

Прикладная эконометрика, 2023, т. 71, с. 128–142.

Applied Econometrics, 2023, v. 71, pp. 128–142.

DOI: 10.22394/1993-7601-2023-71-128-142

И.М. Никольский, К.К. Фурманов¹

Измерение точности ранжировок предприятий по эффективности в модели стохастической границы

Предлагается способ оценивания согласованности истинных показателей неэффективности экономических субъектов в базовой модели стохастической границы и их JLMS-оценок. Для полунормального распределения неэффективности выводится приближенная формула асимптотического коэффициента согласованности Харрелла с погрешностью порядка 0.01. Исследование на сгенерированных данных показало, что коэффициент Харрелла на конечных выборках меньше своего асимптотического значения, так что полученная приближенная формула может служить оценкой сверху для ранжирующей способности модели.

Ключевые слова: стохастическая граница; ранжирование; техническая эффективность.

JEL classification: C2.

1. Введение

Множество моделей экономического поведения строится на представлении о субъекте, который принимает решения, исходя из задачи оптимизации целевого критерия, будь то потребитель, максимизирующий полезность, или фирма, максимизирующая прибыль. При этом оптимальное решение связано с эффективным распределением и использованием ресурсов, доступных субъекту. В действительности, поставленные в схожие условия субъекты принимают разные решения — например, фирмы при одинаковых затратах факторов производства дают разный выпуск — что может быть объяснено неэффективностью решений, либо различиями (возможно, ненаблюдаемыми) в условиях функционирования субъектов.

Оценивание эффективности использования ресурсов часто проводится с применением анализа данных, в настоящее время широко популярен анализ оболочки данных (Data Envelopment Analysis, DEA) и анализ стохастической границы (Stochastic Frontier Analysis, SFA). Оценки эффективности представляют интерес и для академической сферы, и для регулирующих органов. Об академическом интересе свидетельствует престижность и высокие наукометрические показатели специализированного журнала «Journal of Productivity Analysis», а использование методов анализа данных регулирующими органами разных стран

¹ Никольский Илья Михайлович — МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва; nikintegu@yandex.ru.

Фурманов Кирилл Константинович — ЦЭМИ РАН, Москва; kfurmanov@hse.ru.

рассмотрено, например, в работах (Schweinsberg et al., 2011; Australian Competition and Consumer Commission, 2012). В качестве субъектов принятия решения могут выступать отдельные предприятия (Ипатова, 2015; Щетинин, Назруллаева, 2012), банки (Головань, 2006; Головань и др., 2008; Kumbhakar, Peresetsky, 2013) и целые регионы (Макаров и др., 2014; Айвазян и др., 2014a). Есть исследования, где в качестве субъектов фигурируют учебные заведения (Aleskerov et al., 2017; Kirjavainen, 2007). Примерами курьезных приложений могут послужить анализ эффективности деятельности научного коллектива (Айвазян, Афанасьев, 2015) и моделирование времени человеческой жизни на основе стохастической границы (Chandra et al., 2013). Исключительно для удобства изложения в настоящей статье слово «предприятие» используется как синоним выражения «субъект принятия решения», хотя результаты исследования применимы также к регионам или отраслям.

Настоящая статья посвящена изучению точности оценок модели стохастической границы с точки зрения способности модели отделять относительно эффективные субъекты от относительно неэффективных, иначе говоря, ранжировать субъекты по эффективности. Существенный вклад в изучение точности оценок неэффективности внесли W. Hoggase и его соавторы. В статье (Hoggase, Schmidt, 1996) выведен доверительный интервал для показателя неэффективности отдельного субъекта, а в (Hoggase et al., 2015) изучено распределение ранга субъекта при ранжировке по эффективности. В настоящей статье рассматривается точность, с которой модели стохастической границы позволяют составлять рейтинг предприятий по неэффективности, измеренный с помощью коэффициента согласованности Харрелла между истинными значениями показателя неэффективности и их оценками.

2. Обзор литературы

Модель стохастической границы была предложена в работе (Aigner et al., 1977) как результат развития эконометрического анализа производственной эффективности, начатого в статье (Farrell, 1957) и продолженного в (Aigner, Chu, 1968; Afriat, 1972; Richmond, 1974; Schmidt, 1976; Aigner et al., 1976). Ранние работы рассматривали модели следующего вида:

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i,$$

где y_i — выпуск предприятия i (как правило, в логарифмическом виде), x_i — вектор затрат факторов производства, $f(x_i, \beta)$ — производственная функция, β — вектор параметров производственной функции, подлежащих оцениванию, ε_i — случайная ошибка, отклонение выпуска от границы производственных возможностей. В первоначальной статье (Farrell, 1957) рассматривался непараметрический метод, не требовавший спецификации производственной функции, но уже в приложении к этой статье был представлен параметрический подход, предложенный Winsten (1957), и эту заметку можно рассматривать как начало серии работ, приведших к появлению модели стохастической границы.

Главная идея статьи (Aigner et al., 1977) состоит в разделении случайной ошибки ε_i на две составляющие: неэффективность предприятия u_i и случайный шок v_i , в результате чего модель приобретает вид:

$$y_i = f(x_i, \beta) + v_i - u_i. \quad (1)$$

Разница между двумя компонентами случайной ошибки заключается в распределении: случайный шок описывается нормальной случайной величиной с нулевым средним, а неэффективность принимает только неотрицательные значения. Таким образом, даже при полной эффективности производства наблюдаются отклонения выпуска от значений функции $f(x_i, \beta)$ в силу случайных шоков — граница производственных возможностей отдельного предприятия становится случайной ($f(x_i, \beta) + v_i$), что и дало название модели. Разница между абсолютной эффективностью и наличием неэффективности проявляется в распределении случайных отклонений: при абсолютной эффективности суммарная случайная ошибка $\varepsilon_i = v_i - u_i$ распределена нормально, а при наличии неэффективности ее распределение скошено влево. Авторы рассматривали два распределения неэффективности: экспоненциальное и полунормальное, которые до сих пор широко применяются. Обзор последовавших модификаций модели (1) представлен в статье (Малахов, Пильник, 2013) и книгах (Kumbhakar, Lovell, 2003; Kumbhakar et al., 2015).

