивает поведение на конечных выборках нескольких тестов на коинтеграцию[4], анализируя их размер и мощность в моделях 0а, 0 и II. Хотя рассматриваемые им тесты в оригинале имеют только единственный структурный сдвиг, автор допускает появление многократных сдвигов. Если исследователь априори знает, что регрессоры строго экзогенны, то рекомендуется использовать *WE*-тесты, которые имеют размер, близкий к номинальному, и высокую мощность во всех моделях и с любым числом структурных сдвигов. Однако при нестрого экзогенных регрессорах такие тесты имеют существенные искажения размера и потерю мощности. В таких случаях рекомендуется использовать другие тесты. Симуляции показывают, что когда модель правильно специфицирована при наличии единственного сдвига, во всех рассматриваемых моделях лучше работают тесты CS_{DOLS} и CS_{DGLS} [5], а при наличии трех сдвигов — CS_{DGLS}. Когда остатки неправильно специфицированы (некорректное число сдвигов), рекомендуется применять CS_{FM} и BLS_{SSR} при наличии одного сдвига, при наличии трех сдвигов — CS_{FM} и BLS_{SSR} для моделей 0а, 0 и CS_{DOLS}, CS_{DGLS} для модели II. При пяти структурных сдвигах все тесты имеют большие искажения размера, и не рекомендуется их использовать при наличии более трех сдвигов в уровнях и в наклоне тренда и менее 200 наблюдений.

Анализ мощности тестов показывает, что тесты CS и BLS_{SSR} имеют достаточно высокую мощность, в частности, наилучшим является тест CS_{DGLS} в моделях 0а, 0 и CS_{DOLS} в модели II. Значительная потеря мощности происходит для теста WE, когда регрессоры не строго экзогенны.

Пример. Следуя (Полбин, Скроботов, 2016) и (Kurozumi, Skrobotov, 2018), рассмотрим зависимость российской экономики от цен на нефть. В данной модели в этих работах к динамике российского ВВП, потребления и инвестиций добавляется зависимость от внешних экономических условий в виде одномерной коинтегрирующей регрессии со структурными сдвигами. Рассматриваются квартальные данные российского ВВП, потребления и инвестиций с 1999 по 2019 г. в постоянных ценах 2003 г. (84 наблюдения), сезонно сглаженные при помощи процедуры TRAMO-SEATS[6]. На рисунке 1 можно видеть два периода различных темпов роста реального ВВП: восстановительный рост до середины 2008 г. и его изменение после мирового финансового кризиса. Долгосрочную зависимость реального ВВП от цен на нефть можно аппроксимировать при помощи следующей модели:

$$y_t = \mu_0 + \beta_0 t + \mu_1 DU_t + \beta_1 DT_t + \gamma p_t^{oil} + u_t,$$

где y_t — логарифм реального выпуска, p_t^{oil} — логарифм реальных цен на нефть, γ — долгосрочная эластичность реального выпуска по реальной цене на нефть. Стационарность процесса u_t предполагает наличие коинтеграции между выпуском и ценами на нефть. Структурный

[4] Были рассмотрены тесты *WE* из (Westerlund, Edgerton, 2007), CS_{DOLS} и CS_{DGLS} из (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006), CS_{FM} из (Phillips, Hansen, 1990) и (Carrion-i-Silvestre, Sansó-i-Rosselló, 2006), BL_{SSR} из (Bartley, Lee, Strazicich, 2001), основанный на доступной оценке канонической коинтегрирующей регрессии (feasible canonical cointegration regression estimator).

[5] Оценка CS_{DGLS} основана на регрессиях (13) и (14) с заменой x_t на $\tilde{x}_t = x_t'\hat{\varphi}(L)$, где $\hat{\varphi}(L)$ — лаговый полином остатков. Обычно $\hat{\varphi}(L)$ строится с использованием итеративной процедуры Кохрейна–Оркатта, как AR(1) процесс. После этого проводится преобразование переменных, использующее полученные оценки для $\hat{\varphi}(L)$.

[6] Источник данных: Росстат (ВВП, потребление и инвестиции), International Financial Statistics, IMF (цена на нефть), Federal Reserve Economic Data (дефлятор цен на нефть, CPI US).

сдвиг в середине 2008 г. может быть вызван реакцией динамики цен на нефть, а также изменением долгосрочных темпов роста структурной составляющей ВВП. Если имеет значение только первый источник, то в детерминированном компоненте нет структурных сдвигов.

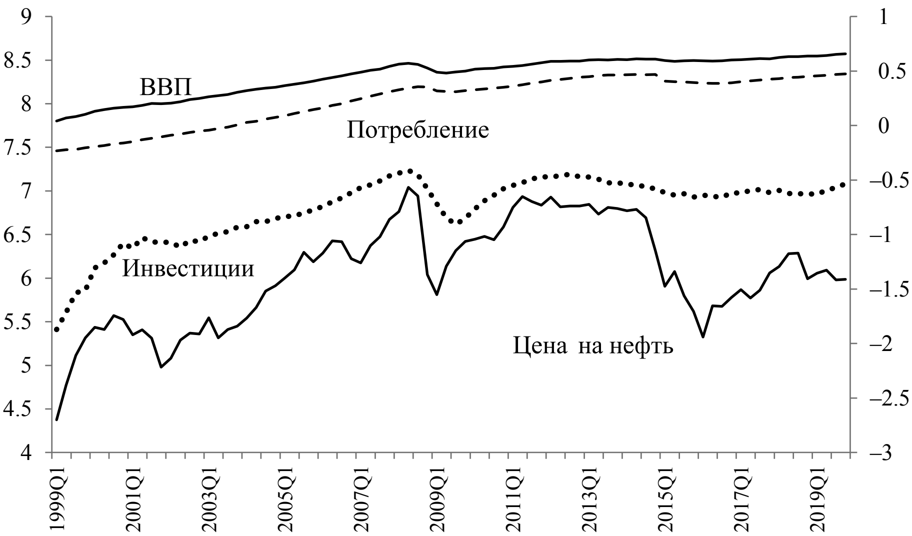

Рис. 1. Временные ряды (в логарифмах) реальных ВВП, потребления, инвестиций (левая ось) и цен на нефть (правая ось)

Также рассматриваются аналогичные регрессии с временными рядами c_t и i_t — логарифмами реальных потребления и инвестиций. Следуя (Kurozumi, Skrobotov, 2018), сначала оцениваем дату сдвига в модели без опережающих и запаздывающих разностей, выбираем число опережающих и запаздывающих разностей на основе BIC, затем переоцениваем дату сдвига в расширенной регрессии и тестируем гипотезу о наличии коинтеграции со структурным сдвигом. Результаты представлены в табл. 1. Можно видеть, что нулевая гипотеза о наличии коинтеграци не отвергается ни на одном (разумном) уровне значимости, а дата сдвига оценивается в районе 2008 г. Заметим, что если бы тестировалась гипотеза о наличии коинтеграции без учета сдвигов, то тестовые статистики были бы гораздо выше, и коинтеграция была бы отвергнута.

Таблица 1. Результаты тестов на коинтеграцию

Временные ряды	Оцененная дата сдвига	CS тест с ядром Бартлетта	CS тест с квадратичным спектральным ядром
y_t, p_t^{oil}	2008Q3	0.045 (0.535*** без сдвига)	0.045 (0.563*** без сдвига)
c_t, p_t^{oil}	2007Q1	0.026 (0.272*** без сдвига)	0.026 (0.285*** без сдвига)
i_t, p_t^{oil}	2008Q2	0.044 (0.162** без сдвига)	0.043 (0.162** без сдвига)

Примечание. *, **, *** обозначают отвержение на 10, 5 и 1%-ном уровне значимости.

Остаются важные вопросы определения числа структурных сдвигов в одном коинтеграционном соотношении, построения доверительных интервалов для дат сдвигов, а также тестирования коэффициентов в модели. Эти проблемы были рассмотрены в двух взаимосвязанных работах. В (Kejriwal, Perron, 2008b) анализируется коинтегрирующая регрессия с произвольным числом структурных сдвигов, а также выводятся предельные распределения коэффициентов и дат структурных сдвигов, а в (Kejriwal, Perron, 2010) рассматриваются проблемы тестирования наличия структурных сдвигов и предлагаются различные тесты (в том числе последовательная процедура на определение числа сдвигов). Хотя в этих работах допускается присутствие в модели $I(0)$-регрессоров, для простоты ограничимся описанием модели только с $I(1)$-регрессорами.

