

Прикладная эконометрика, 2021, т. 64, с. 83–106.

Applied Econometrics, 2021, v. 64, pp. 83–106.

DOI: 10.22394/1993-7601-2021-64-83-106

А. А. Скроботов¹

Структурные сдвиги в моделях коинтеграции: многомерный случай

В данной работе рассматриваются методы тестирования ранга коинтеграции для нескольких временных рядов при наличии структурных сдвигов. Обсуждаются методы тестирования: как для случая известной даты структурного сдвига, так и требующие предварительно оценивать неизвестную дату сдвига. Также рассматривается случай возможного наличия нескольких структурных сдвигов. Отдельно обсуждаются вопросы тестирования коинтеграции при возможном изменении ранга с течением времени.

Ключевые слова: тестирование на коинтеграцию; тестирование ранга коинтеграции; структурные сдвиги; модель коррекции ошибок.

JEL classification: C12; C22.

1. Введение

Данная статья продолжает обзоры (Скроботов, 2020, 2021) по тестированию единичного корня при наличии структурных сдвигов и тестированию коинтеграции при наличии структурных сдвигов. Рассматриваются n -мерные нестационарные временные ряды $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})'$, $t = 1, \dots, T$, интегрированные порядка d , $I(d)$, т.е. такие, что $(1-L)^d y_t = C(L)\varepsilon_t$, где $C(1) \neq 0$, $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Omega)$, Ω — невырожденная матрица, $L^k y_t = y_{t-k}$ и $C(L)$ — некоторый лаговый полином. $I(d)$ -процесс называется коинтегрированным $CI(d, b)$ с коинтегрирующим вектором $\beta \neq 0$, если $\beta'y_t$ есть $I(d-b)$ -процесс, где $d \geq 1$, $1 \leq b \leq d$. Другим словами, коинтеграция подразумевает существование линейной комбинации переменных векторного процесса, которая интегрирована более низкого порядка, чем исходный процесс. Чаще всего рассматривается случай $d = 1$, т.е. (векторный) временной ряд y_t является интегрированным первого порядка², и β называется коинтегрирующим вектором, если существует стационарная линейная комбинация $\beta'y_t$. Это означает, что на коинтегрированные переменные оказывают влияние одинаковые стохастические тренды, и эти переменные, как правило, движутся сонаправленно в долгосрочном периоде. Экономически коинтеграционное соотношение интерпретируют как долгосрочное положение равновесия между временными рядами.

¹ Скроботов Антон Андреевич — РАНХиГС, Москва; СПбГУ, Центр эконометрики и бизнес аналитики, Санкт-Петербург; skrobotov@ranepa.ru; antonskrobotov@gmail.com.

² Примеры полиномиальной коинтеграции с разным порядком интегрированности временных рядов можно найти в (Kheifets, Phillips, 2021).

Рассмотрим VAR(k) модель с константой:

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \mu + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где α и β — невырожденные матрицы ($n \times r$), r — ранг коинтеграции, который равен максимальному числу линейно независимых стационарных линейных комбинаций переменных векторного процесса y_t . Матрица β состоит из коинтегрирующих векторов, а матрица α состоит из корректирующих коэффициентов (коэффициентов адаптации). Теорема Грейнджера (в изложении Johansen (1996, Chapter 4)) говорит о том, что такой процесс y_t можно записать в виде представления общих трендов:

$$y_t = C \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + \tau_1 t + \tau_0 + C^*(L) \varepsilon_t + Y_t,$$

где $\tau_1 = C\mu$, $\tau_0 = Cy_0$ зависит от начальных значений, Y_t — стационарный процесс, $C^*(L)$ — матричный полином краткосрочной динамики из разложения $C(L) = C + C^*(L)(1-L)$, где $C(L) = C_0 + C_1L + C_2L^2 + \dots$ — полином бесконечного порядка векторного процесса скользящего среднего $(1-L)y_t = C(L)(\varepsilon_t + \mu)$, $C = \beta_\perp (\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp$, $\Gamma = I - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_k$, α_\perp и β_\perp — ортогональные дополнения α и β размерности $n \times (n-r)$ такие, что $\beta' \beta_\perp = 0$, $\alpha' \alpha_\perp = 0$, $\text{rank}(\alpha, \alpha_\perp) = n$ и $\text{rank}(\beta, \beta_\perp) = n$. Таким образом, можно заключить, что накопленные суммы

$n-r$ линейных комбинаций $\alpha'_\perp \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ оказывают влияние на процесс y_t — эти линейные комбинации называются общими трендами. Добавляя тренд, получим

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \mu_0 + \mu_1 t + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

и представление общих трендов примет вид

$$y_t = C \sum_{i=1}^t (\varepsilon_i + \mu_0 + i\mu_1) + \sum_{i=0}^{\infty} C_i^* (\varepsilon_{t-i} + \mu_0 + (t-i)\mu_1),$$

так что, например, переменные μ_0 и μ_1 учитываются как в среднем процесса Δy_t , так и в коинтеграционном соотношении $\beta' y_t$.

Особенность модели коррекции ошибок заключается в том, что переменные входят в модель и в уровнях, и в разностях, а если переменные имеют одинаковый стохастический тренд, то их линейная комбинация может «сократить» это тренд (стохастическая коинтеграция). Но иногда линейная комбинация переменных может быть только стационарной относительно тренда (детерминистская коинтеграция). В этом случае удобно было бы разложить константу и тренд как $\mu_0 = \alpha \beta_0 + \gamma_0$ и $\mu_1 = \alpha \beta_1 + \gamma_1$, чтобы ошибка равновесия была в среднем нулевой, $E(\beta y_t - \beta_0 - \beta_1 t) = 0$. Тогда

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + \alpha \beta_0 + \alpha \beta_1 t + \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t,$$

что будет эквивалентно

$$\Delta y_t = \alpha(\beta', \beta_0, \beta_1) \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + \gamma_0 + \gamma_1 t + \sum_{j=1}^k \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Тогда $E(\Delta y_t) = \gamma_0 + \gamma_1 t$, так что $\gamma_0 \neq 0$ предполагает линейный рост в некоторых переменных, а $\gamma_1 \neq 0$ предполагает квадратичный тренд.

Например, если $\mu_1 = 0$, то $E(\Delta y_t) = C\mu_0 = C\gamma_0$, а $E(\beta' y_{t-1} + \beta_0) = 0$. Тогда справедливо представление $\Delta y_t - \gamma_0 = \alpha(\beta' y_{t-1} + \beta_0) +$ стационарная компонента (подробнее см. в (Juselius, 2006, Section 6.2)).

Исходя из разложения $\mu_0 = \alpha\beta_0 + \gamma_0$ и $\mu_1 = \alpha\beta_1 + \gamma_1$, имеем пять часто рассматриваемых случаев:

- 1) $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 0$ (нет детерминированной компоненты в данных);
- 2) $\mu_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$ (константа ограничена, чтобы присутствовать в коинтеграционном соотношении, а в данных нет линейного тренда, $E(\Delta y_t) = 0$);
- 3) $\mu_1 = 0$ (константа μ_0 неограниченная, нет линейного тренда в VAR, есть линейный тренд в переменных, так что $E(\Delta y_t) = \gamma_0 \neq 0$, но тренды «сокращаются» в коинтеграционном соотношении);
- 4) $\gamma_1 = 0$, но $\gamma_0, \beta_0, \beta_1 \neq 0$ (тренд ограничен, т. е. появляется только в коинтеграционном соотношении и не сокращается, но константа неограничена, $E(\Delta y_t) = \gamma_0 \neq 0$);
- 5) μ_0, μ_1 не ограничены (константа и тренд не ограничены), так что линейный тренд наблюдается в разностях Δy_t , $E(\Delta y_t) = \gamma_0 + \gamma_1 t$ и, таким образом, в данных наблюдается квадратичный тренд в y_t .

Представление в виде общих трендов тогда можно переписать как

$$y_t = C(\tau_1 t + \tau_2 t^2) + C \sum \varepsilon_t + C^*(L)\varepsilon_t + \tilde{Y}_0,$$

где \tilde{Y}_0 состоит из начального значения y_0 процесса y_t и начального значения краткосрочной динамики $C^*(L)\varepsilon_0$ (подробности см. в (Juselius, 2006, Section 6.4)).

Конечно, предположения о неизменной константе (постоянных темпов роста временных рядов) и неизменном коинтеграционном соотношении, стационарном относительно линейного тренда, кажутся слишком ограничительными и могут выполняться только на коротких временных горизонтах (Juselius, 2006, Sections 6.5, 6.6). Изменение экономической политики и какие-то экстраординарные события (кризисы) могут изменить поведение переменных и коинтеграционные соотношения, а также могут измениться темпы роста наблюдаемых переменных. Когда нужно оценить ранг коинтеграции, обычно используется последовательная процедура Йохансена (Johansen, 1988). Сначала тестируется гипотеза о том, что ранг равен 0 ($r = 0$) против альтернативы, что $r > 0$, затем, если гипотеза отвергается, осуществляется переход к тестированию $r = 1$ против альтернативы $r > 1$, и так далее до тех пор, пока гипотеза будет не отвергаться. Такая последовательная процедура «от частного к общему» дает неотвержение истинного ранга коинтеграции асимптотически в 95% случаев (для теста на 5%-ном уровне значимости), в отличие от последовательной процедуры «от общему к частному», которая будет давать неотвержение истинного ранга коинтеграции с вероятностью меньшей, чем 95% (Juselius, 2006, Section 8.1). Структурные сдвиги во временных рядах (например, изменение наклона тренда — непостоянство параметра μ_1) будут искажать тесты на ранг коинтеграции, как и в ситуации с учетом структурных сдвигов в одномерном

случае (Скроботов, 2021). Как подчеркивается в Inoue (1999), тесты на коинтеграцию при наличии структурного сдвига в тренде могут занижать истинный ранг коинтеграции, поскольку идентифицированы будут те коинтеграционные соотношения (а ранг коинтеграции — это число таких соотношений), в которых нет структурных сдвигов. Критические значения для моделей, в которые включаются структурные сдвиги, также меняются, поскольку меняются асимптотические распределения тестов на ранг — для каждой новой детерминированной компоненты критические значения сдвигаются вправо. Симуляции в (Harris et al., 2016) показывают также искажения размера тестов на коинтеграцию в этом случае. Многомерные коинтеграционные модели усложняются при наличии структурных сдвигов, поскольку необходимо раскладывать детерминированную компоненту на две части, одна из которых входит в коинтеграционное соотношение, а вторая обеспечивает темпы роста переменных (или изменения темпов роста).