Задача оценивания эффективности отдельного предприятия была решена на несколько лет позже статьи (Aigner et al., 1977), в которой для примера оценивались *средние* показатели неэффективности для металлургической и сельскохозяйственной отраслей США. В работе (Jondrow et al., 1982) было предложено оценивать показатель неэффективности u_i предприятия i случайной величиной $\hat{u}_i$, определяемой следующим образом:

$$\hat{u}_i = g(y_i - f(x_i, \hat{\beta})), \text{ где } g(\varepsilon) = E(u | v - u = \varepsilon). \quad (2)$$

Величина $\hat{u}_i$ получила название JLMs-оценки (по фамилиям авторов). Для настоящей статьи важно, что функция $g(\varepsilon)$ из формулы (2) является убывающей, т.е. чем больше объем производства при заданных ресурсах, тем меньше оценка неэффективности предприятия.

К настоящему времени вопросы оценивания базовой модели стохастической границы (1) и индивидуальных показателей эффективности предприятий хорошо изучены и представлены как в исследовательской, так и в учебной литературе (Greene, 2002; Малахов, Пильник, 2013), а процедуры оценивания реализованы в статистических программах (Stata, R). Однако до сих пор мало изучена способность модели производственной границы ранжировать предприятия по эффективности, т.е. выделять *относительно* эффективные предприятия. В статье (Norgaard et al., 2015) изучено распределение ранга отдельного предприятия в выборке. Как отмечают авторы, их результаты помогают оценить степень неопределенности рангов, что имеет непосредственное отношение к точности ранжирования. Работа (Kumbhakar et al., 2021) посвящена последствиям ошибок спецификации моделей стохастической границы. Среди прочего, в ней приводится пример, в котором оцененные ранги субъектов по эффективности отрицательно коррелируют с истинными рангами из-за неверно специфицированного распределения компонента неэффективности. В (Nikolskiy, Furmanov, 2022) рассматривается точность оцененных ранжировок целиком (для всей выборки, а не для отдельного предприятия), измеренная коэффициентами ранговой корреляции Спирмена и Харрелла между истинными показателями неэффективности и их оценками, полученными в серии статистических экспериментов. Авторы получили следующие результаты экспериментов.

- На выборках большого объема точность оцененных ранжировок зависит только от распределений компонент случайной ошибки: случайных шоков v_i и показателей неэффективности u_i — в частности, от отношения их дисперсий.
- На выборках малого объема точность связана с числом наблюдений и числом оцениваемых параметров производственной функции: чем больше наблюдений и чем меньше

параметров, тем выше корреляция рангов истинных показателей неэффективности и их оценок.

- Остальные различия в выборках и условиях эксперимента практически не оказывают влияние на ранжирующую способность модели стохастической границы.

Эти результаты означают, что для выборок большого объема корреляция истинных и оцененных ранжировок есть функция параметров распределений компонент случайной ошибки, а для выборок малого объема эта функция будет завышающей оценкой корреляции. Далее в настоящей статье будет представлено приближенное выражение для этой функции в случае полунормального распределения неэффективности.

3. Измерение точности ранжировок

В эмпирической литературе принято подкреплять результаты оценивания эффективности анализом устойчивости этих оценок — сопоставлением ранжировок предприятий, полученных разными методами. Как правило, для измерения согласованности ранжировок используется коэффициент ранговой корреляции Спирмена, см., например, (Малахов, Пильник, 2013; Ипатова, 2015; Theodoridis, Psychoudakis, 2008; Kumbhakar, Peresetsky, 2013).

Для измерения точности ранжировок, т.е. согласованности рангов оценок неэффективности с истинными значениями, коэффициент Спирмена неудобен. Истинные значения ненаблюдаемы, поэтому простой расчет коэффициента по выборке невозможен, а теоретический вывод затруднен тем, что нет четкого соответствия между выборочным коэффициентом Спирмена и каким-либо параметром распределения генеральной совокупности. Поэтому в настоящей работе используется коэффициент (или индекс) согласованности Харрелла² (Harrell et al., 1982), имеющий как четкую и удобную формулировку в вероятностных терминах, так и содержательную интерпретацию.

Применительно к задаче измерения эффективности коэффициент Харрелла C можно определить следующим образом. Пусть из генеральной совокупности случайно отбирается пара субъектов (предприятий). Обозначим истинные компоненты неэффективности этих предприятий как u_1, u_2 , а их оценки — $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ соответственно. Коэффициент согласованности Харрелла (C -index) C определяется как

$$C = P(\hat{u}_1 < \hat{u}_2 \mid u_1 < u_2). \quad (3)$$

Выборочный аналог рассчитывается как доля пар предприятий, для которых $\hat{u}_1 < \hat{u}_2$, среди всех пар в выборке, удовлетворяющих условию $u_1 < u_2$, но в исследованиях по реальным данным это невозможно, поскольку величины u_1, u_2 ненаблюдаемы. Самая распространенная область применения данного коэффициента — измерение качества подгонки и прогнозной силы в моделях времени жизни (Newson, 2010; Rumyantseva, Furmanov, 2021; Крамаренко, Константинова, 2022).

Для теоретического анализа удобны также коэффициенты ранговой корреляции Кендалла и Сомерса — их связь с индексом Харрелла показана в статье (Newson, 2003) — но, помимо удобства вывода, выбор меры согласованности определялся и удобством использования.