Пусть имеется следующая модель линейной регрессии с m структурными сдвигами ($m+1$ режимами):

$$y_t = c_j + z'_{f,t}\delta_f + z'_{b,t}\delta_{b,j} + u_t, \quad t = T_{j-1}+1,\ldots,T_j,\ j=1,\ldots,m+1, \tag{17}$$

где $T_0 = 0$, $T_{m+1} = T$, $T_1,\ldots,T_m$ — даты структурных сдвигов, которые предполагаются неизвестными. В этой модели y_t — $I(1)$-переменная, $z_{f,t}$ — ($q_f \times 1$) и $z_{b,t}$ — ($q_b \times 1$) векторы $I(1)$-регрессоров, определенные как $z_{f,t} = z_{f,t-1} + u^f_{z,t}$ и $z_{b,t} = z_{b,t-1} + u^b_{z,t}$, где начальные значения $z_{f,0}$ и $z_{b,0}$ предполагаются для упрощения либо $O_p(1)$, либо фиксированными константами. Переменные, у которых в новом режиме изменяется коэффициент, обозначаются индексом b, а индексом f обозначаются переменные, коэффициенты при которых постоянны во всех режимах. Модель, в которой дополнительно присутствуют не изменяющиеся на всей выборке переменные, часто называется моделью с частичным структурным сдвигом. В модели также допускается наличие детерминированного тренда в каждом из режимов в $I(1)$-регрессорах в форме $\tilde{z}_{f,t} = \theta_f t + z_{f,t}$ и $\tilde{z}_{b,t} = \theta_b t + z_{b,t}$ с $q_b > 1$ и $\theta_b \neq 0$.

Оценки параметров можно получить на основе минимизации суммы квадратов остатков по всем возможным датам сдвигов. Для каждого m-разбиения $(T_1,\ldots,T_m)$ такого, что $T_i - T_{i-1} \geq \varepsilon T$ для некоторого ε, связанные с ним OLS-оценки δ_f и $\gamma = (\delta'_{b,1},\ldots,\delta'_{b,m+1})$ можно получить, минимизируя[7]

$$SSR_T(T_1,\ldots,T_m) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{t=T_{i-1}+1}^{T_i} \left[y_t - c - z'_{f,t}\delta_f - z'_{b,t}\delta_{b,j} \right]^2. \tag{18}$$

Пусть H_0^a обозначает ограничения вида $\{c_j = c,\ \delta_{b,j} = \delta_b$ для всех $j = 1,\ldots,m+1\}$. Kejriwal и Perron (2010) предлагают следующие комбинации нулевых и альтернативных гипотез для тестирования общей модели (17):

1) $\mathrm{H}_0^a(1) = \{H_0^a, q_f = 0\}$ против $\mathrm{H}_1^a(1) = \{q_f = 0\}$ ($y_t = c_j + z'_{b,t}\delta_{b,j} + u_t$) — чистый структурный сдвиг, константа изменяется между режимами;

2) $\mathrm{H}_0^a(2) = \{H_0^a, q_b = 0\}$ против $\mathrm{H}_1^a(2) = \{q_b = 0\}$ ($y_t = c_j + z'_{f,t}\delta_f + u_t$) — частичный структурный сдвиг, константа изменяется между режимами;

3) $\mathrm{H}_0^a(3) = \{H_0^a, q_f = 0\}$ против $\mathrm{H}_1^a(3) = \{c_j = c$ для всех $j = 1,\ldots,m+1,\ q_f = 0\}$ ($y_t = c + z'_{b,t}\delta_{b,j} + u_t$) — частичный структурный сдвиг, константа не изменяется между режимами;

[7] Если больше двух сдвигов, для ускорения вычисления можно использовать алгоритм (Bai, Perron, 2003).

4) $\mathrm{H}_0^a(4)=\{H_0^a\}$ против $\mathrm{H}_1^a(4)=\{\text{нет ограничений}\}$ ($y_t=c_j+z'_{f,t}\delta_f+z'_{b,t}\delta_{b,j}+u_t$) — блочно-частичный структурный сдвиг, подмножество $I(1)$-коэффициентов и константа изменяются между режимами;

5) $\mathrm{H}_0^a(5)=\{H_0^a\}$ против $\mathrm{H}_1^a(5)=\{c_j=c \text{ для всех } j=1,\ldots,m+1\}$ ($y_t=c+z'_{f,t}\delta_f+z'_{b,t}\delta_{b,j}+u_t$) — блочно-частичный структурный сдвиг, подмножество $I(1)$-коэффициентов изменяется между режимами, константа не изменяется между режимами.

Во всех случаях нулевой гипотезой является предположение о том, что модель не имеет структурных сдвигов, а отличия заключаются лишь в числе фиксированных (не изменяющихся между режимами) регрессоров.

Для тестирования указанных выше гипотез авторы рассматривают три типа тестов[8], допускающих серийную коррелированность ошибок и эндогенные регрессоры.

Первый тип тестов применяется, когда альтернативная гипотеза включает фиксированное число сдвигов $m=k$. Для этого используется следующая версия статистики Вальда, робастная к серийно коррелированным ошибкам:

$$\text{sup-F}_T(k)=\sup_{\lambda} F_T(\lambda,k)=\sup_{\lambda}\left(\frac{SSR_0-SSR_k}{\hat{\sigma}^2}\right), \tag{19}$$

где SSR_0 — сумма квадратов остатков при нулевой гипотезе, SSR_k — сумма квадратов остатков при альтернативной гипотезе для k структурных сдвигов, $\hat{\sigma}^2$ — оценка долгосрочной дисперсии, робастная к серийной корреляции и гетероскедастичности (HAC), а sup берется по всем $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ таким, что $\lambda_i\geq\lambda_{i-1}+(\lambda_i-\lambda_{i-1})\varepsilon$, $i=1,\ldots,k+1$, $\lambda_0=0$, $\lambda_{k+1}=1$, для некоторого $\varepsilon>0$, которое обычно выбирается малым (0.05, 0.10 или 0.15). Так как доли дат сдвигов состоятельны даже в случае серийно коррелированных ошибок, оценки дат сдвигов можно рассматривать как те даты, при которых достигается супремум. Тогда можно получить робастную версию, вычисляя $F_T(\lambda,k)$ в оцененных датах сдвигов.

Проблема с данным тестом состоит в том, что с инерционными ошибками возникают очень сильные искажения размера. Причина заключается в том, что при оценивании долгосрочной дисперсии используются остатки при альтернативной гипотезе. Поэтому при вычислении оценки долгосрочной дисперсии следует использовать подход, предложенный в (Kejriwal, 2009), который заключается в следующем. Пусть оценка параметра σ есть

$$\hat{\sigma}^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2+2T^{-1}\sum_{j=1}^{T-1}w\left(j/\hat{h}\right)\sum_{t=j+1}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-j}, \tag{20}$$

где $\tilde{u}_t$ — остатки, полученные при нулевой гипотезе. Ядро $w(\cdot)$ является квадратичным спектральным, и оценка ширины окна находится, следуя подходу (Andrews, 1991), т. е. $\hat{h}=1.3221\cdot\left(\hat{a}(2)T\right)^{1/5}$, где $\hat{a}(2)=4\hat{\rho}^2/(1-\hat{\rho})^4$ и $\hat{\rho}$ — OLS-оценка регрессии $\hat{u}_t$ на $\hat{u}_{t-1}$, а $\hat{u}_t$ — остатки, полученные при альтернативной гипотезе. Этот метод, названный гибридным (hybrid method), позволяет контролировать размер в малых выборках и устранять проблему немонотонной мощности.

[8] Отметим, что если регрессоры не строго экзогенны, регрессия (17) просто дополняется опережающими и запаздывающими разностями регрессоров, все асимптотические выводы сохраняются неизменными.

Второй тест, двойной максимальный тест (double maximum test), применяется тогда, когда альтернативная гипотеза включает неизвестное число сдвигов (от 1 до некоторой верхней границы M). Основная причина введения таких тестов состоит в том, что если ряд содержит больше одного структурного сдвига, то тест на единственный структурный сдвиг может иметь низкую мощность. Кроме того, тест для определенного (заданного) числа структурных изменений может иметь немонотонную мощность, когда действительное их число больше, чем специфицировано в тесте. Соответственно, двойной максимальный тест рекомендуется применять в начале процедуры тестирования, чтобы обнаружить, что ряд действительно имеет структурные сдвиги, диапазон для числа которых изначально задается. Двойной максимальный тест определяется как

$$UD\max F_T(M) = \max_{1\le m\le M} F_T(\hat{\lambda}, m), \tag{21}$$

т. е. максимум статистик Вальда (19) по всем m.