В данном обзоре обсуждается, как тестировать векторный временной ряд на ранг коинтеграции при наличии структурных сдвигов, и как эти структурные сдвиги входят в модель коррекции ошибок. В разделе 2 обсуждаются модели со сдвигами в тренде и рассматривается тестирование ранга коинтеграции при наличии структурных сдвигов. В частности, обсуждается случай известной (раздел 2.1) и неизвестной (раздел 2.2) даты сдвига. Метод тестирования коинтеграции при возможном изменении ранга в подвыборках приводится в разделе 3.

2. Тестирование ранга коинтеграции при наличии структурных сдвигов в данных

2.1. Известная дата структурного сдвига

В работе (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a) рассматривается тестирование гипотезы о том, что имеется r коинтегрирующих соотношений, против альтернативы, что их более чем r , при допущении сдвига в функции тренда отдельного ряда при нулевой и альтернативной гипотезах. Их процедура, однако, ограничивается только сдвигом в уровнях, происходящим в известное время.

Пусть $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{nt})'$ — n -мерный временной ряд ($t = 1, \dots, T$), порожденный следующим образом:

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \delta_0 D_t + \delta_1 DU_t + x_t, \quad (1)$$

где μ_i и δ_i ($i = 0, 1$) — неизвестные параметры размерности $(n \times 1)$, $D_t = \mathbb{I}(t = T_0)$ — импульсная фиктивная переменная, равная 1 в момент времени T_0 и 0 иначе, $DU_t = \mathbb{I}(t \geq T_1)$ — фиктивная переменная, отвечающая за сдвиг в уровнях в момент времени T_1 . Предполагается, что компонента x_t (ненаблюдаемый процесс ошибок) имеет $\text{VAR}(p)$ представление:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

Здесь A_j — $(n \times n)$ матрица коэффициентов, $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Omega)$. Условие нормальности ошибок введено для удобства и может быть ослаблено до i.i.d. и надлежащих условий на моменты. Представление (2) в форме модели коррекции ошибок выглядит следующим образом:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, T, \quad (3)$$

где $\Pi = -(I_n - A_1 - \dots - A_p)$ и $\Gamma_j = -(A_{j+1} - \dots - A_p)$, $j = 1, \dots, p-1$ — $(n \times n)$ матрицы.

В предположении, что x_t — интегрированный первого порядка временной ряд, т. е. $I(1)$, и его компоненты коинтегрированы с рангом коинтеграции r , матрицу Π можно записать как

$$\Pi = \alpha\beta', \quad (4)$$

где α и β — матрицы полного ранга размерности $(n \times r)$.

Используя теорему представления Грейнджера³, процесс x_t может быть записан в виде

$$x_t = C \sum_{j=1}^t \varepsilon_j + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $C = \beta_{\perp} (\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$ (здесь α_{\perp} и β_{\perp} — матрицы (ортогональные дополнения) размерности $n \times (n-r)$ такие, что $\alpha'_{\perp} \alpha_{\perp} = 0$ и $\beta'_{\perp} \beta_{\perp} = 0$)⁴, $\Gamma = I_n - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_{p-1}$, ξ_t — (асимптотически) стационарный процесс с нулевым средним.

Определим лаговый полином

$$A(L) = I_n - A_1 L - \dots - A_p L^p = I_n \Delta - \Pi L - \Gamma_1 \Delta L - \dots - \Gamma_{p-1} \Delta L^{p-1}, \quad (6)$$

где, исходя из представления (3),

$$A_1 = I_n + \alpha\beta' + \Gamma_1, \quad A_j = \Gamma_j - \Gamma_{j-1}, \quad j = 2, \dots, p-1, \quad A_p = -\Gamma_{p-1}. \quad (7)$$

Умножая (1) на $A(L)$, получим

$$\begin{aligned} \Delta y_t = & v_0 + v_1 t + \Pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \delta_0 D_t - \sum_{j=1}^p A_j \delta_0 D_{t-j} + \delta_1 \Delta D U_t - \\ & - \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \delta_1 \Delta D U_{t-j} - \Pi \delta_1 D U_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, p+2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $v_0 = -\Pi \mu_0 + (\Gamma + \Pi) \mu_1$ и $v_1 = -\Pi \mu_1$.

Уравнение (8) можно переписать в более простом виде:

$$\begin{aligned} \Delta y_t = & v + \alpha(\beta' y_{t-1} - \tau(t-1) - \theta D U_{t-1}) + \\ & + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \sum_{j=0}^p \gamma_{0j} D_{t-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j} \Delta D U_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

³ Обсуждение теоремы представления Грейнджера см., например, в (Johansen, 1996, Chapter 4) или (Juselius, 2006, Chapter 5).

⁴ Ортогональное дополнение невырожденной матрицы есть нулевая, а ортогональное дополнение нулевой матрицы — единичная соответствующей размерности.

где $v = -\Pi\mu_0 + \Gamma\mu_1$, $\tau = \beta'\mu_1$, $\theta = \beta'\delta_1$, а

$$\gamma_{0j} = \begin{cases} \delta_0, & j = 0, \\ -A_j\delta_0, & j = 1, \dots, p, \end{cases} \quad \gamma_{1j} = \begin{cases} \delta_1, & j = 0, \\ -\Gamma_j\delta_1, & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Заметим, что здесь ΔDU_{t-j} — импульсная фиктивная переменная ($= \mathbb{I}(t = T_1 + j)$), т. е., возможно, некоторые импульсные фиктивные переменные появляются дважды и могут быть объединены.

Уравнение (9) специфицирует модель коррекции ошибок (ЕСМ) для наблюдаемого процесса y_t . Оценивая эту модель, можно получить предварительные оценки параметров процесса ошибок α , β , Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$) и Ω .

В рамках рассматриваемой модели следует проверить правильность предположения о ранге матрицы Π . С этой целью для некоторого специфицированного ранга r_0 тестируется:

$$H_0(r_0): \text{rank}(\Pi) = r_0 \quad \text{против} \quad H_1(r_0): \text{rank}(\Pi) > r_0. \quad (10)$$

Идея состоит в том, чтобы провести проверку этой гипотезы в рамках модели коррекции ошибок для выборочного аналога ненаблюдаемого процесса x_p , получаемого доступным детрендированием наблюдаемого процесса y_t с использованием оценок параметров μ_i и δ_i ($i = 0, 1$) модели (1). Для оценивания параметров μ_i и δ_i можно использовать доступную GLS (FGLS) процедуру, аналогичную (Saikkonen, Lütkepohl, 2000b), которая заключается в следующем.

Введем дополнительные переменные:

$$a_{0t} = \begin{cases} 1, & t \geq 1, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad a_{1t} = \begin{cases} t, & t \geq 1, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Умножая (1) слева на $A(L)$, получим

$$A(L)y_t = H_{0t}\mu_0 + H_{1t}\mu_1 + K_{0t}\delta_0 + K_{1t}\delta_1 + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где y_t полагаются нулевыми для $t \leq 0$, $H_{it} = A(L)a_{it}$, $K_{0t} = A(L)D_t$ и $K_{1t} = A(L)DU_t$.

Определим блочную матрицу

$$Q = \left[\Omega^{-1} \alpha (\alpha' \Omega^{-1} \alpha)^{-1/2} : \alpha_{\perp} (\alpha'_{\perp} \Omega^{-1} \alpha_{\perp})^{-1/2} \right], \quad (12)$$

имеющую свойство $Q'Q = \Omega^{-1}$. Умножая (11) слева на матрицу Q' (квадратный корень из матрицы Ω^{-1}), получим справа преобразованный вектор ошибок, ковариационная матрица которого является единичной, как и требуется для GLS-оценивания. Таким образом, находим преобразование, которое приводит к регрессионной модели с обычными свойствами ошибок. Заметим, что представление $Q'Q = \Omega^{-1}$ неоднозначно; использование в качестве Q матрицы, указанной в (12), удобно для получения асимптотических свойств оценок.

Подходящие оценки параметров α , β , Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$) и Ω можно получить, используя регрессию с пониженным рангом (9)⁵. Тогда оценки \tilde{A}_j для A_j можно получить, используя (7). При этом получим оцененный лаговый полином $\tilde{A}(L) = I_n - \tilde{A}_1 L - \dots - \tilde{A}_p L^p$,

⁵ См., например, (Johansen, 1996, Chapter 6) или (Juselius, 2006, Chapter 7).

оцененные параметры $\tilde{H}_{it} = \tilde{A}(L)a_{it}$, $\tilde{K}_{0t} = \tilde{A}(L)D_t$, $\tilde{K}_{1t} = \tilde{A}(L)DU_t$ и оцененную матрицу \tilde{Q} . Теперь из уравнения регрессии

$$\tilde{Q}'\tilde{A}(L)y_t = \tilde{Q}'\tilde{H}_{0t}\mu_0 + \tilde{Q}'\tilde{H}_{1t}\mu_1 + \tilde{Q}'\tilde{K}_{0t}\delta_0 + \tilde{Q}'\tilde{K}_{1t}\delta_1 + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (13)$$

получим оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\delta}_i$ ($i = 0, 1$).