² Встречаются также названия «индекс конкордации» или « C -индекс» (от англ. concordance — согласованность). В англоязычной литературе он часто называется просто «Harrell's C ».

Коэффициент Харрелла имеет простую и ясную интерпретацию: значение C показывает, с какой вероятностью модель в состоянии выделить из случайно отобранной пары предприятий более эффективное. Соответственно, значение 0.5 означает полное отсутствие ранжирующей способности, значение 1 — максимальную точность ранжировок, значение 0 — ошибки при каждом сравнении (т.е. ранжировки оценок оказываются противоположными ранжировкам истинных показателей неэффективности). Преимущество данного индекса по сравнению с общепринятым коэффициентом Спирмена заключается в возможности интерпретации не только крайних, но любых значений коэффициента Харрелла.

4. Асимптотический коэффициент Харрелла в простой модели стохастической границы

Рассмотрим регрессионную модель

$$y_i = f(x_i, \beta) + \varepsilon_i,$$

где y_i — выпуск предприятия i , $f(x_i, \beta)$ — производственная функция без учета случайных шоков, x_i — детерминированный вектор затрат факторов производства, β — вектор параметров производственной функции, ε_i — случайная ошибка, состоящая из двух компонент: $\varepsilon_i = v_i - u_i$. Здесь v_i — случайный шок, определяющий различия в производственных возможностях предприятий, так что для предприятия i наибольший возможный выпуск при затратах факторов x_i равен $f(x_i, \beta) + v_i$, а u_i — компонента неэффективности, разность между наблюдаемым и наибольшим возможным выпуском.

Будем считать, что $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$, $u_i \sim N^+(0, \sigma_u^2)$, т.е. компонента u_i имеет то же распределение, что и модуль нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_u^2 . Величины $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$ независимы в совокупности (n — число наблюдений). Предположения о независимости v_i и u_i , а также нормальности случайного шока v_i — общепринятые для моделей стохастической границы³, а полунормальность распределения компоненты неэффективности u_i — лишь один из существующих вариантов спецификации модели, предложенный в статье (Aigner et al., 1977) и широко используемый в настоящее время.

Параметры производственной функции β и распределений случайных компонент σ_v^2 и σ_u^2 обычно оцениваются либо методом максимального правдоподобия, либо комбинацией метода наименьших квадратов и метода моментов — в обоих случаях оценки получаются состоятельными (Greene, 2002, p. 459). Это — единственное важное для дальнейших выводов свойство, и далее оценки будут обозначаться как $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_v^2$, $\hat{\sigma}_u^2$ без указания конкретного метода. Оценка $\hat{u}_i$ компоненты неэффективности u_i есть убывающая функция от регрессионного остатка $\hat{\varepsilon}_i = y_i - f(x_i, \hat{\beta})$, этому требованию удовлетворяет оценка JLMS (2).

Выразим коэффициент Харрелла (3) через параметры данной модели. Будем рассматривать наблюдения с индексами 1 и 2 в качестве случайно отобранных, так что

$$C = P(\hat{u}_1 < \hat{u}_2 | u_1 < u_2) = P(y_1 - f(x_1, \hat{\beta}) > y_2 - f(x_2, \hat{\beta}) | u_1 < u_2).$$

³ Встречаются варианты модели стохастической границы, допускающие зависимость случайного шока и неэффективности (Айвазян и др., 2014b; Mamonov et al., 2022), однако широкого применения они пока не нашли.

Определяемый таким образом коэффициент C будет различен для разных пар наблюдений, т.к. распределение остатков $\hat{\varepsilon}_i$ зависит от объясняющих переменных x_i . В пределе при росте объема выборки n эти различия исчезнут из-за состоятельности оценок параметров производственной функции $\hat{\beta}$. Пусть функция $f(x, \beta)$ непрерывна по β . Тогда верно следующее равенство:

$$C_{asy} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(y_1 - f(x_1, \hat{\beta}) > y_2 - f(x_2, \hat{\beta}) | u_1 < u_2) = \\ = P(y_1 - f(x_1, \beta) > y_2 - f(x_2, \beta) | u_1 < u_2) = P(v_1 - u_1 > v_2 - u_2 | u_1 < u_2).$$

Отсюда видно, что асимптотический коэффициент Харрелла C_{asy} не зависит от выбора наблюдений, т.к. случайные пары (v_i, u_i) во всех наблюдениях одинаково распределены. По этой же причине $P(u_1 < u_2) = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$C_{asy} = P(v_1 - u_1 > v_2 - u_2 | u_1 < u_2) = 2P(v_1 - u_1 > v_2 - u_2, u_1 < u_2). \quad (4)$$

Формула (4) справедлива независимо от распределения участвующих в ней случайных величин, единственное ограничение — требуется непрерывность распределения неэффективности, что вместе с независимостью наблюдений гарантирует выполнение равенства $P(u_1 < u_2) = \frac{1}{2}$. Для дискретных и смешанных случайных величин $P(u_1 < u_2) < \frac{1}{2}$, т.к. с положительной вероятностью значения u_1 и u_2 совпадают. Однако это ограничение несущественно, поскольку для практических целей используются именно непрерывные распределения неэффективности.

По формуле (4) можно рассчитать асимптотические значения коэффициента Харрелла для заданных распределений случайных компонент методом Монте-Карло независимо от вида распределений. Ниже приводится вывод формулы для приближенных вычислений, пригодной для конкретного случая полунормальной неэффективности.

5. Приближенный расчет коэффициента Харрелла при полунормальном распределении неэффективности

В этом разделе используется предположение о независимости случайных ошибок в разных наблюдениях, которое типично для моделей пространственных выборок (cross-section data).