Третья тестовая процедура предназначена для последовательного тестирования на наличие дополнительного структурного сдвига в модели. Рассмотрим модель с k сдвигами и оценками дат сдвигов $(\hat{T}_1,\ldots,\hat{T}_k)$. Процедура состоит в тестировании нулевой гипотезы о том, что имеется k сдвигов, против альтернативной гипотезы о том, что имеется $k+1$ сдвиг, так что дополнительный сдвиг может находиться в одном из $k+1$ режимов. Тестовая статистика определяется как

$$SEQ_T(k+1\,|\,k) = \max_{1\le j\le k+1} \sup_{\tau\in\Lambda_{j,\varepsilon}} \left(\frac{SSR_T(\hat{T}_1,\ldots,\hat{T}_k) - SSR_T(\hat{T}_1,\ldots,\hat{T}_{j-1},\tau,\hat{T}_j,\ldots,\hat{T}_k)}{\hat{\sigma}^2_{k+1}} \right),$$

где $\Lambda_{j,\varepsilon} = \{\tau : \hat{T}_{j-1} + (\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1})\varepsilon \le \tau \le \hat{T}_j + (\hat{T}_j - \hat{T}_{j-1})\varepsilon\}$, а $\hat{\sigma}^2_{k+1}$ — состоятельная оценка долгосрочной дисперсии при нулевой гипотезе, в которой ширина окна оценивается с использованием остатков при альтернативной гипотезе, как в (20).

Пример (продолжение 1). Можно протестировать наличие сдвига в рассмотренном выше примере с ВВП, сбережениями и инвестициями. Из таблицы 2 можно видеть, что гипотеза об отсутствии сдвига отвергается на 1%-ном уровне значимости для регрессии с потреблением и на 5%-ном уровне для регрессии с ВВП инвестициями (критические значения равны 6.737, 7.782 и 10.738 на 10, 5 и 1%-ном уровне значимости).

Таблица 2. Результаты теста на структурный сдвиг

Временные ряды	Статистика sup-$F_T(1)$
y_t, p_t^{oil}	10.62**
c_t, p_t^{oil}	10.79***
i_t, p_t^{oil}	9.18**

Примечание. *, **, *** обозначают отвержение на 10, 5 и 1%-ном уровне значимости.

3. Построение доверительных интервалов для даты структурного сдвига

Рассмотрим теперь вопрос построения доверительных интервалов (в общем случае доверительных множеств) для даты сдвига в коинтегрирующих регрессиях.

В случае регрессий, использующих стационарные переменные, дата структурного сдвига оценивается путем минимизации суммы квадратов остатков или методом максимального квазиправдоподобия, как было предложено в (Bai, 1997; Bai, Perron, 1998). При этом основным для построения доверительного интервала было предположение о том, что величина структурного сдвига сходится к нулю со скоростью меньшей, чем $1/\sqrt{T}$. На практике такая величина структурного сдвига является слишком большой, а полученная асимптотическая аппроксимация не будет хорошей на малых выборках (если сдвиг достаточно мал, то доверительный интервал будет «недонакрывать» истинную дату сдвига с заданной вероятностью). Подобная теория была также и в работах (Bai et al., 1998; Kejriwal, Perron, 2008b), где рассматривались регрессии с нестационарными переменными: при нестационарных переменных величина структурного сдвига должна сходиться к нулю со скоростью меньше, чем $T^{-1/4}$. В работе (Kurozumi, Skrobotov, 2018) был предложен метод, основанный на обращении теста на местоположение структурного сдвига. Этот метод не требует нереалистичного предположения о величине сдвига и, как показывают симуляции, превосходит подход (Bai et al., 1998; Kejriwal, Perron, 2008b), давая корректный уровень накрытия как для малых, так и для больших сдвигов.

Kurozumi и Skrobotov (2018) рассматривают линейную модель с единственным сдвигом:

$$y_t = w'_{b,t}\beta_b + w_{b,t}(\lambda_0)'\delta_b + w'_{f,t}\beta_f + e_t\,,\ t = 1,\cdots,T\,, \tag{22}$$

где $w_{b,t}$, $w_{b,t}(\lambda_0)$ и $w_{f,t}$ являются p_b-, p_b- и p_f-мерными регрессорами соответственно, $w_{b,t}(\lambda_0) = \mathrm{I}(t > [\lambda_0 T])w_{b,t}$ с индикаторной функцией $\mathrm{I}(\cdot)$, λ_0 — действительная доля структурного сдвига, $[a]$ обозначает целую часть числа, e_t — ошибка, β_b, δ_b и β_f — p_b-, p_b- и p_f-мерные векторы неизвестных коэффициентов соответственно. Поскольку целью является построение доверительного множества для даты структурного сдвига, предполагается, что в выборке происходит одномоментный структурный сдвиг, истинная дата которого обозначается как $T_0 = [\lambda_0 T]$. Заметим, что в коэффициентах, связанных с $w_{b,t}$, также происходит структурный сдвиг: они изменяются с β_b до $\beta_b + \delta_b$, в то время как β_f фиксированы во всей выборке.

Поскольку рассматривается модель коинтегрирующей регрессии, регрессоры $w_{b,t}$ и/или $w_{f,t}$ включают в себя $I(1)$-переменные, которые задаются как

$$z_{b,t} = z_{b,t-1} + u^z_{b,t}\,,\ z_{f,t} = z_{f,t-1} + u^z_{f,t}\,,$$

где $z_{b,t}$ и $z_{f,t}$ являются p^z_b- и p^z_f-мерными векторами соответственно. Для простоты далее будем предполагать отсутствие сноса (drift) $I(1)$-переменных, даже когда $w_{b,t}$ включает в себя линейный тренд. Как обсуждается в конце данного раздела, основной результат в регрессиях с $I(1)$-переменными со сносом остается неизменным, если слегка изменить статистику теста.

В общем случае ошибки $u^z_{b,t}$ и $u^z_{f,t}$ являются коррелированными с ошибками e_t в (22), и эта корреляция становится мешающим параметром. Для ее устранения опережающие и запаздывающие разности $I(1)$-переменных включаются в качестве регрессоров в модель (22), как предлагается, например, в (Saikkonen, 1991). Такая модель принимает вид

$$y_t = w'_{b,t}\beta_b + w_{b,t}(\lambda_0)'\delta_b + w'_{f,t}\beta_f + \sum_{j=-l}^{l}\pi'_{b,j}\Delta z_{b,t-j} + \sum_{j=-l}^{l}\pi'_{f,j}\Delta z_{f,t-j} + u_t, \tag{23}$$

где Δ обозначает оператор первых разностей, а число запаздывающих и опережающих разностей для удобства предполагается одинаковым и равным l, но они могут быть различными, как, например, в (Choi, Kurozumi, 2012). Далее предполагается, что u_t некоррелированы с $u^z_{b,t-j}$ и $u^z_{f,t-j}$ для всех j.

Для удобства объединим дополнительные стационарные регрессоры $\Delta z_{b,t-j}$ и $\Delta z_{f,t-j}$ и обозначим их как p^x_f-мерный вектор $x_{f,t}$. Поскольку $x_{f,t}$ состоит из первых разностей $I(1)$-регрессоров, можно всюду предположить, что $\mathrm{E}(x_{f,t}) = 0$. Кроме того, поскольку коэффициент, связанный с $x_{f,t}$, фиксирован во всей выборке, $x_{f,t}$ включается в $w_{f,t}$, так что модель можно просто записать как

$$y_t = w'_{b,t}\beta_b + w_{b,t}(\lambda_0)'\delta_b + w'_{f,t}\beta_f + u_t = w_t(\lambda_0)'\beta + u_t, \tag{24}$$

где $w_{f,t}$ включает $x_{f,t}$, и $w_t(\lambda_0) = [w'_{b,t}, w_{b,t}(\lambda_0)', w'_{f,t}]'$.

Kurozumi и Skrobotov (2018) рассматривали следующие широко используемые в практическом анализе спецификации.