Saikkonen, Lütkepohl (2000b) установили, что

$$\begin{aligned} \beta'(\hat{\mu}_0 - \mu_0) &= O_p(T^{-1/2}), \quad \beta'_\perp(\hat{\mu}_0 - \mu_0) = O_p(1), \quad \hat{\delta}_0 - \delta_0 = O_p(1), \\ \beta'(\hat{\delta}_1 - \delta_1) &= O_p((T - T_1)^{-1/2}), \quad \beta'_\perp(\hat{\delta}_1 - \delta_1) = O_p(1), \quad \beta'(\hat{\mu}_1 - \mu_1) = O_p(T^{-3/2}), \\ T^{1/2}\beta'_\perp(\hat{\mu}_1 - \mu_1) &\stackrel{d}{\Rightarrow} N(0, \beta'_\perp C \Omega C' \beta_\perp), \quad \text{где } C = \beta_\perp(\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp. \end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{\mu}_1$ является состоятельной оценкой, в то время как $\hat{\mu}_0$ состоятельна только в направлении β . Ограниченность по вероятности этой оценки в направлении β_\perp , однако, достаточна для дальнейших целей. Оценка параметра $\hat{\delta}_0$ несостоятельна, но ограничена по вероятности, $\hat{\delta}_1$ состоятельна только в направлении β , когда $T - T_1 \rightarrow \infty$.

Построим выборочный аналог процесса x_t :

$$\hat{x}_t = y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t - \hat{\delta}_0 D_t - \hat{\delta}_1 DU_t \quad (14)$$

и определим выборочный аналог уравнения (3):

$$\Delta \hat{x}_t = \Pi \hat{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta \hat{x}_{t-j} + e_t, \quad t = p + 1, \dots, T. \quad (15)$$

Saikkonen, Lütkepohl (2000a) предлагают использовать для тестирования гипотезы (10) как обычную *LR*-статистику (Johansen, 1996), так и введенную в (Saikkonen, Lütkepohl, 2000b) *LM*-статистику. Однако, в (Saikkonen, Lütkepohl, 2000b) показано, что, в целом, *LR*-статистика имеет лучшие свойства на конечных выборках, кроме некоторых частных случаев. Обе эти статистики асимптотически эквивалентны.

Полученное авторами предельное распределение *LR*-статистики не зависит от параметров структурных сдвигов, поэтому можно использовать критические значения, приведенные в (Lütkepohl, Saikkonen, 2000, Table 1) для случая отсутствия структурных сдвигов.

Кроме того, если наложить априорное ограничение $\mu_1 = 0$, то все результаты продолжают оставаться справедливыми⁶. Как уже было замечено выше, результаты легко обобщаются на случай произвольного числа структурных сдвигов, с возможным добавлением сезонных фиктивных переменных⁷.

Обобщение теста (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a), допускающее изменение наклона тренда в модели, было рассмотрено в (Trenkler et al., 2008). В этом случае в процесс (1) добавляется компонента, отвечающая за сдвиг в тренде, т. е.

⁶ Только в соответствующем распределении *LR*-статистики процесс броуновского моста заменяется на обычное броуновское движение.

⁷ Как отмечается в (Johansen, 1991), добавление сезонных фиктивных переменных не меняет предельного распределения тестовой статистики.

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \delta_1 DU_t + \delta_2 DT_t + x_t, \quad (16)$$

где $DT_t = \mathbb{I}(t - T_1 + 1)I(t \geq T_1)$ (заметим, что в уравнение (16) не включаются импульсные фиктивные переменные).

Модель коррекции ошибок (9) переписывается тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y_t = & v + \alpha(\beta' y_{t-1} - \tau(t-1) - \theta DT_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} \\ & + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j} \Delta DU_{t-j} + \eta_0 \Delta DT_t + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где $v = -\Pi\mu_0 + \Gamma\mu_1$, $\tau = \beta'\mu_1$, $\theta = \beta'\delta_1$, $\eta_0 = \Gamma\delta_2 - \Pi\delta_1$ и

$$\gamma_{1j} = \begin{cases} \delta_1 + \Pi\delta_1 + \Gamma_1\delta_2 + \dots + \Gamma_{p-1}\delta_2, & j = 0, \\ -\Gamma_j\delta_1 + \Gamma_{j+1}\delta_2 + \dots + \Gamma_{p-1}\delta_2, & j = 1, \dots, p-2, \\ -\Gamma_{p-1}\delta_1, & j = p-1. \end{cases}$$

Здесь ΔDU_{t-j} — импульсная фиктивная переменная, ΔDT_t — фиктивная переменная сдвига в уровнях.

Далее применяется уже описанный выше подход Saikkonen, Lütkepohl (2000a). Уравнение (11) переписывается в виде:

$$A(L)y_t = H_{0t}\mu_0 + H_{1t}\mu_1 + K_{1t}\delta_1 + K_{2t}\delta_2 + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где y_t полагаются нулевыми при $t \leq 0$, $H_{it} = A(L)a_{it}$ ($i = 0, 1$), $K_{1t} = A(L)DU_t$ и $K_{2t} = A(L)DT_t$.

Далее находим оценки для α , β , Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$) и Ω , используя метод Йохансена для регрессии (17), и получаем оценки коэффициентов \tilde{A}_j , лагового полинома $\tilde{A}(L)$, параметров $\tilde{H}_{it} = \tilde{A}(L)a_{it}$ ($i = 0, 1$), $\tilde{K}_{1t} = \tilde{A}(L)DU_t$, $\tilde{K}_{2t} = \tilde{A}(L)DT_t$ и матрицы \tilde{Q} , где Q определяется, как в (12). Тогда регрессия (13) переписывается в виде

$$\tilde{Q}'\tilde{A}(L)y_t = \tilde{Q}'\tilde{H}_{0t}\mu_0 + \tilde{Q}'\tilde{H}_{1t}\mu_1 + \tilde{Q}'\tilde{K}_{1t}\delta_1 + \tilde{Q}'\tilde{K}_{2t}\delta_2 + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (19)$$

Оценивая ее с помощью OLS, получаем оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\delta}_i$. Trenkler et al. (2008) установили, как и (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a), что $\hat{\mu}_0$ и $\hat{\delta}_1$ не состоятельны в направлении β_\perp , хотя ограниченность по вероятности достаточна для дальнейших целей. Совместное асимптотическое распределение $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\delta}_2$ в направлении β_\perp зависит от доли даты структурного сдвига $\lambda_1 = T_1/T$:

$$\begin{aligned} \beta'(\hat{\mu}_1 - \mu_1) &= O_p(T^{-3/2}), \quad \beta'(\hat{\delta}_2 - \delta_2) = O_p(T^{-3/2}), \\ [T^{1/2}\beta'_\perp(\hat{\mu}_1 - \mu_1) : T^{1/2}\beta'_\perp(\hat{\delta}_2 - \delta_2)] &\stackrel{d}{\Rightarrow} \beta'_\perp C[\zeta_1 : \zeta_2], \end{aligned}$$

где $[\zeta_1 : \zeta_2] = [W_n(1) : W_n(1) - W_n(\lambda_1)] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \\ 1 - \lambda_1 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix}^{-1}$, $W_n(s)$ — n -мерное броуновское движение с ковариационной матрицей Ω , $C = \beta_\perp(\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp$.

Далее, после оценивания регрессии (19) можно тестировать гипотезу о ранге коинтеграции (10) на основе выборочного аналога ряда x_t :

$$\hat{x}_t = y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t - \hat{\delta}_1 DU_t - \hat{\delta}_2 DT_t. \quad (20)$$

Тогда LR -статистика определяется на основе уравнения (15), с использованием скорректированного на детерминированную компоненту ряда \hat{x}_t в (20).

Предельное распределение полученной тестовой статистики, в отличие от распределения из (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a), зависит от доли даты структурного сдвига, и зависимость от этого параметра возникает из-за введения сдвига в тренде. Trenkler et al. (2008) получают также предельное распределение для случая произвольного числа структурных сдвигов, выражающееся через независимые броуновские мосты. При этом предельное распределение зависит только от относительных длин подвыборок между сдвигами, но не от их порядка. Другой подход к анализу коинтеграции со структурными сдвигами был рассмотрен в (Johansen et al., 2000), где анализировалась более общая задача с несколькими известными структурными сдвигами без применения процедуры GLS-детрендрования. Этот подход является обобщением стандартного теста Йохансена (Johansen, 1996), используемого в ситуации без структурных сдвигов.

Рассмотрим модель с $(m-1)$ структурными сдвигами (m режимами):

$$\Delta y_t = (\Pi, \Pi_i) \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ t \end{pmatrix} + \mu_i + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (21)$$

где $i = 1, \dots, m$ и $T_{i-1} + p < t \leq T_i$, где T_i — даты структурных сдвигов, $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(0, \Omega)$. Параметры Π , Γ_j и Ω предполагаются неизменными во всех режимах, тогда как $\Pi_i = \alpha \gamma_i$ и μ_i относятся к детерминированной компоненте и различны в каждом из режимов.

Для анализа гипотез о ранге коинтеграции запишем упрощенную модель (без запаздывающих разностей и без сдвигов):

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Pi_1 t + \mu + \varepsilon_t. \quad (22)$$

Коинтеграция подразумевает пониженный ранг матрицы $\Pi = \alpha \beta'$. Модель (22) в общем случае имеет квадратичный тренд, который маловероятен при исследовании реальных данных, поэтому введем ограничение $\Pi_1 = \alpha \gamma'$. Модель (22) при этом принимает вид

$$\Delta y_t = \alpha (\beta' y_{t-1} + \gamma' t) + \mu + \varepsilon_t. \quad (23)$$

Модель (23) является самой общей в нашем рассмотрении⁸ и обозначается как $H_t(r)$ — процесс имеет линейный тренд, а коинтеграционное соотношение стационарно относительно линейного тренда. Если $\gamma = 0$, то процесс имеет линейный тренд, но коинтеграционное соотношение — нет. Такая модель обозначается как $H_{lc}(r)$. Если $\gamma = 0$ и $\mu = \alpha \rho'$, то процесс не имеет линейного тренда ни в одном направлении. Эта модель обозначается как $H_c(r)$.