Введем случайные величины $\eta = v_1 - v_2$ и $\xi = u_1 - u_2$ и выразим через них асимптотический коэффициент Харрелла (4):

$$C_{asy} = 2P(\xi - \eta < 0, \xi < 0). \quad (5)$$

Величина η нормально распределена по предпосылкам модели, что касается величины ξ , то ее распределение можно считать *приближенно* нормальным. Это иллюстрирует рис. 1, где приведена гистограмма разности независимых полунормальных величин в сгенерированной (из миллиона наблюдений) выборке вместе с графиком плотности нормального распределения, у которого в качестве параметров брались оценки математического ожидания и дисперсии по выборке из разностей полунормальных величин. Видно, что распределения в целом близки, хотя плотность ξ заметно больше нормальной в окрестности нуля.

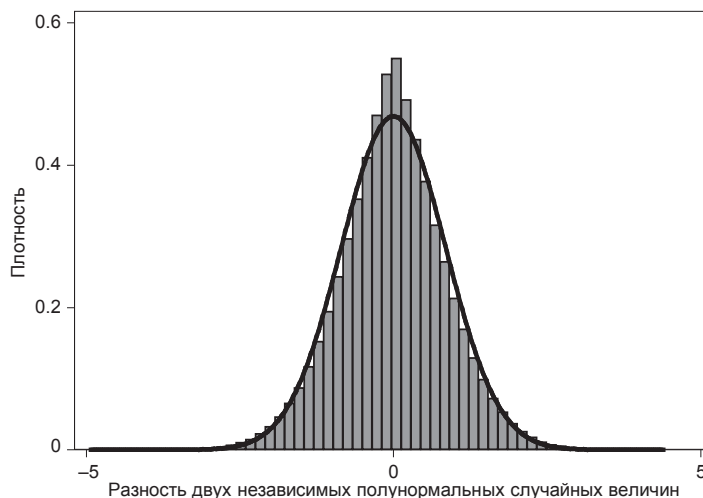


Рис. 1. Гистограмма разности полунормальных случайных величин и нормальная плотность

Если считать ξ нормальной случайной величиной, то совместное распределение ξ и $\xi - \eta$ получится совместным нормальным, т.к. ξ и η независимы в силу независимости компонент случайной ошибки v_i и u_i . Тогда расчет коэффициента конкордации по формуле (5) сводится к расчету значения функции двумерного нормального распределения в точке (0,0). Найдем характеристики распределения величин ξ и $\xi - \eta$.

Математические ожидания:

$$E(\xi) = E(u_1) - E(u_2) = 0; \quad E(\xi - \eta) = E(-\eta) = E(v_2) - E(v_1) = 0.$$

При расчете дисперсий будем пользоваться выражением для дисперсии полунормальной случайной величины (Greene, 2002, p. 535): $V(u_1) = V(u_2) = \sigma_u^2 (1 - 2/\pi)$. В силу независимости наблюдений

$$V(\xi) = V(u_1) + V(u_2) = 2\sigma_u^2 (1 - 2/\pi);$$

$$V(\xi - \eta) = V(\xi) + V(\eta) = V(\xi) + V(v_1) + V(v_2) = 2\sigma_u^2 (1 - 2/\pi) + 2\sigma_v^2.$$

Ковариация:

$$\text{Cov}(\xi, \xi - \eta) = V(\xi) - \text{Cov}(\xi, \eta) = V(\xi).$$

Корреляция:

$$\text{Corr}(\xi, \xi - \eta) = \frac{\text{Cov}(\xi, \xi - \eta)}{\sqrt{V(\xi)V(\xi - \eta)}} = \sqrt{\frac{V(\xi)}{V(\xi - \eta)}} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 (1 - 2/\pi)}{\sigma_u^2 (1 - 2/\pi) + \sigma_v^2}}.$$

Обозначим долю дисперсии неэффективности в дисперсии суммарной случайной составляющей через θ :

$$\theta = \frac{V(u_i)}{V(v_i - u_i)} = \frac{V(u_i)}{V(v_i) + V(u_i)} = \frac{\sigma_u^2 (1 - 2/\pi)}{\sigma_u^2 (1 - 2/\pi) + \sigma_v^2}.$$

Тогда $\text{Corr}(\xi, \xi - \eta) = \sqrt{\theta}$.

Считая, что случайные величины ξ и $\xi - \eta$ имеют совместное нормальное распределение, переписываем выражение (5) через функцию двумерного нормального распределения:

$$C_{asy} \approx 2\Phi_2(0, 0; \sqrt{\theta}). \quad (6)$$

Здесь $\Phi_2(x, y; \rho)$ — значение функции совместного распределения двух стандартных нормальных величин с коэффициентом корреляции ρ в точке (x, y) . Хотя величины ξ и $\xi - \eta$ не стандартизованы (их дисперсии могут отличаться от 1), это не имеет значения при расчете функции распределения в точке $(x, y) = (0, 0)$. Равенство (6) является приближенным, поскольку истинное совместное распределение отличается от нормального. Точность этого равенства рассматривается в следующем разделе статьи.

Из формулы (6) следует, что асимптотически ранжирующая способность модели стохастической границы зависит от единственного параметра θ — вклада неэффективности в дисперсию случайной ошибки. На рисунке 2 приведен график зависимости асимптотического коэффициента Харрелла от θ согласно формуле (6).