Модель II-a. Константа, линейный тренд и $I(1)$-регрессоры включаются в коинтеграционное соотношение, и на все регрессоры, за исключением регрессоров первых разностей $I(1)$-регрессоров, оказывает влияние структурный сдвиг. А именно, $w_{b,t} = [1, t, z'_{b,t}]'$, $w_{f,t} = x_{f,t}$, $\beta_b = [\beta_{b,c}, \beta_{b,\tau}, \beta'_{b,z}]'$, $\delta_b = [\delta_{b,c}, \delta_{b,\tau}, \delta'_{b,z}]'$, $\beta_f = \beta_{f,x}$, т. е.

$$y_t = \beta_{b,c} + \beta_{b,\tau}t + z'_{b,t}\beta_{b,z} + \mathrm{I}(t > [\lambda_0 T])\left(\delta_{b,c} + \delta_{b,\tau}t + z'_{b,t}\delta_{b,z}\right) + x'_{f,t}\beta_{f,x} + u_t.$$

Модель II-b. Константа, линейный тренд и $I(1)$-регрессоры включаются в коинтеграционное соотношение, и сдвиг происходит только в константе и линейном тренде. А именно, $w_{b,t} = [1, t]$, $w_{f,t} = [z'_{f,t}, x'_{f,t}]'$, $\beta_b = [\beta_{b,c}, \beta_{b,\tau}]'$, $\delta_b = [\delta_{b,c}, \delta_{b,\tau}]'$, $\beta_f = [\beta'_{f,z}, \beta'_{f,x}]'$, т. е.

$$y_t = \beta_{b,c} + \beta_{b,\tau}t + \mathrm{I}(t > [\lambda_0 T])\left(\delta_{b,c} + \delta_{b,\tau}t\right) + z'_{f,t}\beta_{f,z} + x'_{f,t}\beta_{f,x} + u_t.$$

Модель II-c. Константа, линейный тренд и $I(1)$-регрессоры включаются в коинтеграционное соотношение, и некоторые коэффициенты, связанных с $I(1)$-регрессорами, являются фиксированными во всей выборке. А именно, $w_{b,t} = [1, t, z'_{b,t}]'$, $w_{f,t} = [z'_{f,t}, x'_{f,t}]'$, $\beta_b = [\beta_{b,c}, \beta_{b,\tau}, \beta'_{b,z}]'$, $\delta_b = [\delta_{b,c}, \delta_{b,\tau}, \delta'_{b,z}]'$, $\beta_f = [\beta'_{f,z}, \beta'_{f,x}]'$, т. е.

$$y_t = \beta_{b,c} + \beta_{b,\tau}t + z'_{b,t}\beta_{b,z} + 1(t > [\lambda_0 T])\left(\delta_{b,c} + \delta_{b,\tau}t + z_{b,t}{}'\delta_{b,z}\right) + z'_{f,t}\beta_{f,z} + x'_{f,t}\beta_{f,x} + u_t.$$

Также авторами были рассмотрены модели I-a, I-b, I-c, которые отличаются от соответствующих моделей II-a, II-b, II-c только отсутствием линейного тренда.

В этих моделях ошибка u_t предполагается некоррелированной со всеми опережающими и запаздывающими разностями $\Delta z_{b,t}$ и $\Delta z_{f,t}$. Также не допускается коинтеграция среди $I(1)$-регрессоров: на практике может быть несколько $I(1)$-регрессоров, и в этом случае необходимо сначала сделать вывод об отсутствии коинтеграционного соотношения среди $I(1)$-регрессоров.

Для неизвестной даты структурного сдвига Kurozumi и Skrobotov (2018) проверяют гипотезу:

$$\mathrm{H}_N : T_0 = T_1 \quad \text{против} \quad \mathrm{H}_A : T_0 = T_2 \tag{25}$$

или

$$\mathrm{H}_N : \lambda_0 = \lambda_1 \quad \text{против} \quad \mathrm{H}_A : \lambda_0 = \lambda_2, \tag{26}$$

где $\lambda_1 = T_1/T$ и $\lambda_2 = T_2/T$ на уровне значимости α, и если нулевая гипотеза не отвергается, то T_1 включается в доверительное множество; в противном случае T_1 исключается из доверительного множества. Проводя этот тест для всех допустимых дат структурных сдвигов, они получают доверительное множество для даты структурного сдвига с уровнем доверия $1-\alpha$. В этой процедуре доверительное множество становится меньше, если тест становится более мощным, и поэтому необходимо построить как можно более мощный тест. Однако нетрудно видеть, что не существует равномерно наиболее мощного теста для тестирования гипотезы (25). Вместо этого, следуя рекомендациям в литературе, авторы рассматривают тест, который максимизирует взвешенную среднюю мощность.

Сначала отметим, что нельзя непосредственно оценить (24), используя $w_{b,t}(\lambda_0)$, поскольку $w_{b,t}(\lambda_0)$ зависит от неизвестной доли даты сдвига λ_0. Поскольку тестовая задача задается как (25), рассмотрим оценивание модели при нулевой гипотезе и построим тестовую статистику. Пусть $w_{b,t}(\lambda_1) = \mathrm{I}(t > [\lambda_1 T])w_{b,t}$ и $r_t(\lambda_0, \lambda_1) = w_{b,t}(\lambda_0) - w_{b,t}(\lambda_1)$. Тогда модель (24) можно записать как

$$\begin{aligned} y_t &= w'_{b,t}\beta_b + w_{b,t}(\lambda_0)'\delta + w'_{f,t}\beta_f + u_t = \\ &= w'_{b,t}\beta_b + w_{b,t}(\lambda_1)'\delta + w'_{f,t}\beta_f + u_t + r_t(\lambda_0, \lambda_1)'\delta = \\ &= w_t(\lambda_1)'\beta + u_t(\lambda_0, \lambda_1), \end{aligned} \tag{27}$$

где $w_t(\lambda_1) = [w'_{b,t}, w_{b,t}(\lambda_1)', w'_{f,t}]'$ и $u_t(\lambda_0, \lambda_1) = u_t + r_t(\lambda_0, \lambda_1)'\delta$. Можно показать, что не существует равномерно наиболее мощного теста, и мощность теста будет зависеть от величины структурного сдвига δ и местоположения структурного сдвига при альтернативной гипотезе λ_2. Таким образом, мощность можно записать как вероятность $\mathrm{P}\left(\varphi \text{ отвергает } \mathrm{H}_N \mid \delta, \lambda_2\right)$, где φ — тест для проверки (26) на уровне значимости α. Следуя (Andrews, Ploberger, 1994; Elliott, Müller, 2007; Kurozumi, Yamamoto, 2015), Kurozumi и Skrobotov (2018) рассматривали максимизацию взвешенного среднего $\mathrm{P}\left(\varphi \text{ отвергает } \mathrm{H}_N \mid \delta, \lambda_2\right)$ по δ и λ_2, используя некоторые взвешивающие функции:

$$\int\int \mathrm{P}\left(\varphi \text{ отвергает } \mathrm{H}_N \mid \delta, \lambda_2\right) dQ_{\lambda_2}(\delta) dJ(\lambda_2), \tag{28}$$

где $Q_{\lambda_2}(\delta)$ и $J(\lambda_2)$ являются неотрицательными мерами на $\mathbb{R}^{p_b}$ и $(0,1)$ соответственно. Обычно эти взвешивающие функции выбираются таким образом, чтобы асимптотическое распределение тестовой статистики не зависело от мешающих параметров. Авторы выводят тест отношения правдоподобия, который максимизирует среднюю мощность, определенную в (28), и получают его предельное распределение. Для моделей без $I(1)$-регрессоров с фиксированными коэффициентами предельные распределения имеют более простой вид, поскольку в этих моделях регрессор $w_{b,t}$, в коэффициентах которого происходит структурный сдвиг, становится асимптотически ортогональным другим регрессорам $w_{f,t}$ с фиксированными коэффициентами. Когда $I(1)$-регрессоры включены в $w_{f,t}$, $w_{b,t}$ коррелирован с $w_{f,t}$ даже в пределе, и, таким образом, предельное распределение тестовой статистики зависит от числа $I(1)$-регрессоров с фиксированными коэффициентами. Критические значения этих распределений зависят от λ_1, и их неудобно табулировать для всех допустимых долей дат структурных сдвигов λ_1. Вместо этого, Kurozumi и Skrobotov (2018) приводят регрессии поверхности отклика для вычисления критических значений.

Предельное распределение теста зависит также от локализующего параметра c, который контролирует вес величины структурного сдвига. Тест может лучше обнаружить небольшой структурный сдвиг, когда c близко к нулю, в то время как тест с большим значением c подходит для большого структурного сдвига. Следуя (Andrews, Ploberger, 1994), Kurozumi и Skrobotov (2018) рассматривают тест типа среднего, для которого вес накладывается на небольшое изменение ($c \to 0$), тест типа экспоненциального, для которого принимается во внимание большая величина сдвига ($c \to \infty$), а также, следуя (Andrews, 1993), тест типа супремум.