Таким образом, гипотезы о ранге коинтеграции для (21) формулируются следующим образом:

⁸ Общее рассуждение о детерминированных компонентах см. в (Juselius, 2006, Chapter 6).

$$H_r(r): \text{rank}(\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_m) \leq r;$$

$$H_c(r): \text{rank}(\Pi, \mu_1, \dots, \mu_m) \leq r \text{ и } \Pi_1, \dots, \Pi_m = 0;$$

$$H_{lc}(r): \text{rank}(\Pi) \leq r \text{ и } \Pi_1, \dots, \Pi_m = 0.$$

Модель (21) описывается m уравнениями, но ее можно записать и в виде одного уравнения. Определим фиктивные переменные: $D_{i,t} = \mathbb{I}(t = T_{i-1})$ (т. е. $D_{i,t-p} = \mathbb{I}(t = T_{i-1} + p)$) и $DU_{i,t} = \mathbb{I}(T_{i-1} + p + 1 \leq t \leq T_i)$.

Тогда модель (21) принимает вид

$$\Delta y_t = \alpha \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ tDU_t \end{pmatrix} + \mu DU_t + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=2}^m \kappa_{ij} D_{i,t-j} + \varepsilon_t, \quad (24)$$

где $DU_t = (DU_{1,t}, \dots, DU_{m,t})'$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)'$ и $\gamma = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)'$. Видно, что это представление совпадает с (17) и, в частном случае, с (9) при некоторых переобозначениях. Ранг коинтеграции можно найти, применяя обычную процедуру Йохансена к этой модели.

В отличие от подхода Saikkonen, Lütkepohl (2000a), предельное распределение LR -статистики зависит от точной спецификации детерминированной компоненты и действительных дат сдвигов. Кроме того, оно отличается от полученных в (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a) и (Trenkler et al., 2008) распределений дополнительной χ^2 -компонентой. Это происходит из-за сохранения размерности в корректирующей компоненте ЕСМ в (Johansen et al., 2000). Тесты (Saikkonen, Lütkepohl, 2000a) и (Trenkler et al., 2008) основаны на скорректированном ряде \hat{x}_t , в котором детерминированная функция, включающая сдвиг, содержится лишь косвенно. Поэтому размерность корректирующей компоненты в (17) не зависит от числа сдвигов. В (Lütkepohl et al., 2003) два рассмотренных выше подхода сравнивались для случая единственного сдвига в уровнях (для модели $y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \delta_1 d_{1t} + x_t$). Авторы дают предельные распределения тестовых статистик этих подходов при локальных альтернативах и сравнивают локальную мощность критериев⁹, показывая, что их локальная мощность зависит от разности $(n - r_0)$, а не от n и r_0 в отдельности. Кроме того, она не зависит от параметров среднего, тренда и сдвига (т. е. μ_0 , μ_1 и δ_1). Для случая $\mu_1 = 0$ подход Saikkonen, Lütkepohl (2000a) имеет равномерно более высокую локальную мощность, чем подход Johansen et al. (2000). Если сравнивать тесты в ситуации с линейным трендом ($\mu_1 \neq 0$), то подход Saikkonen, Lütkepohl (2000a) в большинстве случаев также имеет более высокую локальную мощность. Если сравнивать локальную мощность критериев для случаев $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 \neq 0$, то для последнего наблюдается более низкая мощность, и различие здесь может быть весьма существенным. К потере мощности для всех тестов приводит возрастание величины $(n - r_0)$ — числа стохастических трендов при гипотезе $H_0(r_0)$. То есть единственное коинтеграционное соотношение сложнее определить в трехмерном, чем в двумерном процессе (результат аналогичен известному для процессов без структурных сдвигов). Исследуя поведение на малых выборках, Lütkepohl et al. (2003) установили, что мощность рассмотренных тестов примерно одинакова, хотя каждый из них имеет преимущество в отдельных

⁹ Локальная альтернатива записывается в форме $\Pi = \alpha\beta' + T^{-1}\alpha_1\beta_1'$, где α и β — матрицы размера $(n \times r_0)$ и ранга r_0 , а α_1 и β_1 — матрицы размера $(n \times (r - r_0))$ и ранга $(r - r_0)$.

специфических случаях. Однако, в общем, тест Saikkonen, Lütkepohl (2000a) имеет лучший размер. Кроме того, предельное распределение тестовой статистики не зависит от датировки структурного сдвига, поэтому нет необходимости использовать специальные критические значения, что упрощает использование этого теста¹⁰. Симуляции в (Trenkler et al., 2008) показали, что тест с учетом сдвига в тренде обладает лучшими свойствами на конечных выборках, чем тест (Johansen et al., 2000), т. е. имеет меньшие искажения размера и сопоставимую или более высокую мощность. В некоторых ситуациях, однако, более высокую мощность имеет последний тест, поэтому рекомендуется обосновывать принимаемое решение относительно числа коинтеграционных соотношений, используя оба теста одновременно.

Наконец, Andrade et al. (2005) рассмотрели общий случай модели, в которой структурные сдвиги могут происходить не только в параметрах детерминированной функции времени, но и в коинтеграционных соотношениях.

2.2. Неизвестная дата сдвига

Ранее предполагалось, что датировка структурных сдвигов в многомерных моделях известна априорно. Если даты сдвигов неизвестны, Lütkepohl, Saikkonen and Trenkler (2004) (далее LST) предложили подход к их оцениванию на основе рассмотренного выше подхода Saikkonen, Lütkepohl (2000a) (далее SL) для известных дат сдвигов. LST рассмотрели случай только одного сдвига в уровнях, т. е. модель

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \delta_1 DU_t + x_t, \quad (25)$$

аналогичную модели (1) с такими же свойствами.

Оценку даты сдвига можно получить на основе VAR-модели в уровнях, полученной из (8), не накладывая никаких ранговых ограничений на Π и приводя модель к виду

$$y_t = v_0 + v_1 t + \delta_1^* DU_t + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j}^* \Delta DU_{t-j} + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (26)$$

где $v_0 = -\Pi\mu_0 + (\Gamma + \Pi)\mu_1$, $v_1 = -\Pi\mu_1$, $\delta_1^* = -\Pi\delta_1$, $\gamma_{10}^* = \delta_1 - \delta_1^*$ и $\gamma_{1j}^* = \gamma_{1j}$ ¹¹.

Тогда дата сдвига T_1 определяется как

$$\hat{T}_1 = \operatorname{argmin}_{T_1 \in T} \det \left(\sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t' \right), \quad (27)$$

где T — область возможных дат сдвигов, а $\hat{\varepsilon}_t$ — остатки при OLS-оценивании (26), зависящие от даты сдвига T_1 .

Наличие p импульсных фиктивных переменных в (26) может весьма затруднить датировку сдвигов. Дело в том, что введение фиктивных переменных на отдельные наблюдения (а не на группу наблюдений) приводит к тому, что эти наблюдения не учитываются

¹⁰ Однако это не так для более общего случая сдвига в тренде.

¹¹ Можно было, как в (Saikkonen et al., 2006), оценивать модель и в разностях.

в процессе минимизации, так что при этом может потеряться информация о действительных датах сдвигов. Поэтому можно провести оценивание дат сдвигов в модели без бинарных переменных, т. е. в модели

$$y_t = v_0 + v_1 t + \delta_1^* DU_t + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t^*, \quad t = p+1, \dots, T, \quad (28)$$

где $\varepsilon_t^* = \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j}^* \Delta DU_{t-j} + \varepsilon_t$. Тогда оценка даты сдвига \tilde{T}_1 будет равна

$$\tilde{T}_1 = \operatorname{argmin}_{T_1 \in \Gamma} \det \left(\sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_t^* \hat{\varepsilon}_t^{*'} \right), \quad (29)$$

где $\hat{\varepsilon}_t^*$ — OLS-остатки при оценивании (28), зависящие от даты сдвига T_1 . LST показывают, что обе оценки являются состоятельными оценками действительных дат сдвигов и сходятся к ним с одинаковой скоростью, даже с учетом того, что \tilde{T}_1 получена из неправильно специфицированной модели.

Следует отметить одну особенность: возможен случай $\delta_1^* = -\rho \delta_1 = 0$, который может выполняться, даже если $\delta_1 \neq 0$. Тогда процесс $\beta' y_t$ не имеет сдвига, и, таким образом, имеем случай согласованных сдвигов (co-breaking). При этом ни одна из оценок доли даты сдвига не является состоятельной. Однако если сдвиг достаточно большой, то очень вероятно реакция на него импульсных фиктивных переменных, и поэтому есть возможность найти дату сдвига, опираясь на оценку \hat{T}_1 . С другой стороны, оценка \tilde{T}_1 может лишь случайно найти дату сдвига в этой ситуации. Таким образом, если нельзя исключить случай $\delta_1^* = 0$ (который всегда выполняется, если ранг коинтеграции равен 0), то использование лишь оценки \tilde{T}_1 может быть весьма проблематичным.

После нахождения даты сдвига можно тестировать ранг коинтеграции с помощью подходов, описанных в предыдущем разделе, используя оцененную дату сдвига в качестве известной. При этом сохраняются все полученные результаты и получается то же самое предельное распределение тестовой статистики. При этом также возможно добавление в модель сезонных и импульсных фиктивных переменных. В то же время LST указывают, что свойства рассмотренных оценок и теста на коинтеграцию при малых выборках могут существенно зависеть от величины сдвига.

Saikkonen, Lütkepohl и Trenkler (2006) (далее SLT) рассмотрели обобщение описанного выше подхода в нескольких направлениях. Были рассмотрены дополнительные оценки даты сдвига, а также асимптотические свойства всех оценок в случае зависимости величины сдвига от размера выборки. При этом анализировались асимптотические результаты в ситуациях, когда величина сдвига возрастала (или убывала) при неограниченном увеличении объема выборки.