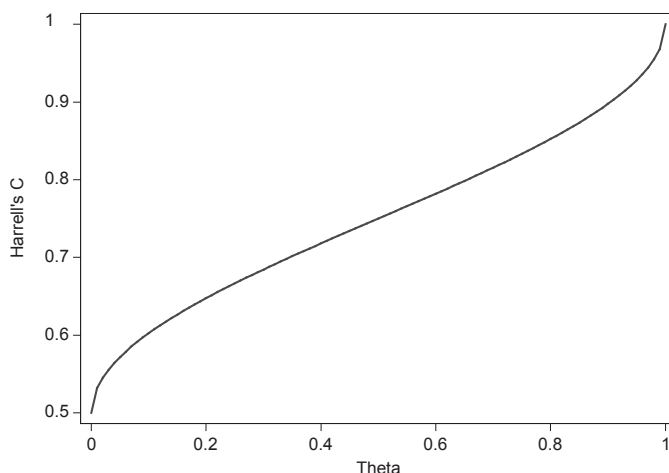


Рис. 2. Асимптотический коэффициент Харрелла (Harrell's C) в зависимости от доли дисперсии неэффективности в суммарной дисперсии (theta)

6. Практические аспекты

При практическом применении формулы (6) для измерения точности ранжировок предприятий по неэффективности стоит обратить внимание на возможные источники ошибок.

Ошибка спецификации модели. В какой-то мере ошибки спецификации можно выявить тестами на функциональную форму и гетероскедастичность, изучением распределения остатков регрессии. Однако по имеющимся данным невозможно по отдельности определить распределение случайных компонент u и v , т.к. одному и тому же распределению суммарной ошибки ε могут соответствовать разные распределения компонент. Данные также не дают оснований считать, что обе эти компоненты существуют и имеют именно тот смысл, который придает им исследователь. Вместе с тем последствия ошибок спецификации могут быть существенными. Так, в работе (Kumbhakar et al., 2021) показано, как неверно заданное

распределение показателя неэффективности приводит к изменению знаков предельных эффектов, отражающих связь неэффективности с объясняющими переменными, и близкой к нулю или отрицательной корреляции истинных и оцененных ранжировок.

Объем выборки. Выражение (4) и выведенная на его основании формула (6) относятся к асимптотическому коэффициенту согласованности, что не позволяет корректно применять их для анализа конечных выборок без дополнительного исследования (пример такого исследования приведен в табл. 1).

Ошибка приближения. Формула (6) получена не совсем «законной» заменой распределения разности полунонормальных величин нормальным распределением, потому не выполняется как строгое равенство.

Различие между теоретическим и выборочным коэффициентами Харрелла. Практическое значение при анализе конкретной выборки имеет не вероятность правильно определить более эффективное предприятие, а доля случаев, в которых модель дала правильный результат, т.е. выборочный коэффициент Харрелла для практики важнее теоретического. А на малых выборках между ними могут быть заметные расхождения.

Ошибка оценивания. Значения параметров σ_v^2 и σ_u^2 на практике неизвестны, так что для расчета коэффициента согласованности ранжировок придется использовать оцененные значения $\hat{\sigma}_v^2$ и $\hat{\sigma}_u^2$.

Невозможность отдельного исследования случайных шоков и неэффективности — слабое место анализа стохастической границы вообще, а не только рассматриваемой модели. Для изучения погрешности приближения было проведено дополнительное исследование. Значение асимптотического коэффициента Харрелла рассчитывалось симуляциями по формуле (4) и сравнивалось со значением, которое дает формула (6). Результаты этого исследования приведены в табл. 1, куда включены также и полученные симуляциями значения коэффициента Харрелла для конечных выборок, взятые из статьи (Nikolskiy, Furmanov, 2022, с. 325).

Во всех случаях, представленных в таблице, формула (6) завышала асимптотический коэффициент Харрелла, наибольшее расхождение с симулированными значениями составило 0.012. Из таблицы также следует, что асимптотические значения выше значений, полученных

Таблица 1. Коэффициенты Харрелла для выборок конечного объема n , а также асимптотические коэффициенты Харрелла, рассчитанные симуляциями по формуле (4) и приближенно по формуле (6)

Вклад неэффективности θ	С для конечных выборок		Асимптотический коэффициент C_{asy}	
	$n = 25$	$n = 100$	Симуляции по формуле (4)	По формуле (6)
0.1	0.594	0.598	0.599	0.602
0.2	0.635	0.641	0.643	0.646
0.3	0.671	0.675	0.678	0.686
0.4	0.696	0.708	0.710	0.718
0.5	0.724	0.737	0.741	0.750
0.6	0.754	0.769	0.771	0.782
0.7	0.783	0.800	0.804	0.815
0.8	0.813	0.834	0.840	0.852
0.9	0.854	0.880	0.886	0.896

для конечных выборок. Можно заключить, что формула (6) дает оценку сверху для коэффициента Харрелла на реальных выборках (но именно для *теоретического, не выборочного* коэффициента, отражающего вероятность, а не долю). Для выборок большого объема расхождение между истинным и приближенным значением находится в пределах 0.02, что, возможно, устроит многих исследователей и практиков.

Как пример использования полученного результата оценим ранжирующую способность модели стохастической границы, представленной в основополагающей статье (Aigner et al., 1977). Оценив производственную функцию металлургической промышленности по данным 28 штатов США, авторы статьи рассчитали, что лишь 0.361% дисперсии случайной ошибки приходится на неэффективность (Aigner et al., 1977, p. 33). Подставим это значение в формулу (6):

$$C_{asy} \approx 2\Phi_2(0, 0; \sqrt{0.00361}) = 0.519.$$

Асимптотический коэффициент Харрелла, соответствующий данному вкладу неэффективности в суммарную дисперсию, означает, что из двух случайных штатов модель выбирает более эффективный с вероятностью 51.9% (немногим точнее исхода при бросании монеты). Поэтому с точки зрения составления рейтинга штатов по эффективности модель оказывается непригодной, даже если пренебречь малым объемом выборки и погрешностью нормального приближения. Правда, благодаря тому же малому объему выборки, модельный рейтинг штатов может случайно привести к доле правильных сравнений, заметно большей 0.519, но это может возникнуть и при бросании монеты. Для того чтобы ранжировка предприятий или других субъектов принятия решения была точной не случайно, необходима высокая доля неэффективности в суммарной дисперсии случайной ошибки.