В итоге, эти тесты имеют вид:

$$\text{sup-}LR_T(T_1) = \max_{T_2 \in T_\varepsilon} F_{T_2}(T_1), \tag{29}$$

$$\text{avg-}LR_T(T_1) = \frac{1}{T^*} \sum_{T_2 \in T_\varepsilon} F_{T_2}(T_1), \tag{30}$$

$$\text{exp-}LR_T(T_1) = \log\left\{ \frac{1}{T^*} \sum_{T_2 \in T_\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{2} F_{T_2}(T_1) \right) \right\}, \tag{31}$$

где $T_\varepsilon = \{T_2 : \ \varepsilon T \le T_2 < T_1 - \varepsilon T, \ T_1 + \varepsilon T < T_2 \le (1-\varepsilon)T\}$, T^* — число значений T_2, включенных в T_ε. $F_{T_2}(T_1)$ является тестовой статистикой для простой нулевой гипотезы $T_0 = T_1$ против простой альтернативы $T_0 = T_2$, которая задается как

$$F_{T_2}(T_1) = \begin{cases} \left(\sum_{t=T_2+1}^{T_1} w_{b,t} \hat{u}_t \right) \left(\tilde{\omega}_{uu} \hat{H} \right)^{-1} \left(\sum_{t=T_2+1}^{T_1} w_{b,t} \hat{u}_t \right), & \text{если } T_2 < T_1, \\ \left(\sum_{t=T_1+1}^{T_2} w_{b,t} \hat{u}_t \right) \left(\tilde{\omega}_{uu} \hat{H} \right)^{-1} \left(\sum_{t=T_1+1}^{T_2} w_{b,t} \hat{u}_t \right), & \text{если } T_1 < T_2, \end{cases}$$

где $\hat{u}_t$ являются регрессионными остатками от регрессии y_t на $w_{b,t}$, $w_{b,t}(\lambda_1)$ и $w_{f,t}$, $\hat{H} = \sum_{t=1}^{T} \hat{r}_t(\lambda_2, \lambda) \hat{r}_t(\lambda_2, \lambda_1)'$ с регрессионными остатками $\hat{r}_t$ от регрессии $r_t(\lambda_2, \lambda_1)$ на $w_t(\lambda_1)$ и $\tilde{\omega}_{uu}$ является состоятельной оценкой ω_{uu}. Эту оценку можно вычислить, применяя подход Yamamoto (2018), так, чтобы она была состоятельной и при нулевой, и при альтернативной гипотезе.

Когда $I(1)$-регрессоры имеют компонент сноса, обычно включается линейный тренд в регрессии. Поскольку константа и линейный тренд (со структурным сдвигом) включены как регрессоры в модели от II-a до II-c, тестовая статистика $\widetilde{LR}_T(\lambda_1)$ является инвариантной к компоненту сноса $I(1)$-регрессоров, если заменить $\Delta z_{b,t-j}$ и $\Delta z_{f,t-j}$ в $x_{f,t}$ на усредненные варианты $\Delta z_{b,t-j} - \overline{\Delta z_b}$ и $z_{f,t-j} - \overline{\Delta z_f}$ соответственно, чтобы гарантировать $\mathrm{E}[x_{f,t}] = 0$. Заметим, что когда $I(1)$-регрессоры имеют компонент сноса в моделях с I-a до I-c, предельное распределение будет отличаться от того, которое приведено в теореме 1 из (Kurozumi, Skrobotov, 2018). Однако этот случай не рассматривается, поскольку естественно и более реалистично включить линейный тренд в модели с II-a до II-c, когда $I(1)$-переменные имеют снос. Заметим также, что компонент сноса $I(1)$-регрессоров сам может иметь структурный сдвиг, поскольку он может быть поглощен линейным трендом (со структурным сдвигом). В этом случае усредненные версии $I(1)$-регрессоров можно построить, используя оцененную дату сдвига (подробнее см. (Kurozumi, Skrobotov, 2018, Section 3)).

Пример (продолжение 2). Продолжая уже рассмотренный пример с реальными ВВП, потреблением и инвестициями, можно построить доверительные множества для даты сдвига. Результаты представлены в табл. 3. Можно видеть, что sup, avg и exp статистики (29)–(31) дают немного разные доверительные множества, причем некоторые множества оказываются разрывными (что, вообще говоря, может иметь место). В последнем столбце (bls) приводятся симметричные интервалы по методу (Bai et al., 1998).

Таблица 3. Доверительные множества для даты структурного сдвига

Временные ряды	Доверительное множество			
	sup	avg	exp	bls
y_t, p_t^{oil}	2008Q2–2009Q1	2008Q2	2008Q2–2008Q4	2008Q2–2009Q1
c_t, p_t^{oil}	2006Q3–2008Q2 2009Q3	2006Q4–2008Q3	2006Q3–2008Q2	2006Q2–2007Q4
i_t, p_t^{oil}	2004Q4–2007Q3 2008Q1–2009Q1	2004Q3–2005Q2 2008Q1–2008Q2	2008Q1–2008Q2	2007Q2–2009Q2

Отметим, что данный подход можно использовать и как тест на наличие структурного сдвига. Если бы доверительное множество оказалось пустым, можно было бы сделать вывод, что в действительности в рассматриваемой коинтегрирующей регрессии нет никаких сдвигов.

4. Тестирование стабильности коинтеграционного соотношения

На практике тесты на коинтеграцию могут не выявлять ее наличие, предполагаемое экономической теорией. Одной из причин этого является возможность для коинтеграционного соотношения изменяться в конце выборки, при этом коинтеграция может пропадать. Конец выборки, как предполагается, имеет конечную длину при неограниченном возрастании объема выборки.

Одно из решений проблемы нарушения коинтеграции в конце выборки было предложено в (Andrews, Kim, 2006). Авторы предложили тестировать нулевую гипотезу о стабильности во всей выборке против альтернативы о том, что происходит сдвиг в коэффициентах / распределении ошибок. Рассмотрим регрессионную модель вида

$$y_t = \begin{cases} x_t'\beta_0 + u_t, & \text{для } t = 1,\ldots,T, \\ x_t'\beta_t + u_t, & \text{для } t = T+1,\ldots,T+m. \end{cases} \tag{32}$$

При нулевой гипотезе $\beta_t = \beta_0$ для $t = T+1,\ldots,T+m$ и процесс $\{u_t\}_{t=1}^{T+m}$ является стационарным эргодическим. При альтернативной гипотезе $\beta_t \neq \beta_0$ для некоторых $t = T+1,\ldots,T+m$, и/или распределения $\{u\}_{T+1}^{T+m}$ и $\{u\}_1^T$ различаются. Это означает, что при альтернативной гипотезе имеется структурный сдвиг в коэффициентах и/или распределении ошибок.

Andrews и Kim (2006) предложили два теста (*P* и *R*). *P*-тест строится как

$$P = P_{T+1}(\hat{\beta}_{1:(T+m)}) = \sum_{t=T+1}^{T+m} \left(y_t - x_t \hat{\beta}'_{1:(T+m)} \right)^2, \tag{33}$$

где $\hat{\beta}_{1:(T+m)}$ есть OLS-оценка по всей выборке ($t = 1,\ldots,T+m$). Для проверки нулевой гипотезы о стабильности авторы предлагают использовать методы сабсемплинга и эмпирическую функцию распределения $\{P_j(\beta) = \sum_{t=j}^{j+m-1} \left(y_t - x_t\beta' \right)^2 : \ j = 1,...,T-m+1\}$ с состоятельной оценкой для β. Вместо использования простой оценки β, а именно $\hat{\beta}_{1:(T+m)}$, для исключения частого отвержения нулевой гипотезы авторы предлагают использовать оценку «leave-*m*/2-out»:

$$\hat{\beta}_{2(j)} = \text{оценка для } \beta\text{, использующая наблюдения по всей выборке } (1 \le t \le T), \\ \text{кроме } t = j,..., j + [m/2] - 1. \tag{34}$$

Тогда критическое значение на уровне значимости α можно получить как выборочный квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $\{P_j(\hat{\beta}_{2(j)}) : j = 1,\ldots,T-m+1\}$.

Также Andrews и Kim (2006) предложили другой тест вида

$$R = \sum_{t=T+1}^{T+m} \left(\sum_{s=t}^{T+m} \left(y_s - x_s \hat{\beta}'_{1:(T+m)} \right) \right)^2 \tag{35}$$

с тем же самым методом получения критических значений, как для *P*-теста. Этот тест асимптотически обоснован для более широкого класса моделей. Как показывают результаты симуляций Монте-Карло, оба метода ведут себя немного по-разному для разных моделей.

Kim (2010) обобщил подход Andrews и Kim (2006), используя квази-разности в данных (квази-GLS), и получил более робастный к серийной корреляции ошибок тест, чем в (Andrews, Kim, 2006)[9].

Пример (продолжение 3). Протестируем наличие сдвига в конце выборки для рассмотренных выше коинтегрирующих регрессий для ВВП, потребления и инвестиций. Предполагаем, что на периоде с 1999 по 2007 г. не было сдвигов, и хотим протестировать наличие сдвига в следующих 16 наблюдениях (тем самым, *T*=36, *m*=16). Результаты для тестов *P* и *R* (определенных в (33) и (35) соответственно) представлены в табл. 4. Также приводятся 95%-ные процентили, полученные на основе сабсемплинга.