Более конкретно, параметр δ_1 в рассматриваемой работе определяется как

$$\delta_1 = T^a \delta_*, \quad a \leq 1/2. \quad (30)$$

Таким образом, величина сдвига может быть убывающей, постоянной или возрастающей при росте выборки, в зависимости от значения a . Заметим, что когда структурный сдвиг достаточно большой, состоятельное оценивание даты сдвига с использованием (27) требует введения дополнительного условия $\gamma_{1,p-1}^* \neq 0$, что в противном случае приводит к тому, что оценка даты сдвига асимптотически дает либо истинную дату сдвига, либо дату

в предыдущий момент времени. Таким образом, «переспецификация» порядка VAR может привести к несостоятельной оценке даты сдвига. С другой стороны, когда размер сдвига достаточно мал, необходимо предположить, что $\delta_1 \neq 0$, т. е. происходит фактическое изменение уровня в модели. Это не является необходимым, если структурный сдвиг большой, тогда даже импульсные фиктивные переменные могут быть использованы для точного оценивания датировки структурного сдвига. Однако даже если состоятельная оценка даты сдвига невозможна в случае малого структурного сдвига, состоятельная оценка доли этого сдвига все еще возможна, если размер сдвига не слишком маленький.

Авторы предлагают также другую оценку даты сдвига, которая учитывает связь между коэффициентами авторегрессии и коэффициентами при фиктивных переменных. При этом вместо (26) рассматривается другая спецификация модели:

$$\Delta y_t = v_0 + v_1 t + \delta_1^* DU_{t-1} + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j} \Delta DU_{t-j} + \Pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (31)$$

где γ_{1j} определяются, как в (9). Уравнение (31) можно переписать в виде

$$\Delta y_t = v_0 + v_1 t + \left(I_n \Delta DU_t - \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta DU_{t-j} - \Pi DU_{t-1} \right) \delta_1 + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t. \quad (32)$$

В отличие от модели (26), импульсные переменные больше не появляются отдельно в представлении (32), а включены в компонент, который отвечает за сдвиг. Таким образом, единственный вектор параметров δ_1 связан со всеми фиктивными переменными, что позволяет оценить дату сдвига более точно. Оценка даты сдвига (обозначим ее \hat{T}_1^R) строится как (27) для остатков в модели (32), оцененных нелинейным OLS. В отличие от предыдущей оценки даты сдвига, для больших сдвигов состоятельность выполняется без каких-либо дополнительных ограничений на коэффициенты. Для малых сдвигов результаты также остаются аналогичными. Моделирование Монте-Карло показало, что оценка \hat{T}_1^R , основанная на регрессии (32), лучше всего находит истинную дату сдвига. Для решения проблемы вычислительной сложности предлагается на первом шаге найти оценку \hat{T}_1 , а затем вычислить оценку \hat{T}_1^R на основе \hat{T}_1 , т. е. так, что $|\hat{T}_1 - \hat{T}_1^R| \leq p$ или $|\hat{T}_1 - \hat{T}_1^R| \leq 2p$. Другой вариант оценивания заключается в том, чтобы сначала оценить параметры Π , Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$) в модели (31) без ограничений, а затем подставить их в уравнение (32) и применить обычный OLS. Оба варианта на малых выборках работают примерно так же, как если бы нахождение \hat{T}_1^R производилось посредством полной оптимизации нелинейной функции.

Асимптотические результаты для оценки (29) также были обобщены на случай зависимости параметра сдвига от величины выборки.

Тестирование на ранг коинтеграции несколько отличается от подхода SL из-за неидентифицируемости параметра μ_0 в направлении β_\perp , поэтому SLT оценивают только параметры μ_1 и δ_1 в детерминированном компоненте. Опишем процедуру оценивания этих параметров.

Аналогично SL, на первом шаге оцениваем параметры α , β , Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$) и Ω , а также v и τ в модели

$$\Delta y_t = v + \alpha (\beta' y_{t-1} - \tau(t-1) - \theta DU_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{1j} \Delta DU_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (33)$$

где $v = -\Pi\mu_0 + \Gamma\mu_1$, $\tau = \beta'\mu_1$, $\theta = \beta'_1\delta_1$ и $\gamma_{1j} = \begin{cases} \delta_1, & j = 0, \\ -\Gamma_j\delta_1, & j = 1, \dots, p-1. \end{cases}$

Равенство $v = -\Pi\mu_0 + \Gamma\mu_1$ можно записать как

$$v = -\Pi\mu_0 + \Gamma\beta(\beta'\beta)^{-1}\beta'\mu_1 + \Gamma\beta_{\perp}(\beta'_{\perp}\beta_{\perp})^{-1}\beta'_{\perp}\mu_1.$$

Так как $\alpha'_{\perp}\Pi = \alpha'_{\perp}\alpha\beta' = 0$, то умножение этого равенства слева на α'_{\perp} приводит к $\alpha'_{\perp}(v - \Gamma_{\beta}\varphi) = \alpha'_{\perp}\Gamma_{\beta_{\perp}}\varphi_*$, где $\varphi = \beta'\mu_1$, $\varphi_* = \beta'_{\perp}\mu_1$, $\Gamma_{\beta} = \Gamma\beta(\beta'\beta)^{-1}$, $\Gamma_{\beta_{\perp}} = \Gamma\beta_{\perp}(\beta'_{\perp}\beta_{\perp})^{-1}$.

Матрица $\alpha'_{\perp}\Gamma_{\beta_{\perp}}$ невырождена, обратная ей матрица есть $(\alpha'_{\perp}\Gamma_{\beta_{\perp}})^{-1} = \beta'_{\perp}\beta_{\perp}(\alpha'_{\perp}\Gamma\beta_{\perp})^{-1}$. Таким образом, $\varphi_* = \beta'_{\perp}C(v - \Gamma_{\beta}\varphi)$, где снова $C = \beta_{\perp}(\alpha'_{\perp}\Gamma\beta_{\perp})^{-1}\alpha'_{\perp}$. Значит, можно построить оценки \tilde{C} и $\tilde{\Gamma}_{\beta}$, используя оценки для α , β и Γ_j ($j = 1, \dots, p-1$), полученные из (33), после чего получить оценку $\tilde{\varphi}_* = \tilde{\beta}'_{\perp}\tilde{C}(\tilde{v} - \tilde{\Gamma}_{\beta}\tilde{\varphi})$.

Используя оценки $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_*$, для μ_1 получаем оценку $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\beta}(\tilde{\beta}'\tilde{\beta})^{-1}\tilde{\varphi} + \tilde{\beta}_{\perp}(\tilde{\beta}'_{\perp}\tilde{\beta}_{\perp})^{-1}\tilde{\varphi}_*$.

Оценку параметра δ_1 можно вывести аналогичным способом. Из (33) получаем, что $[\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}]' = [I_n, -\Gamma_1, \dots, -\Gamma_{p-1}]'\delta_1$. Умножая обе части этого уравнения слева на матрицу

$[\alpha'_{\perp} : \dots : \alpha'_{\perp}]$, получим $\alpha'_{\perp} \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j = \alpha'_{\perp}\Gamma\delta_1 = \alpha'_{\perp}\Gamma_{\beta}\theta + \alpha'_{\perp}\Gamma_{\beta_{\perp}}\theta_*$, где $\theta = \beta'\delta_1$ и $\theta_* = \beta'_{\perp}\delta_1$. Решая

уравнение для θ_* , находим: $\theta_* = \beta'_{\perp}C\left(\sum_{j=1}^{p-1} \gamma_j - \Gamma_{\beta}\theta\right)$, а соответствующая оценка равна

$\tilde{\theta}_* = \tilde{\beta}'_{\perp}\tilde{C}\left(\sum_{j=1}^{p-1} \tilde{\gamma}_j - \tilde{\Gamma}_{\beta}\tilde{\theta}\right)$. Таким образом, оценка для δ_1 есть $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\beta}(\tilde{\beta}'\tilde{\beta})^{-1}\tilde{\theta} + \tilde{\beta}_{\perp}(\tilde{\beta}'_{\perp}\tilde{\beta}_{\perp})^{-1}\tilde{\theta}_*$.

Авторы выводят асимптотические свойства полученных оценок, которые можно использовать для тестирования на ранг коинтеграции.

Рассматриваемые гипотезы специфицированы так же, как и в (10). Рассмотрим скорректированный на детерминированные компоненты ряд

$$\tilde{y}_t^{(0)} = y_t - \tilde{\mu}_1 t - \tilde{\delta}_1 DU_t = \mu_0 + x_t - (\tilde{\mu}_1 - \mu_1)t - \tilde{\delta}_1 DU_t + \delta_1 DU_t. \quad (34)$$

Отвлекаясь от отличия оценок и истинных значений параметров, имеем $\tilde{y}_t^{(0)} \sim \mu_0 + x_t$, поэтому естественно использовать тест, основанный на следующей искусственной регрессии:

$$\Delta\tilde{y}_t^{(0)} = \Pi^+ \tilde{y}_{t-1}^{(+)} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j}^{(0)} + e_t, \quad (35)$$

где $\tilde{y}_{t-1}^{(+)} = [\tilde{y}_{t-1}^{(0)}, 1]'$, а Π^+ получается добавлением дополнительного столбца к матрице Π . Рассматривая эту модель как истинную, можно получить LR-статистику для специфицированного ранга коинтеграции, используя обычный метод Йохансена.

Из-за того, что в модель (35) включена константа, предельное распределение тестовой статистики отличается от полученного ранее в LST. Новые критические значения приведены SLT для случая $\mu_1 \neq 0$. Если $\mu_1 = 0$, то предельное распределение тестовой статистики то же самое, что и в (Johansen, 1996, Theorem 6.3), поэтому можно использовать критические значения из (Johansen, 1996, Table 15.2). Заметим также, что и здесь модель может быть обобщена добавлением произвольного количества импульсных фиктивных переменных,

сезонных и т. п. По сравнению с тестом LST, тест SLT имеет тенденцию чаще отвергать истинную нулевую гипотезу.