7. Заключение

Предложенная в статье формула приближенного расчета коэффициента согласованности пригодна в жестких предположениях исходной модели из статьи (Aigner et al., 1977), причем требует полунормального распределения неэффективности (в первоначальной статье допускалось и экспоненциальное распределение). В какой мере полученные результаты чувствительны к нарушениям этих предпосылок, авторам на данный момент неизвестно. Исследователю, желающему оценить ранжирующую способность модели стохастической границы с другим распределением неэффективности, можно предложить воспользоваться формулой (4) и рассчитать коэффициент Харрелла симуляционными методами.

Пожалуй, основная проблема состоит в невозможности отделить неэффективность от случайных шоков без предположений о распределении случайных компонент (во всяком случае, без повторяющихся наблюдений за субъектами принятия решения). Обоснование этих предпосылок неясно — авторы первоначальной статьи (Aigner et al., 1977) не уделили этому внимания, а в современной эмпирической литературе они воспринимаются как данность, которая обусловлена не только исследовательской традицией, но и возможностями программного обеспечения. Для уверенности в оценках точности ранжировок, полученных по модели стохастической границы, прежде всего надо быть уверенным в том, что отклонения наблюдений от «функции регрессии» действительно разбиваются на две компоненты — нормально распределенные случайные шоки и не нормально распределенная неэффективность.

Список литературы

- Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю. (2015). Эффективность человеческого капитала в исследованиях, поддержанных научным фондом. *Экономическая наука современной России*, 69 (2), 22–35.
- Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Руденко В. А. (2014а). Оценка эффективности регионов РФ на основе модели производственного потенциала с характеристиками готовности к инновациям. *Экономика и математические методы*, 50 (4), 34–70.
- Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Руденко В. А. (2014б). Исследование зависимости случайных составляющих стохастической производственной функции при оценке технической эффективности. *Прикладная эконометрика*, 34, 3–18.
- Головань С. В. (2006). Факторы, влияющие на эффективность российских банков. *Прикладная эконометрика*, 2, 3–17.
- Головань С. В., Карминский А. М., Пересецкий А. А. (2008). Эффективность российских банков с точки зрения минимизации издержек с учетом факторов риска. *Экономика и математические методы*, 44 (4), 28–38.
- Ипатова И. Б. (2015). Динамика совокупной факторной производительности и ее компонентов на примере российской отрасли, производящей пластмассовые изделия. *Прикладная эконометрика*, 38, 21–40.
- Крамаренко И. В., Константинова Л. А. (2022). Особенности применения регрессии Кокса в различных инструментальных средах. *Вестник университета*, 10, 80–88. DOI: 10.26425/1816-4277-2022-10-80-88.
- Макаров В. Л., Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Бахтизин А. Р., Нанавян А. М. (2014). Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения. *Экономика региона*, 4, 9–30.
- Малахов Д. И., Пильник Н. П. (2013). Методы оценки показателя эффективности в моделях стохастической производственной границы. *Экономический журнал Высшей Школы Экономики*, 17 (4), 660–686.
- Щетинин Е. И., Назруллаева Е. Ю. (2012). Производственный процесс в пищевой промышленности: взаимосвязь инвестиций в основной капитал и технической эффективности. *Прикладная эконометрика*, 28, 63–84.
- Afriat S. N. (1972). Efficiency estimation of production functions. *International Economic Review*, 13 (3), 568–598. DOI: 10.2307/2525845.
- Aigner D. J., Amemiya T., Poirier D. J. (1976). On the estimation of production frontiers: Maximum likelihood estimation of the parameters of a discontinuous density function. *International Economic Review*, 17 (2), 377–396.
- Aigner D. J., Chu S. F. (1968). On estimating the industry production function. *American Economic Review*, 58, 826–839.
- Aigner D., Lovell C. A. K., Schmidt P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6, 21–37. DOI: 10.1016/0304-4076(77)90052-5.
- Aleskerov F. T., Belousova V. Yu., Petrushchenko V. V. (2017). Models of data envelopment analysis and stochastic frontier analysis in the efficiency assessment of universities. *Automation and Remote Control*, 78 (5), 902–923. DOI: 10.1134/S0005117917050125.