[9] См. также мониторинговые процедуры (Wagner, Wied, 2017; Trapani, Whitehouse, 2020; Zeileis et al., 2005).

Таблица 4. Результаты тестов на сдвиг в конце выборки

Временные ряды	P-тест	Критическое значение	R-тест	Критическое значение
y_t, p_t^{oil}	0.041	0.008	2.098	0.044
c_t, p_t^{oil}	0.051	0.021	1.693	0.202
i_t, p_t^{oil}	0.434	0.910	17.025	4.303

Можно видеть, что стабильность отвергается почти для всех уравнений. Единственное исключение составляет уравнение с инвестициями, для которого стабильность не отвергается P-тестом, но отвергается R-тестом.

5. Нелинейные модели

Модели со структурными сдвигами, рассмотренные ранее, предполагают фиксированное число сдвигов на всем временном периоде, и эти сдвиги являются детерминированными по своей природе. Однако структурные сдвиги можно моделировать исходя из динамики самого процесса, например, когда модель состоит из нескольких режимов (в простейшем случае из двух), и переход из одного в другой регулируется на основе прошлых значений самих временных рядов[10].

Пороговая коинтеграция (threshold cointegration) была введена в работе (Balke, Fomby, 1997), в которой авторы обобщили стандартную линейную коинтеграцию, допускающую нелинейную корректировку долгосрочного равновесия. Они предложили сначала тестировать гипотезу об отсутствии коинтеграции против альтернативы о наличии коинтеграции, а затем тестировать нулевую гипотезу о коинтеграции против альтернативы о наличии пороговой коинтеграции. Hansen и Seo (2002) обобщили подход (Balke, Fomby, 1997) на многомерный случай. Они рассмотрели двухрежимную модель коррекции ошибок следующего вида[11]:

$$\Delta y_t = \begin{cases} A_1' X_{t-1}(\beta) + u_t, & \text{если } w_{t-1}(\beta) \le \gamma, \\ A_2' X_{t-1}(\beta) + u_t, & \text{если } w_{t-1}(\beta) > \gamma, \end{cases} \tag{36}$$

где $X_{t-1}(\beta) = (1, w_{t-1}(\beta), \Delta y_{t-1}, \ldots, \Delta y_{t-k})'$, $w_t(\beta) = \beta' y_t$, γ — параметр порога. Соответственно, параметры в модели зависят от того, превышает ли стационарная линейная комбинация $w_t(\beta)$ в предыдущий момент времени некоторый порог γ. В данной модели предполагается, что все переменные в модели меняются между режимами, хотя можно наложить разумные ограничения, например, что константа и краткосрочные параметры при запаздывающих разностях являются постоянными. Эту модель можно переписать в линейном виде как

$$\Delta y_t = A_1' X_{t-1}(\beta) \mathrm{I}(w_{t-1}(\beta) \le \gamma) + A_2' X_{t-1}(\beta) \mathrm{I}(w_{t-1}(\beta) > \gamma) + u_t. \tag{37}$$

[10] Обзор экономических приложений пороговых моделей см. в (Hansen, 2011).

[11] В работе (Saikkonen, 2005) выводятся условия, гарантирующие стационарность линейного долгосрочного соотношения, когда краткосрочная динамика в модели коррекции ошибок является нелинейной достаточно произвольного вида. В (Saikkonen, 2008) обобщаются результаты из (Saikkonen, 2005), а также выводится аналог теоремы представления Грейнджера в контексте нелинейных векторных авторегрессионных моделей.

Данную модель можно оценить как на основе метода максимального правдоподобия, так и на основе более быстрого двухшагового метода. При этом на первом шаге вычисляются оценки $\hat{A}_1(\beta,\gamma)$, $\hat{A}_2(\beta,\gamma)$ и ковариационная матрица ошибок $u_t(\beta,\gamma)$ для всех возможных комбинаций (β,γ) (простым поиском по сетке, используя допустимое множество для параметров β на основе состоятельной оценки по линейной модели), а затем минимизируется определитель логарифма этой ковариационной матрицы по всем возможным (β,γ). Асимптотические свойства параметров оцененной модели, в том числе параметра порога, были исследованы в (Seo, 2011), где также предлагается сглаженное оценивание (smoothed least squares), позволяющее получить асимптотически нормальные оценки порога, но сходящиеся к нормальному распределению с более низкой скоростью, чем $n^{-1/2}$. Kristensen и Rahbek (2010, 2013) предлагают использовать для оценивания метод QMLE, тем самым обобщая подход (Johansen, 1995) на случай, когда коррекция в сторону долгосрочного соотношения происходит нелинейно посредством гладкой переходной функции, которая может быть и асимметричной. Авторы также допускают наличие более одного коинтеграционного соотношения.

Для тестирования гипотезы о линейности (линейной коинтеграции), т. е. $A_1 = A_2$, Hansen и Seo (2002) предлагают использовать Sup-LM статистику вида

$$\text{Sup-LM} = \sup_{\gamma_L \le \gamma \le \gamma_U} LM(\tilde{\beta},\gamma), \tag{38}$$

где

$$LM(\beta,\gamma) = vec\left(\hat{A}_1(\beta,\gamma) - \hat{A}_2(\beta,\gamma)\right)' \left(\hat{V}_1(\beta,\gamma) + \hat{V}_2(\beta,\gamma)\right)^{-1} vec\left(\hat{A}_1(\beta,\gamma) - \hat{A}_2(\beta,\gamma)\right), \tag{39}$$

а $\hat{V}_1(\beta,\gamma)$ и $\hat{V}_2(\beta,\gamma)$ — робастные к гетероскедастичности оценки ковариационной матрицы оценок $vec\left(\hat{A}_1(\beta,\gamma)\right)$ и $vec\left(\hat{A}_2(\beta,\gamma)\right)$. В (38) используется $\tilde{\beta}$, полученная от оценивания модели при нулевой гипотезе, если параметр β неизвестен. Поскольку порог γ также может быть неизвестен, в (38) берется супремум по всем возможным порогам, т. к. в условиях нулевой гипотезы нет порога и, значит, не существует параметра γ (проблема, обозначенная в (Davies, 1987)). Важно отметить, что параметр γ, обеспечивающий максимальное значение *LM*-статистики, может отличаться от оценки параметра γ, полученной при максимизации (при альтернативной гипотезе) функции правдоподобия. Для тестирования гипотезы о линейности при помощи Sup-LM теста Hansen и Seo (2002) предлагают использовать алгоритм бутстрапа с фиксированными регрессорами (fixed regressor bootstrap) или бутстрапа, основанного на остатках (residual bootstrap). Они, однако, не доказывают асимптотическую обоснованность бутстраповских тестов, ограничиваясь выводом асимптотического распределения тестовых статистик и демонстрацией работы бутстрапа на симуляциях.

В работе (Seo, 2006) разработан тест для проверки нулевой гипотезы о линейности и отсутствии коинтеграции в пороговой модели коррекции ошибок. В то время как Hansen и Seo (2002) предлагают тестировать линейность против нелинейности после проверки гипотезы об отсутствии коинтеграции, тестирование последней гипотезы может давать некорректные выводы, если в действительности коинтеграция нелинейная. Таким образом, тест Seo (2006) учитывает, что при альтернативной гипотезе коинтеграция может быть как линейная, так и пороговая. Таким образом, нулевая гипотеза в модели (37) — это $A_1 = A_2 = 0$. Seo (2006) предложил использовать максимум статистики Вальда с бутстраповскими критическими значениями (используя бутстрап, основанный на остатках), устанавливая состоятельность бутстрапа первого порядка. В (Gonzalo, Pitarakis, 2006b) рассматривалась похожая модель, однако она не ограничивалась тем, что пороговая переменная — это обязательно коинтеграционное соотношение. Также не делалось предположений о том, является ли модель полностью коинтеграционной (т. е. ранг коинтеграции мог быть равен 0 или числу переменных). Gonzalo и Pitarakis (2006b) предлагают использовать статистику Вальда для проверки гипотезы о линейности против альтернативы, что модель нелинейная (пороговая). Предельное распределение, полученное авторами, не зависит от ранга коинтеграции.