Harris et al. (2016) обобщают описанный выше подход Trenkler et al. (2008) на случай неопределенности относительно присутствия сдвига в тренде данных. Если структурного сдвига в данных в действительности нет, то не имеет смысла включать его в модель и, тем самым, терять мощность. С другой стороны, если сдвиг есть, но не учитывается в модели, размер тестов на коинтеграцию не будет корректным при нулевой гипотезе, и тест не будет состоятельным при альтернативной гипотезе.

Harris et al. (2016) предлагают три подхода для выбора модели: SC-VECM, SC-DIFF и SC-VAR. Процедура SC-VECM состоит в тестировании гипотезы $H(r)$ о том, что ранг коинтеграции равен r , против альтернативы $H(n)$. Пусть информационный критерий Шварца для заданной модели обозначается как $BIC(p, r; \lambda)$, где p — число запаздывающих разностей в VECM с рангом коинтеграции r и долей даты сдвига $\lambda = T_1/T$. Пусть также $BIC(p, r)$ — информационный критерий Шварца для модели без сдвига. На первом шаге оценивается дата сдвига для всех возможных значений числа лагов в VECM, $p = 1, \dots, \bar{p}$, и заданного ранга коинтеграции r путем максимизации функции правдоподобия по всем возможным датам сдвига. Затем, для оцененной доли даты сдвига $\hat{\lambda}(p)$ число запаздывающих разностей \hat{p}_r выбирается на основе критерия Шварца $BIC(p, n; \hat{\lambda}(p))$ для неограниченной модели VAR с $r = n$. Число лагов \hat{p}_0 для модели без сдвига выбирается на основе минимизации $BIC(p, n)$ по всем p . Наконец, итоговая модель выбирается на основе сравнения информационных критериев со сдвигом $BIC(\hat{p}_r, r; \hat{\lambda}(p))$ и без него $BIC(\hat{p}_0, r)$. После этого строится LR-тест для проверки гипотезы $H(r)$. Данная процедура последовательно повторяется для всех $r = 0, 1, \dots$, пока гипотеза $H(r)$ будет отвергаться.

Процедура SC-DIFF состоит в оценивании даты сдвига в модели в разностях при предположении, что $p = 1$ и $r = 0$. Итоговая модель выбирается на основе сравнения информационных критериев со сдвигом и без него, т. е. $BIC(1, 0; \hat{\lambda}(1))$ и $BIC(1, 0)$. Затем число запаздывающих разностей p выбирается на основе выбранной модели (со сдвигом или без него) при $r = n$. Далее тестируется гипотеза $H(r)$. Отметим, что хотя данная процедура основана на неправильно специфицированной модели с $r = 0$ и $p = 1$, она позволяет достаточно выбрать корректную модель.

В процедуре SC-VAR дата сдвига и количество лагов оцениваются, в отличие от процедуры SC-DIFF, при ограничении $r = n$. Модель выбирается на основе сравнения $BIC(\hat{p}_n, n; \hat{\lambda}(1))$ и $BIC(\hat{p}_n, n)$. Кроме того, на конечных выборках Harris et al. (2016) рекомендуют заменять оценку даты сдвига в SC-VAR процедуре (имеющую «плохие» свойства) на оценку из SC-DIFF, полагая $p = 1$ и $r = 0$.

Harris et al. (2016) показывают, что оценка доли даты сдвига является состоятельной вне зависимости от выбранного ранга коинтеграции и выбранного числа лагов. Все процедуры состоятельно выбирают правильную модель (со сдвигом или без него) и имеют асимптотически корректный размер теста на ранг коинтеграции. Среди всех трех процедур авторы рекомендуют использовать SC-VECM.

Пример. Продолжая пример из (Скроботов, 2021), рассмотрим систему с 4 переменными: y_t , c_t и i_t — логарифмы реального выпуска, потребления и инвестиций, p_t^{oil} — логарифм реальных цен на нефть. Используются квартальные данные российского ВВП, потребления и инвестиций с 1999 по 2019 г. в постоянных ценах 2003 г. (84 наблюдения),

сезонно сглаженные при помощи процедуры TRAMO-SEATS¹². На рисунке 1 можно видеть два периода различных темпов роста реального ВВП: восстановительный рост до середины 2008 г. и его изменение после мирового финансового кризиса.

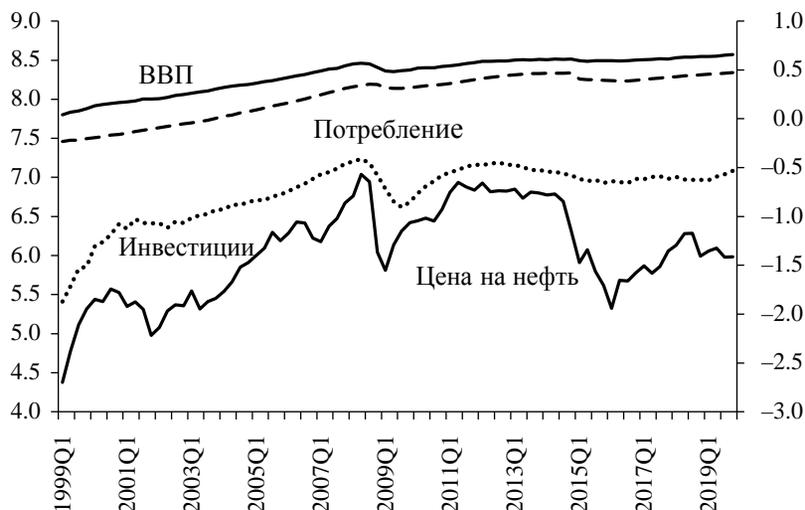


Рис. 1. Временные ряды (в логарифмах) реальных ВВП, потребления, инвестиций (левая ось) и цен на нефть (правая ось)

В таблице 1 приводятся результаты тестирования на ранг коинтеграции на основе процедуры (Harris et al., 2016). Берется период с 1999 по 2014 г. (64 наблюдения), с предположением о возможном наличии максимум одного структурного сдвига в тренде, поскольку в 2015 г. мог произойти сдвиг (в дополнение к сдвигу в 2007–2008 гг.).

Таблица 1. Результаты тестов на коинтеграцию

$H_0(r)$	LR со сдвигом	Критическое значение	LR с трендом	Критическое значение	BIC со сдвигом	BIC с трендом	Дата сдвига	p
$r = 0$	141.4*	84.7	135.8*	64.2	-1782.6	-1719.2	2008Q3	2
$r = 1$	71.3*	59.3	68.4*	43.2	-1848.5	-1786.6	2008Q3	2
$r = 2$	42.9*	37.5	14.9	26	-1872.7	-1840.1	2008Q3	2
$r = 3$	18.2	18.8	4.8	12.5	-1893.3	-1850.1	2008Q3	2

Примечание. * обозначает отвержение гипотезы на 5%-ном уровне значимости.

Можно видеть, что ранг коинтеграции, равный 0, отвергается (на 5%-ном уровне значимости) как тестом, учитывающим сдвиг в тренде, так и тестом, включающим в построение только линейный тренд. Аналогично отвергается ранг, равный 1. Однако ранг 2 не отвергается тестом, учитывающим только тренд, в то время как информационный критерий BIC для модели со сдвигом меньше такого же критерия для модели только с трендом.

¹² Источник данных: Росстат (ВВП, потребление и инвестиции), International Financial Statistics, IMF (цена на нефть), Federal Reserve Economic Data (дефлятор цен на нефть, CPI US).

Соответственно, процедура (Harris et al., 2016) указывает на ранг коинтеграции, равный 3. Отметим, что вне зависимости от ранга коинтеграции дата сдвига оценивается третьим кварталом 2008 г. Оценка числа лагов для всех моделей равна 2.

3. Тестирование коинтеграции при возможном изменении ранга в подвыборках

На практике тесты на коинтеграцию могут не выявить ее наличие, предполагаемое экономической теорией. Одной из причин, из-за которых это может происходить, является наличие некоторой подвыборки данных, для которой ранг коинтеграции может быть другим, чем в оставшейся части выборки. Qu (2007) предложил тест (для данных, не содержащих тренда), в котором нулевая и альтернативная гипотезы специфицируются следующим образом:

H_0 : существует r_0 стабильных коинтегрирующих соотношений в системе, т. е. ранг коинтеграции равен r_0 ;

H_1 : существует $r > r_0$ коинтегрирующих соотношений в некоторой подвыборке $[T_1, T_2]$, т. е. существует по крайней мере один режим с рангом коинтеграции выше, чем r_0 .

Qu (2007) предлагает тест, проверяющий m изменений режимов против альтернативы, что происходит $m + 1$ изменений. Для состоятельности необходимо, чтобы хотя бы один режим имел ранг коинтеграции выше, чем r_0 . Также накладывается обычное условие на минимальную длину режима — 20% от длины всей выборки ($\varepsilon = 0.2$).