- Australian Competition and Consumer Commission. (2012). Benchmarking opex and capex in energy networks. *ACCC/AER Working Paper Series*, No. 6.
- Chandra K. S., Gopal G., Ramadurai M. (2013). A stochastic frontier approach to survival analysis. *Journal of Applied Statistics*, 40 (6), 1362–1371. DOI: 10.1080/02664763.2013.785498.
- Farrell M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 120 (3), 253–281.
- Greene W. H. (2002). *Econometric analysis*. 5th edition. Prentice Hall.
- Harrell F. E. Jr., Califf R. M., Pryor D. B., Lee K. L., Rosati R. A. (1982). Evaluating the yield of medical tests. *Journal of the American Medical Association*, 247 (18), 2543–2546. DOI: 10.1001/jama.1982.03320430047030.
- Horrace W. C., Schmidt P. (1996). Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, 7, 257–282.
- Horrace W. C., Seth R.-S., Wright I. (2015). Expected efficiency ranks from parametric stochastic frontier models. *Empirical Economics*, 48 (2), 829–848. DOI: 10.1007/s00181-014-0808-8.
- Jondrow J., Lovell C. A. K., Materov I. S., Schmidt P. (1982). On the estimation of technical inefficiency in stochastic frontier production function model. *Journal of Econometrics*, 19, 233–239. DOI: 10.1016/0304-4076(82)90004-5.
- Kirjavainen T. (2007). Efficiency of Finnish upper secondary schools: An application of stochastic frontier analysis with panel data. *VATT Discussion Papers*, No. 428.
- Kumbhakar S. C., Lovell C. A. K. (2003). *Stochastic frontier analysis*. Cambridge University Press.
- Kumbhakar S. C., Peresetsky A. A. (2013). Cost efficiency of Kazakhstan and Russian banks: Results from competing panel data models. *Macroeconomics and Finance in Emerging Market Economies*, 6 (1), 88–113. DOI: 10.1080/17520843.2012.727444.
- Kumbhakar S. C., Peresetsky A., Shchetynin Y., Zaytsev A. (2021). Technical efficiency and inefficiency: Reliability of standard SFA models and a misspecification problem. *Econometrics and Statistics* (in press). DOI: 10.1016/j.ecosta.2021.12.006.
- Kumbhakar S. C., Wang H.-J., Horncastle A. P. (2015). *A practitioner's guide to stochastic frontier analysis using Stata*. Cambridge University Press.
- Mamonov M. E., Parmeter C. F., Prokhorov A. B. (2022). Dependence modeling in stochastic frontier analysis. *Dependence Modeling*, 10, 123–144. DOI: 10.1515/demo-2022-0107.
- Newson R. B. (2010) Comparing the predictive powers of survival models using Harrell's C or Somers' D. *The Stata Journal*, 10 (3), 339–358. DOI: 10.1177/1536867X1001000303.
- Nikolskiy I. M., Furmanov K. K. (2022). Ranking accuracy of the efficiency index in the stochastic frontier model. *Computational Mathematics and Modeling*, 33 (3), 319–329. DOI: 10.1007/s10598-023-09575-4.
- Richmond J. (1974). Estimating the efficiency of production. *International Economic Review*, 15 (2), 515–521. DOI: 10.2307/2525875.
- Rumyantseva E. V., Furmanov K. K. (2021). Using out-of-sample Cox–Snell residuals in time-to-event forecasting. *Business Informatics*, 15 (1), 7–18. DOI: 10.17323/2587-814X.2021.1.7.18.
- Schmidt P. (1976). On the statistical estimation of parametric frontier production functions. *Review of Economics and Statistics*, 58, 238–239. DOI: 10.2307/1924032.

- Schweinsberg A., Stronzik M., Wissner M. (2011). *Cost benchmarking in energy regulation in European countries*. WIK-Consult (Final Report). https://www.wik.org/fileadmin/Studien/2011/Cost_benchmarking_in_energy_regulation_in_European_countries.pdf.
- Theodoridis A. M., Psychoudakis A. (2008). Efficiency measurement in Greek dairy farms: Stochastic frontier vs. data envelopment analysis. *International Journal of Economic Sciences and Applied Research*, 1 (2), 53–66.
- Winsten C. (1957). Discussion on Mr. Farrell's paper. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General*, 120, 282–284.

Поступила в редакцию 29.06.2023;
принята в печать 31.08.2023.

Nikolskiy I., Furmanov K. Assessing the accuracy of efficiency rankings obtained from a stochastic frontier model. *Applied Econometrics*, 2023, v. 71, pp. 128–142.

DOI: 10.22394/1993-7601-2023-71-128-142

Ilya Nikolskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation;
nikintegu@yandex.ru

Kirill Furmanov

Central Economics and Mathematics Institute, RAS, Moscow, Russian Federation;
kfurmanov@hse.ru

Assessing the accuracy of efficiency rankings obtained from a stochastic frontier model

A technique for assessing the concordance between true inefficiency of decision making units in a basic stochastic frontier model and their JLMS estimates is proposed. An approximate formula for Harrell's C-index is derived for the case of half-normal distribution of inefficiency component. A simulation study shows that the approximation error is about 0.01 and that finite-sample values of Harrell's C are lower than asymptotic values. Hence, the approximate formula may be considered as an upper bound for the ranking accuracy of the stochastic frontier model.

Keywords: stochastic frontier; ranking; technical efficiency.

JEL classification: C2.

References

- Aivazian S.A., Afanasiev M. Yu. (2015). Efficiency of human capital in research supported by scientific foundation. *Ekonomicheskaya Nauka Sovremennoy Rossii*, 69 (2), 22–35 (in Russian).
- Aivazian S.A., Afanasiev M. Yu., Rudenko V.A. (2014a). Assessing the efficiency of Russian regions via production frontier model accounting for readiness to innovate. *Economics and Mathematical Methods*, 50 (4), 34–70 (in Russian).