Нелинейность может быть и в самом коинтеграционном соотношении. В работе (Saikkonen, Choi, 2004) была рассмотрена модель вида

$$y_t = g(x_t, \theta) + u_t, \tag{40}$$

где $g(x_t, \theta)$ — заданная гладкая функция, зависящая от нестационарного процесса x_t. В (Gonzalo, Pitarakis, 2006a) рассмотрена похожая пороговая модель вида

$$y_t = \beta' x_t + \lambda' x_t \mathrm{I}(q_{t-d} > \gamma) + u_t, \tag{41}$$

где q_{t-d} — стационарная пороговая переменная[12]. Saikkonen и Choi (2004) разработали асимптотическую теорию для коинтеграционной модели общего вида, охватывающей такую нелинейную переходную динамику, где существование нелинейности предполагалось изначально. Choi и Saikkonen (2004) предложили тестовую процедуру для проверки гипотезы о линейности, основанную на разложении Тейлора функции $g(\cdot)$ в (40). В (Gonzalo, Pitarakis, 2006a) был предложен LM-тест для проверки гипотезы $\lambda = 0$ в (41). Работа (Choi, Saikkonen, 2010) предлагает тест на существование нелинейной коинтеграции, основанный на тесте Kwiatkowski et al. (1992), применяемом к подвыборкам остатков в регрессии (40). Общую теорию нелинейной коинтеграции можно посмотреть также в (Wang, 2015) и по ссылкам в ней.

Наконец, отметим работы (Psaradakis et al., 2004; Hu, Shin, 2014), в которых нелинейность в компоненте коррекции ошибок следует процессу с марковскими переключениями (Markov switching ECM).

Благодарности. Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы государственного задания РАНХиГС.

Список литературы

Скроботов А. А. (2020). Структурные сдвиги и тестирование на единичный корень. *Прикладная эконометрика*, 58, 96–141.

Andrews D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59, 817–858.

Andrews D. W. K. (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61, 821–856.

Andrews D. W. K., Kim J.-Y. (2006). Tests for cointegration breakdown over a short time period. *Journal of Business and Economic Statistics*, 24, 379–394.

[12] В (Medeiros et al., 2014) было исследовано поведение оценок при неучтенной нелинейности в коинтеграционном соотношении.

Andrews D. W. K., Ploberger W. (1994). Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica*, 62, 1383–1414.

Arai Y., Kurozumi E. (2007). Testing for the null hypothesis of cointegration with a structural break. *Econometric Reviews*, 26, 705–739.

Bai J. (1997). Estimation of a change point in multiple regression models. *The Review of Economics and Statistics*, 79, 551–563.

Bai J., Lumsdaine R. L., Stock J. H. (1998). Testing for and dating breaks in integrated and cointegrated time series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 47–78.

Bai J., Perron P. (2003). Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of Applied Econometrics*, 18, 1–22.

Balke N. S., Fomby T. B. (1997). Threshold cointegration. *International Economic Review*, 627–645.

Bartley W. A., Lee J., Strazicich M. C. (2001). Testing the null of cointegration in the presence of a structural break. *Economics Letters*, 73, 315–323.

Carrion-i-Silvestre J. L., Sansó-i-Rosselló A. J. (2006). Testing the null of cointegration with structural breaks. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 68, 623–646.

Carrion-i-Silvestre J. L., Kim D. (2019). Quasi-likelihood ratio tests for cointegration, cobreaking, and cotrending. *Econometric Reviews*, 38 (8), 881–898.

Choi I., Kurozumi E. (2012). Model selection criteria for the leads-and-lags cointegrating regression. *Journal of Econometrics*, 169, 224–238.

Choi I., Saikkonen P. (2004). Testing linearity in cointegrating smooth transition regressions. *The Econometrics Journal*, 7 (2), 341–365.

Choi I., Saikkonen P. (2010). Tests for nonlinear cointegration. *Econometric Theory*, 682–709.

Davies R. B. (1987). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present under the alternative. *Biometrika*, 74, 33–43.

Elliott G., Müller U. K. (2007). Confidence sets for the date of a single break in linear time series regressions. *Journal of Econometrics*, 141, 1196–1218.

Gonzalo J., Pitarakis J.-Y. (2006a). Threshold effects in cointegrating relationships. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 68, 813–833.

Gonzalo J., Pitarakis J.-Y. (2006b). *Threshold effects in multivariate error correction models*. Palgrave Macmillan.

Hansen B. E. (2011). Threshold autoregression in economics. *Statistics and Its Interface*, 4 (2), 123–127.

Hansen B. E., Seo B. (2002). Testing for two-regime threshold cointegration in vector error-correction models. *Journal of Econometrics*, 110 (2), 293–318.

Hansen H., Johansen S. (1999). Some tests for parameter constancy in cointegrated VAR-models. *The Econometrics Journal*, 2 (2), 306–333.

Hu L., Shin Y. (2014). Testing for cointegration in Markov switching error correction models. In: *Essays in Honor of Peter C. B. Phillips*, vol. 33, 123–150. Emerald Group Publishing Limited.

Jansson M. (2005). Point optimal tests of the null hypothesis of cointegration. *Journal of Econometrics*, 124 (1), 187–201.

Johansen S. (1995). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press, Oxford.

Kejriwal M. (2009). Tests for a mean shift with good size and monotonic power. *Economics Letters*, 102, 78–82.

Kejriwal M., Perron P. (2008a). Data dependent rules for the selection of the number of leads and lags in the Dynamic OLS cointegrating regression. *Econometric Theory*, 24, 1425–1441.

Kejriwal M., Perron P. (2008b). The limit distribution of the estimates in cointegrated regression models with multiple structural changes. *Journal of Econometrics*, 146, 59–73.

Kejriwal M., Perron P. (2010). Testing for multiple structural changes in cointegrated regression models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 28, 503–522.

Kim D. (2010). Improved and extended end-of-sample instability tests using a feasible quasi generalized least squares procedure. *Econometric Theory*, 994–1031.

Kristensen D., Rahbek A. (2010). Likelihood-based inference for cointegration with nonlinear error-correction. *Journal of Econometrics*, 158 (1), 78–94.

Kristensen D., Rahbek A. (2013). Testing and inference in nonlinear cointegrating vector error correction models. *Econometric Theory*, 1238–1288.

Kurozumi E. (2002). Testing for stationarity with a break. *Journal of Econometrics*, 108, 63–99.

Kurozumi E., Skrobotov A. (2018). Confidence sets for the break date in cointegrating regressions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 80 (3), 514–535.

Kurozumi E., Yamamoto Y. (2015). Confidence sets for the break date based on optimal tests. *Econometrics Journal*, 18, 412–435.

Kwiatkowski D., Phillips P. C. B., Schmidt P., Shin Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54, 159–178.

Medeiros M. C., Mendes E., Oxley L. (2014). A note on nonlinear cointegration, misspecification, and bimodality. *Econometric Reviews*, 33 (7), 713–731.

Mogliani M. (2010). Residual-based tests for cointegration and multiple deterministic structural breaks: A Monte Carlo study. *PSE Working Paper halshs-00564897*. HAL.

Phillips P. C. B., Durlauf S. N. (1986). Multiple time series regression with integrated processes. *Review of Economic Studies*, 53 (4), 473–495.

Phillips P. C. B., Hansen B. E. (1990). Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes. *Review of Economic Studies*, 57, 99–125.

Psaradakis Z., Sola M., Spagnolo F. (2004). On Markov error correction models, with an application to stock prices and dividends. *Journal of Applied Econometrics*, 19 (1), 69–88.

Saikkonen P. (1991). Asymptotically efficient estimation of cointegration regression. *Econometric Theory*, 7, 1–21.

Saikkonen P. (2005). Stability results for nonlinear error correction models. *Journal of Econometrics*, 127 (1), 69–81.

Saikkonen P. (2008). Stability of regime switching error correction models under linear cointegration. *Econometric Theory*, 294–318.

Saikkonen P., Choi I. (2004). Cointegrating smooth transition regressions. *Econometric Theory*, 301–340.

Seo M. (2006). Bootstrap testing for the null of no cointegration in a threshold vector error correction model. *Journal of Econometrics*, 134 (1), 129–150.

Seo M. H. (2011). Estimation of nonlinear error correction models. *Econometric Theory*, 201–234.

Stock J. H., Watson M. W. (1993). A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems. *Econometrica*, 61, 783–820.

Trapani L., Whitehouse E. (2020). Sequential monitoring for cointegrating regressions. *ArXiv preprint*, arXiv:2003.12182.

Wagner M., Wied D. (2017). Consistent monitoring of cointegrating relationships: The US housing market and the subprime crisis. *Journal of Time Series Analysis*, 38 (6), 960–980.

Wang Q. (2015). *Limit theorems for nonlinear cointegrating regression*. World Scientific.

Westerlund J., Edgerton D. L. (2007). New improved tests for cointegration with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, 28, 188–224.