Для заданного разбиения выборки $(T_0, T_1, \dots, T_{m+1})$, где $T_0 = 0$ и $T_{m+1} = T$, построим усредненный (demeaned) процесс \hat{U}_t , полученный от регрессии y_t на константу сегмент за сегментом (т. к. необходимо построить состоятельный тест против сдвигов в константе). Другими словами, для $t \in [T_k + 1, T_{k+1}]$ процесс \hat{U}_t определяется как

$$\hat{U}_t = y_t - \sum_{i=T_k+1}^{T_{k+1}} y_i = y_t - \bar{y}_k.$$

Для всей выборки этот процесс можно записать как

$$\hat{U}_t = \sum_{k=0}^m \mathbb{I}(T_k + 1 \leq t \leq T_{k+1}) (y_t - \bar{y}_k). \quad (36)$$

Рассмотрим следующие матрицы, соответствующие вторым моментам \hat{U}_t и частичным суммам:

$$A_k = (T_{k+1} - T_k)^{-2} \sum_{t=T_k+1}^{T_{k+1}} \hat{U}_t \hat{U}_t', \quad (37)$$

$$B_k = (T_{k+1} - T_k)^{-4} \sum_{t=T_k+1}^{T_{k+1}} \left(\sum_{j=T_k+1}^t \hat{U}_j \right) \left(\sum_{j=T_k+1}^t \hat{U}_j \right)', \quad (38)$$

для $k = 0, \dots, m$, и определим

$$Q_k = (B_k)^{-1/2} A_k (B_k)^{-1/2}. \quad (39)$$

Пусть $\rho_i(Q_k)$, $i = 1, \dots, n$ обозначают i -й член вариационного ряда собственных значений Q_k . Следовательно, $(\rho_1(Q_k), \dots, \rho_n(Q_k))$ — упорядоченные решения следующей задачи нахождения собственных значений:

$$\det(\rho B_k - A_k) = 0. \quad (40)$$

Когда существует r_0 коинтегрирующих векторов, $n - r_0$ первых членов вариационного ряда собственных значений сходятся к невырожденному распределению, а r_0 наибольших членов ряда собственных значений расходятся к бесконечности. Следовательно, когда ранг коинтеграции больше r_0 , сумма наименьших $n - r_0$ собственных значений расходится к бесконечности.

Поскольку альтернативная гипотеза предполагает ранг, больший чем r_0 в некоторых подвыборках, необходимо рассмотреть поведение $n - r_0$ собственных значений по всем допустимым режимам в выборке. Тогда для допустимого разбиения (T_1, \dots, T_m) строится следующая статистика:

$$Q^m(T_1, \dots, T_m) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^{n-r_0} \rho_i(Q_k). \quad (41)$$

При нулевой гипотезе эта статистика имеет невырожденное предельное распределение, при альтернативной она расходится, т. к. расходится хотя бы в одном из режимов. Поскольку разбиение на режимы неизвестно, Qu (2007) предлагает использовать супремум от статистики (41) по всем возможным датам сдвигов:

$$\text{Sup-}Q^m = \sup_{(T_1, \dots, T_m) \in T_\varepsilon} \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^{n-r_0} \frac{\rho_i(Q_k)}{100(n-r_0)}, \quad (42)$$

где $T_\varepsilon = \{(T_1, \dots, T_m) : |T_{k+1} - T_k| \geq \varepsilon T, T_1 \geq \varepsilon T, T_m \leq (1 - \varepsilon)T\}$. Масштабирующий коэффициент $100(n - r_0)$ предназначен для контроля критических значений. Предельное распределение статистики (42) (при нулевой гипотезе) не зависит от параметров, определяющих краткосрочную динамику. Так как тест фактически непараметрический, то нет необходимости оценивать число лагов¹³. Однако на конечных выборках непараметрический тест автоматически корректирует серийную корреляцию только в некоторой степени, но эта коррекция может быть недостаточна — возникают «либеральные» искажения размера, когда в данных есть сильная тенденция возвращения к среднему, и «консервативные» искажения, когда ряды в первых разностях положительно коррелированы. Также тест робастен к нелинейной переходной динамике.

Хотя число режимов априорно неизвестно, для состоятельности тестовых статистик достаточно взять $m = 2$, т. к. в этом случае находится сегмент с более высоким рангом коинтеграции, и не нужно знать точное число режимов при альтернативе. Поэтому Qu (2007) предлагает построить следующие два теста:

¹³ Оценивание числа лагов также становится проблематичным, если производится поиск по всем возможным датам сдвигов.

$$WQ = \max \left(\text{Sup-}Q^1, \text{Sup-}Q^2 \frac{c(\alpha, 1, n - r_0, \varepsilon)}{c(\alpha, 2, n - r_0, \varepsilon)} \right), \tag{43}$$

$$SQ = \text{Sup-}Q^1 + \text{Sup-}Q^2 \frac{c(\alpha, 1, n - r_0, \varepsilon)}{c(\alpha, 2, n - r_0, \varepsilon)}, \tag{44}$$

где $c(\alpha, i, n - r_0, \varepsilon)$ обозначает критическое значение теста для i сдвигов на уровне значимости α .

Возможны дополнительные модификации тестовой статистики (42) для увеличения мощности, когда имеется некоторая априорная информация о местоположении сдвига. Если известно, что сдвиг происходит в конце выборки, то используется $\text{Sup-}Q^F$ (forward recursive test), если в начале — то $\text{Sup-}Q^R$ (reverse recursive test), а если в середине — то $\text{Sup-}Q^W$ (rolling window test), которые определяются следующим образом:

$$\text{Sup-}Q^F = \frac{1}{100(n - r_0)} \cdot \sup_{t \in [T_1 + 1, T]} \sum_{i=1}^{n-r_0} \rho_i \left((B_{1,t})^{-1/2} A_{1,t} (B_{1,t})^{-1/2} \right), \tag{45}$$

$$\text{Sup-}Q^R = \frac{1}{100(n - r_0)} \cdot \sup_{t \in [1, T_1]} \sum_{i=1}^{n-r_0} \rho_i \left((B_{t,T})^{-1/2} A_{t,T} (B_{t,T})^{-1/2} \right), \tag{46}$$

$$\text{Sup-}Q^W = \frac{1}{100(n - r_0)} \cdot \sup_{(t_1, t_2) \in T_\varepsilon^W} \sum_{i=1}^{n-r_0} \rho_i \left((B_{t_1, t_2})^{-1/2} A_{t_1, t_2} (B_{t_1, t_2})^{-1/2} \right), \tag{47}$$

где $T_\varepsilon^W = \{(T_1, T_2) : T_2 - T_1 \geq \varepsilon T, T_1 \geq 1, T_2 \leq T\}$, а $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ построены по наблюдениям с i до j .

Qu (2007) получает при $r_0 = 0$ для независимых случайных блужданий в процессе порождения данных, что размер теста $\text{Sup-}Q^2$ больше других реагирует на размерность системы, хотя размер всех тестов близок к номинальному. При введении в систему переходной динамики (AR или MA компоненты) размер тестов становится очень нестабильным. Это говорит о том, что на конечных выборках переходная динамика становится важной, хотя она и не входит в предельное распределение статистик. Если ряды в первых разностях показывают сильную положительную корреляцию, тесты становятся очень консервативными. С другой стороны, если ряды в первых разностях имеют сильную тенденцию возвращения к среднему, тест становится слишком либеральным¹⁴.

Qu (2007) предлагает процедуру для исключения серийной зависимости из переходного компонента системы для улучшения свойств на конечных выборках, с использованием Beveridge–Nelson разложения. Эта процедура заключается в следующем:

- 1) оценить регрессию $\Delta y_t = \mu + \text{Пу}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + e_t$, используя всю выборку;
- 2) построить полиномы $\hat{\Gamma}(1) = I_n - \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_2$ и $\hat{\Gamma}^*(L) = \hat{\Gamma}_1^* + \hat{\Gamma}_2^* L$, где $\hat{\Gamma}_1^* = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, $\hat{\Gamma}_2^* = \hat{\Gamma}_2$;
- 3) построить скорректированный процесс $\tilde{y}_t = y_t + \hat{\Gamma}(1)^{-1} \hat{\Gamma}^*(L) \Delta y_t$;
- 4) используя \tilde{y}_t , построить тестовую статистику.

¹⁴ Последнее происходит из-за того, что переходная динамика доминирует над компонентом случайного блуждания.

Заметим, что данное преобразование просто добавляет стационарный процесс к интегрированному, поэтому оно имеет тот же самый стохастический тренд, что и y_t , и коррекция не влияет на ранг коинтеграции. Также нет необходимости определять точное число лагов (хотя это и может несколько улучшить свойства на конечных выборках), а можно использовать $p = 2$, т. к. это позволяет очистить ряд, чтобы тесты и предельные распределения не зависели бы от параметров переходной динамики. Использование полной выборки для оценивания корректирующих параметров улучшает размер. Добавление константы и лагированной переменной (т. е. используя оценивание регрессии с пониженным рангом) применяется для учета возможного влияния коинтегрированности рядов при нулевой гипотезе.

Если нулевая гипотеза оказывается отвергнутой, необходимо оценить местоположение сдвигов. Однако разбиение, которое максимизирует тестовую статистику, не обязательно состоятельно оценивает даты сдвигов, т. к. при альтернативной гипотезе соответствующий нормализованный тест сходится к случайной величине вместо константы, и максимум может не соответствовать точке сдвига. Поэтому применяется подход (Bai et al., 1998), в котором состоятельная оценка доли даты сдвига вычисляется путем максимизации функции правдоподобия при некоторых слабых (дополнительных) условиях на эту долю¹⁵. Тогда скорость сходимости доли даты сдвига достаточна для того, чтобы гарантировать стандартную \sqrt{T} -асимптотику для оцененных коэффициентов. Для обобщения результата (Bai et al., 1998) на случай нескольких сдвигов предлагается использовать процедуры (Bai, Perron, 1998) и (Qu, Perron, 2007).

Пример. Продолжая пример из раздела 2.2, можно рассмотреть, следуя (King et al., 1991), наличие коинтеграции между y_t и c_t , а также между y_t и i_t за период с 1995 по 2019 г. (100 наблюдений), предполагая возможное наличие двух сдвигов. Тест Йохансена не находит доказательств коинтеграции между этими двумя парами временных рядов, поэтому попытаемся протестировать, имеет ли место коинтеграция в подвыборках данных. В таблице 2 приводятся результаты описанных выше тестов на изменение ранга коинтеграции. Для пары y_t и c_t нет свидетельств коинтеграции даже на подвыборках, но для пары y_t и i_t гипотеза о том, что ранг равен 0, отвергается большинством тестов.