- Aivazian S. A., Afanasiev M. Yu., Rudenko V. A. (2014b). Analysis of dependence between the random components of a stochastic production function for the purpose of technical efficiency estimation. *Applied Econometrics*, 34, 3–18 (in Russian).
- Golovan S. V. (2006). Factors influencing the efficiency of the Russian banks performance. *Applied Econometrics*, 2, 3–17 (in Russian).
- Golovan S. V., Karminsky A. M., Peresetsky A. A. (2008). Cost efficiency of Russian banks. Models with risk factors. *Economics and Mathematical Methods*, 44 (4), 28–38 (in Russian).
- Ipatova I. (2015). The dynamics of total factor productivity and its components: Russian plastic production. *Applied Econometrics*, 38 (2), 21–40 (in Russian).
- Kramarenko I. V., Konstantinova L. A. (2022). Features of using Cox regression in various instrumental environments. *Vestnik Universiteta*, 10, 80–88 (in Russian). DOI: 10.26425/1816-4277-2022-10-80-88.
- Makarov V. L., Aivazyaz S. A., Afanasiev M. Yu., Bakhtizin A. R., Nanavyan A. M. (2014). The estimation of the regions' efficiency of the Russian Federation including the intellectual capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life. *Economy of Region*, 4, 9–30 (in Russian).
- Malakhov D., Pilnik N. (2013). Methods of estimating of the efficiency in stochastic frontier models. *HSE Economic Journal*, 17 (4), 660–686 (in Russian).
- Shchetynin Ye., Nazrullaeva E. (2012). Effects of fixed capital investments on technical efficiency in food industry. *Applied Econometrics*, 28, 63–84 (in Russian).
- Afriat S. N. (1972). Efficiency estimation of production functions. *International Economic Review*, 13 (3), 568–598. DOI: 10.2307/2525845.
- Aigner D. J., Amemiya T., Poirier D. J. (1976). On the estimation of production frontiers: Maximum likelihood estimation of the parameters of a discontinuous density function. *International Economic Review*, 17 (2), 377–396.
- Aigner D. J., Chu S. F. (1968). On estimating the industry production function. *American Economic Review*, 58, 826–839.
- Aigner D., Lovell C. A. K., Schmidt P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6, 21–37. DOI: 10.1016/0304-4076(77)90052-5.
- Aleskerov F. T., Belousova V. Yu., Petrushchenko V. V. (2017). Models of data envelopment analysis and stochastic frontier analysis in the efficiency assessment of universities. *Automation and Remote Control*, 78 (5), 902–923. DOI: 10.1134/S0005117917050125.
- Australian Competition and Consumer Commission. (2012). Benchmarking opex and capex in energy networks. *ACCC/AER Working Paper Series*, No. 6.
- Chandra K. S., Gopal G., Ramadurai M. (2013). A stochastic frontier approach to survival analysis. *Journal of Applied Statistics*, 40 (6), 1362–1371. DOI: 10.1080/02664763.2013.785498.
- Farrell M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, 120 (3), 253–281.
- Greene W. H. (2002). *Econometric analysis*. 5th edition. Prentice Hall.
- Harrell F. E. Jr., Califf R. M., Pryor D. B., Lee K. L., Rosati R. A. (1982). Evaluating the yield of medical tests. *Journal of the American Medical Association*, 247 (18), 2543–2546. DOI: 10.1001/jama.1982.03320430047030.

- Horrace W. C., Schmidt P. (1996). Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models. *Journal of Productivity Analysis*, 7, 257–282.
- Horrace W. C., Seth R.-S., Wright I. (2015). Expected efficiency ranks from parametric stochastic frontier models. *Empirical Economics*, 48 (2), 829–848. DOI: 10.1007/s00181-014-0808-8.
- Jondrow J., Lovell C. A. K., Materov I. S., Schmidt P. (1982). On the estimation of technical inefficiency in stochastic frontier production function model. *Journal of Econometrics*, 19, 233–239. DOI: 10.1016/0304-4076(82)90004-5.
- Kirjavainen T. (2007). Efficiency of Finnish upper secondary schools: An application of stochastic frontier analysis with panel data. *VATT Discussion Papers*, No. 428.
- Kumbhakar S. C., Lovell C. A. K. (2003). *Stochastic frontier analysis*. Cambridge University Press.
- Kumbhakar S. C., Peresetsky A. A. (2013). Cost efficiency of Kazakhstan and Russian banks: Results from competing panel data models. *Macroeconomics and Finance in Emerging Market Economies*, 6 (1), 88–113. DOI: 10.1080/17520843.2012.727444.
- Kumbhakar S. C., Peresetsky A., Shchetynin Y., Zaytsev A. (2021). Technical efficiency and inefficiency: Reliability of standard SFA models and a misspecification problem. *Econometrics and Statistics* (in press). DOI: 10.1016/j.ecosta.2021.12.006.
- Kumbhakar S. C., Wang H.-J., Horncastle A. P. (2015). *A practitioner's guide to stochastic frontier analysis using Stata*. Cambridge University Press.
- Mamonov M. E., Parmeter C. F., Prokhorov A. B. (2022). Dependence modeling in stochastic frontier analysis. *Dependence Modeling*, 10, 123–144. DOI: 10.1515/demo-2022-0107.
- Newson R. B. (2010) Comparing the predictive powers of survival models using Harrell's C or Somers' D. *The Stata Journal*, 10 (3), 339–358. DOI: 10.1177/1536867X1001000303.
- Nikolskiy I. M., Furmanov K. K. (2022). Ranking accuracy of the efficiency index in the stochastic frontier model. *Computational Mathematics and Modeling*, 33 (3), 319–329. DOI: 10.1007/s10598-023-09575-4.
- Richmond J. (1974). Estimating the efficiency of production. *International Economic Review*, 15 (2), 515–521. DOI: 10.2307/2525875.
- Rumyantseva E. V., Furmanov K. K. (2021). Using out-of-sample Cox–Snell residuals in time-to-event forecasting. *Business Informatics*, 15 (1), 7–18. DOI: 10.17323/2587-814X.2021.1.7.18.
- Schmidt P. (1976). On the statistical estimation of parametric frontier production functions. *Review of Economics and Statistics*, 58, 238–239. DOI: 10.2307/1924032.
- Schweinsberg A., Stronzik M., Wissner M. (2011). *Cost benchmarking in energy regulation in European countries*. WIK-Consult (Final Report). https://www.wik.org/fileadmin/Studien/2011/Cost_benchmarking_in_energy_regulation_in_European_countries.pdf.
- Theodoridis A. M., Psychoudakis A. (2008). Efficiency measurement in Greek dairy farms: Stochastic frontier vs. data envelopment analysis. *International Journal of Economic Sciences and Applied Research*, 1 (2), 53–66.
- Winsten C. (1957). Discussion on Mr. Farrell's paper. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General*, 120, 282–284.

Received 29.06.2023; accepted 31.08.2023.