Yamamoto Y. (2018). A modified confidence set for the structural break date in linear regression models. *Econometric Reviews*, 37, 974–999.

Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik K. (2005). Monitoring structural change in dynamic econometric models. *Journal of Applied Econometrics*, 20 (1), 99–121.

Поступила в редакцию 14.03.2021;
принята в печать 24.07.2021.

Skrobotov A. Structural breaks in cointegration models. *Applied Econometrics*, 2021, v. 63, pp. 117–141.

DOI: 10.22394/1993-7601-2021-63-117-141

Anton Skrobotov
RANEPA, Moscow, SPBU, Saint Petersburg, Russian Federation;
antonskrobotov@gmail.com

Structural breaks in cointegration models

This review discusses methods of testing for a cointegration in a time series in the presence of structural breaks. The review covers a large number of recently developed testing methods based on both one equation and multiple equation frameworks. In addition, various methods for estimating the dating of break dates and constructing of their confidence intervals are presented. In addition, nonlinear cointegration methods with regime switching are considered.

Keywords: testing for cointegration; testing for cointegration rank; structural breaks; error correction model.

JEL classification: C12; C22.

References

Skrobotov A. (2020). Survey on structural breaks and unit root tests. *Applied Econometrics*, 58, 96–141 (in Russian).

Andrews D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59, 817–858.

Andrews D. W. K. (1993). Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61, 821–856.

Andrews D. W. K., Kim J.-Y. (2006). Tests for cointegration breakdown over a short time period. *Journal of Business and Economic Statistics*, 24, 379–394.

Andrews D. W. K., Ploberger W. (1994). Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica*, 62, 1383–1414.

Arai Y., Kurozumi E. (2007). Testing for the null hypothesis of cointegration with a structural break. *Econometric Reviews*, 26, 705–739.

Bai J. (1997). Estimation of a change point in multiple regression models. *The Review of Economics and Statistics*, 79, 551–563.

Bai J., Lumsdaine R. L., Stock J. H. (1998). Testing for and dating breaks in integrated and cointegrated time series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 47–78.

Bai J., Perron P. (2003). Computation and analysis of multiple structural change models. *Journal of Applied Econometrics*, 18, 1–22.

Balke N. S., Fomby T. B. (1997). Threshold cointegration. *International Economic Review*, 627–645.

Bartley W. A., Lee J., Strazicich M. C. (2001). Testing the null of cointegration in the presence of a structural break. *Economics Letters*, 73, 315–323.

Carrion-i-Silvestre J. L., Sansó-i-Rosselló A. J. (2006). Testing the null of cointegration with structural breaks. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 68, 623–646.

Carrion-i-Silvestre J. L., Kim D. (2019). Quasi-likelihood ratio tests for cointegration, cobreaking, and cotrending. *Econometric Reviews*, 38 (8), 881–898.

Choi I., Kurozumi E. (2012). Model selection criteria for the leads-and-lags cointegrating regression. *Journal of Econometrics*, 169, 224–238.

Choi I., Saikkonen P. (2004). Testing linearity in cointegrating smooth transition regressions. *The Econometrics Journal*, 7 (2), 341–365.

Choi I., Saikkonen P. (2010). Tests for nonlinear cointegration. *Econometric Theory*, 682–709.

Davies R. B. (1987). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present under the alternative. *Biometrika*, 74, 33–43.

Elliott G., Müller U. K. (2007). Confidence sets for the date of a single break in linear time series regressions. *Journal of Econometrics*, 141, 1196–1218.

Gonzalo J., Pitarakis J.-Y. (2006a). Threshold effects in cointegrating relationships. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 68, 813–833.

Gonzalo J., Pitarakis J.-Y. (2006b). *Threshold effects in multivariate error correction models*. Palgrave Macmillan.

Hansen B. E. (2011). Threshold autoregression in economics. *Statistics and Its Interface*, 4 (2), 123–127.

Hansen B. E., Seo B. (2002). Testing for two-regime threshold cointegration in vector error-correction models. *Journal of Econometrics*, 110 (2), 293–318.

Hansen H., Johansen S. (1999). Some tests for parameter constancy in cointegrated VAR-models. *The Econometrics Journal*, 2 (2), 306–333.

Hu L., Shin Y. (2014). Testing for cointegration in Markov switching error correction models. In: *Essays in Honor of Peter C. B. Phillips*, vol. 33, 123–150. Emerald Group Publishing Limited.

Jansson M. (2005). Point optimal tests of the null hypothesis of cointegration. *Journal of Econometrics*, 124 (1), 187–201.

Johansen S. (1995). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press, Oxford.

Kejriwal M. (2009). Tests for a mean shift with good size and monotonic power. *Economics Letters*, 102, 78–82.

Kejriwal M., Perron P. (2008a). Data dependent rules for the selection of the number of leads and lags in the Dynamic OLS cointegrating regression. *Econometric Theory*, 24, 1425–1441.

Kejriwal M., Perron P. (2008b). The limit distribution of the estimates in cointegrated regression models with multiple structural changes. *Journal of Econometrics*, 146, 59–73.

Kejriwal M., Perron P. (2010). Testing for multiple structural changes in cointegrated regression models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 28, 503–522.

Kim D. (2010). Improved and extended end-of-sample instability tests using a feasible quasi generalized least squares procedure. *Econometric Theory*, 994–1031.

Kristensen D., Rahbek A. (2010). Likelihood-based inference for cointegration with nonlinear error-correction. *Journal of Econometrics*, 158 (1), 78–94.

Kristensen D., Rahbek A. (2013). Testing and inference in nonlinear cointegrating vector error correction models. *Econometric Theory*, 1238–1288.

Kurozumi E. (2002). Testing for stationarity with a break. *Journal of Econometrics*, 108, 63–99.

Kurozumi E., Skrobotov A. (2018). Confidence sets for the break date in cointegrating regressions. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 80 (3), 514–535.

Kurozumi E., Yamamoto Y. (2015). Confidence sets for the break date based on optimal tests. *Econometrics Journal*, 18, 412–435.

Kwiatkowski D., Phillips P. C. B., Schmidt P., Shin Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54, 159–178.

Medeiros M. C., Mendes E., Oxley L. (2014). A note on nonlinear cointegration, misspecification, and bimodality. *Econometric Reviews*, 33 (7), 713–731.

Mogliani M. (2010). Residual-based tests for cointegration and multiple deterministic structural breaks: A Monte Carlo study. *PSE Working Paper halshs-00564897*. HAL.

Phillips P. C. B., Durlauf S. N. (1986). Multiple time series regression with integrated processes. *Review of Economic Studies*, 53 (4), 473–495.

Phillips P. C. B., Hansen B. E. (1990). Statistical inference in instrumental variables regression with I(1) processes. *Review of Economic Studies*, 57, 99–125.

Psaradakis Z., Sola M., Spagnolo F. (2004). On Markov error correction models, with an application to stock prices and dividends. *Journal of Applied Econometrics*, 19 (1), 69–88.

Saikkonen P. (1991). Asymptotically efficient estimation of cointegration regression. *Econometric Theory*, 7, 1–21.

Saikkonen P. (2005). Stability results for nonlinear error correction models. *Journal of Econometrics*, 127 (1), 69–81.

Saikkonen P. (2008). Stability of regime switching error correction models under linear cointegration. *Econometric Theory*, 294–318.

Saikkonen P., Choi I. (2004). Cointegrating smooth transition regressions. *Econometric Theory*, 301–340.

Seo M. (2006). Bootstrap testing for the null of no cointegration in a threshold vector error correction model. *Journal of Econometrics*, 134 (1), 129–150.

Seo M. H. (2011). Estimation of nonlinear error correction models. *Econometric Theory*, 201–234.

Stock J. H., Watson M. W. (1993). A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems. *Econometrica*, 61, 783–820.

Trapani L., Whitehouse E. (2020). Sequential monitoring for cointegrating regressions. *ArXiv preprint*, arXiv:2003.12182.

Wagner M., Wied D. (2017). Consistent monitoring of cointegrating relationships: The US housing market and the subprime crisis. *Journal of Time Series Analysis*, 38 (6), 960–980.

Wang Q. (2015). *Limit theorems for nonlinear cointegrating regression*. World Scientific.

Westerlund J., Edgerton D. L. (2007). New improved tests for cointegration with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, 28, 188–224.

Yamamoto Y. (2018). A modified confidence set for the structural break date in linear regression models. *Econometric Reviews*, 37, 974–999.

Zeileis A., Leisch F., Kleiber C., Hornik K. (2005). Monitoring structural change in dynamic econometric models. *Journal of Applied Econometrics*, 20 (1), 99–121.

Received 14.03.2021; accepted 24.07.2021.