Таблица 2. Результаты тестов на изменение ранга коинтеграции

Тестовая статистика	y_t, c_t	y_t, i_t
Sup- Q^1	1.75	3.28*
Sup- Q^2	2.83	6.04**
Sup- Q^f	1.23	1.93
Sup- Q^r	0.78	1.34
Sup- Q^w	1.58	3.79*
SQ (1%-ный уровень)	3.73	7.50 ⁺
WQ (1%-ный уровень)	1.98	4.22 ⁺
SQ (5%-ный уровень)	3.57	7.16 ⁺
WQ (5%-ный уровень)	1.82	3.88 ⁺
SQ (10%-ный уровень)	3.53	7.07 ⁺
WQ (10%-ный уровень)	1.77	3.79 ⁺

Примечание. * и ** обозначают отвержение на 10 и 5%-ном уровне значимости. Для тестов SQ и WQ ⁺ обозначает отвержение на том уровне значимости, для которого построена соответствующая статистика.

¹⁵ Предполагается, что сдвиг в среднем растет быстрее, чем $T^{-1/2} \log T$, и/или сдвиг в коинтегрирующем векторе растет быстрее, чем $T^{-1} \log T$.

4. Заключение и рекомендации

В данном обзоре были рассмотрены методы тестирования на ранг коинтеграции при наличии структурных сдвигов. Обсуждались случаи как известной даты сдвига, так и неизвестной, анализировались их достоинства и недостатки. В качестве рекомендации для прикладного исследователя можно предложить следующий алгоритм анализа данных.

1. Проверка рядов на единичный корень с возможным наличием структурных сдвигов и оценивание числа этих сдвигов — см. обзор (Скроботов, 2020).

2. Тестирование на ранг коинтеграции с использованием подхода (Harris et al., 2016), допускающего структурные сдвиги в среднем и/или тренде, в частности, процедуру SC-VECM. В данном подходе можно использовать как стандартные тесты (Johansen, 1988) в процедуре SC-VECM, так и тесты, основанные на GLS-детрендривании, в частности, (Trenkler et al., 2008).

2.1. Если оцененное число коинтеграционных соотношений сильно отличается от числа коинтегрирующих векторов («равновесий»), которое следует из экономической теории, то, возможно, что сами коинтеграционные соотношения меняются или меняется ранг коинтеграции. В первом случае следует использовать процедуру (Andrade et al., 2005), а во втором — (Qu, 2007).

3. Оценивание модели коррекции ошибок (ЕСМ) на основе полученного ранга коинтеграции и оцененных дат сдвигов с использованием метода максимального правдоподобия.

4. Получение представления общих трендов на основе оцененных параметров ЕСМ.

5. Идентификация импульсных откликов на основе представления общих трендов.

Последние два пункта, хотя и не рассматривались подробно в данном обзоре, изложены в (Juselius, 2006, Ch. 14, 15), и их можно реализовывать, применяя описанные выше процедуры для более точного оценивания ранга коинтеграции. В этой работе рассматривался случай с известной датой сдвига, но подход автора легко обобщить, используя вместо истинной даты сдвига оцененную, если она не известна априори.

Благодарности. Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы государственного задания РАНХиГС.

Список литературы

Скроботов А. А. (2020). Структурные сдвиги и тестирование на единичный корень. *Прикладная эконометрика*, 58, 96–141.

Скроботов А. А. (2021). Структурные сдвиги в моделях коинтеграции. *Прикладная эконометрика*, 63, 117–141.

Andrade P., Bruneau C., Gregoir S. (2005). Testing for the cointegration rank when some cointegrating directions are changing. *Journal of Econometrics*, 124, 269–310.

Bai J., Lumsdaine R. L., Stock J. H. (1998). Testing for and dating breaks in integrated and cointegrated time series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 47–78.

Harris D., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2016). Tests of the co-integration rank in VAR models in the presence of a possible break in trend at an unknown point. *Journal of Econometrics*, 192, 451–467.

- Inoue A. (1999). Tests of cointegrating rank with a trend-break. *Journal of Econometrics*, 90, 215–237.
- Johansen S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231–254.
- Johansen S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59, 1551–1580.
- Johansen S. (1996). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press, Oxford.
- Johansen S., Mosconi R., Nielsen B. (2000). Cointegration analysis in the presence of structural breaks in the deterministic trend. *Econometrics Journal*, 3, 216–249.
- Juselius K. (2006). *The cointegrated VAR model: Methodology and applications*. Oxford University Press, Oxford.
- King R., Plosser C. I., Stock J. H., Watson M. W. (1991). Stochastic trends and economic fluctuations. *The American Economic Review*, 81, 819–840.
- Kheifets I., Phillips P. C. B. (2021). Fully modified least squares cointegrating parameter estimation in multicointegrated systems. *Journal of Econometrics*. DOI: 10.1016/j.jeconom.2021.07.002.
- Lütkepohl H., Saikkonen P. (2000). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with a time trend. *Journal of Econometrics*, 95, 177–198.
- Lütkepohl H., Saikkonen P., Trenkler C. (2003). Comparison of tests for cointegrating rank of a VAR process with a structural shift. *Journal of Econometrics*, 113, 201–229.
- Lütkepohl H., Saikkonen P., Trenkler C. (2004). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with level shift at unknown time. *Econometrica*, 72, 647–662.
- Qu Z. (2007). Searching for cointegration in a dynamic system. *Econometrics Journal*, 10, 580–604.
- Qu Z., Perron P. (2007). Estimating and testing structural changes in multivariate regressions. *Econometrica*, 75, 459–502.
- Saikkonen P., Lütkepohl H. (2000a). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with structural shifts. *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 451–464.
- Saikkonen P., Lütkepohl H. (2000b). Trend adjustment prior to testing for the cointegrating rank of a vector autoregressive process. *Journal of Time Series Analysis*, 21, 435–456.
- Saikkonen P., Lütkepohl H., Trenkler C. (2006). Break date estimation for VAR processes with level shift with an application to cointegration testing. *Econometric Theory*, 22, 15–68.
- Trenkler C., Saikkonen P., Lütkepohl H. (2008). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with level shift and trend break. *Journal of Time Series Analysis*, 29, 331–358.

Поступила в редакцию 24.04.2021;
принята в печать 21.11.2021.

Skrobotov A. A. Structural breaks in cointegration models: Multivariate case. *Applied Econometrics*, 2021, v. 64, pp. 83–106.

DOI: 10.22394/1993-7601-2021-64-83-106.

Anton Skrobotov

RANEPA, Moscow; St.Petersburg University, St.Petersburg, Russian Federation;
skrobotov@ranepa.ru, antonskrobotov@gmail.com.

Structural breaks in cointegration models: Multivariate case

This review discusses methods of testing for a cointegration rank in a multivariate time series in the presence of structural breaks. The review covers both the methods with known and unknown break date. Multiple breaks are also considered. The issues of testing for cointegration with a possible change in the cointegration rank over time are discussed separately.

Keywords: testing for cointegration, testing for cointegration rank, structural breaks, error correction model.

JEL classification: C12; C22.

References

Skrobotov A. (2020). Survey on structural breaks and unit root tests. *Applied Econometrics*, 58, 96–141 (in Russian).

Skrobotov A. (2021). Structural breaks in cointegration models. *Applied Econometrics*, 63, 117–141 (in Russian).

Andrade P., Bruneau C., Gregoir S. (2005). Testing for the cointegration rank when some cointegrating directions are changing. *Journal of Econometrics*, 124, 269–310.

Bai J., Lumsdaine R. L., Stock J. H. (1998). Testing for and dating breaks in integrated and cointegrated time series. *Review of Economic Studies*, 65, 395–432.

Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66, 47–78.

Harris D., Leybourne S. J., Taylor A. M. R. (2016). Tests of the co-integration rank in VAR models in the presence of a possible break in trend at an unknown point. *Journal of Econometrics*, 192, 451–467.

Inoue A. (1999). Tests of cointegrating rank with a trend-break. *Journal of Econometrics*, 90, 215–237.

Johansen S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231–254.

Johansen S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59, 1551–1580.

Johansen S. (1996). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press, Oxford.

Johansen S., Mosconi R., Nielsen B. (2000). Cointegration analysis in the presence of structural breaks in the deterministic trend. *Econometrics Journal*, 3, 216–249.

Juselius K. (2006). *The cointegrated VAR model: Methodology and applications*. Oxford University Press, Oxford.

King R., Plosser C. I., Stock J. H., Watson M. W. (1991). Stochastic trends and economic fluctuations. *The American Economic Review*, 81, 819–840.

Kheifets I., Phillips P. C. B. (2021). Fully modified least squares cointegrating parameter estimation in multicointegrated systems. *Journal of Econometrics*. DOI: 10.1016/j.jeconom.2021.07.002.

Lütkepohl H., Saikkonen P. (2000). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with a time trend. *Journal of Econometrics*, 95, 177–198.

Lütkepohl H., Saikkonen P., Trenkler C. (2003). Comparison of tests for cointegrating rank of a VAR process with a structural shift. *Journal of Econometrics*, 113, 201–229.

Lütkepohl H., Saikkonen P., Trenkler C. (2004). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with level shift at unknown time. *Econometrica*, 72, 647–662.

Qu Z. (2007). Searching for cointegration in a dynamic system. *Econometrics Journal*, 10, 580–604.

Qu Z., Perron P. (2007). Estimating and testing structural changes in multivariate regressions. *Econometrica*, 75, 459–502.

Saikkonen P., Lütkepohl H. (2000a). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with structural shifts. *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 451–464.

Saikkonen P., Lütkepohl H. (2000b). Trend adjustment prior to testing for the cointegrating rank of a vector autoregressive process. *Journal of Time Series Analysis*, 21, 435–456.

Saikkonen P., Lütkepohl H., Trenkler C. (2006). Break date estimation for VAR processes with level shift with an application to cointegration testing. *Econometric Theory*, 22, 15–68.

Trenkler C., Saikkonen P., Lütkepohl H. (2008). Testing for the cointegrating rank of a VAR process with level shift and trend break. *Journal of Time Series Analysis*, 29, 331–358.

Received 24.04.2021; accepted 21.11.2021.